Universelle meromorphe Approximation

Universelle meromorphe Approximation

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich IV der Universität Trier

vorgelegt von

Thierry Meyrath

Trier, im Februar 2011

Im Gedenken an Georges Petry
(1981 - 2009)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit wird eine spezielle Art der komplexen Approximation behandelt, die sogenannte *universelle Approximation* bzw. die *Approximation durch universelle Funktionen*. Das Konzept der Universalität kann grob wie folgt erklärt werden. Durch einfache analytische Operationen wird aus einer einzelnen Funktion eine Funktionenfolge konstruiert, welche *jede* Funktion einer bestimmten Klasse durch geeignete Teilfolgen approximieren kann. In gewisser Weise ist diese Folge also maximal divergent, da zu jeder vorgegebenen Funktion eine Teilfolge existiert, welche diese beliebig genau in ihrem Grenzverhalten realisiert. Aus diesem Grund wird die Funktion, die diese Folge erzeugt, eine universelle Funktion genannt.

Das erste Beispiel einer universellen holomorphen Funktion stammt von George D. Birkhoff, dieser konnte im Jahre 1929 die Existenz einer ganzen Funktion φ beweisen, für welche die Funktionenfolge $\{\varphi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht im Raum der ganzen Funktionen liegt. Somit kann jede ganze Funktion durch geeignete Translationen von φ beliebig genau approximiert werden. Dieses bemerkenswerte Resultat steht am Anfang der universellen Approximation, welche sich in der Folgezeit zu einem eigenständigen Gebiet innerhalb der komplexen Approximationstheorie entwickelt hat, und ein Feld aktiver Forschung darstellt. So sind mittlerweile zahlreiche weitere Arten universeller Funktionen bekannt und es existiert eine extensive Literatur zu diesem Thema. Erstaunlicherweise wurde sich hierbei jedoch fast ausschließlich auf das Studium holomorpher und ganzer Funktionen beschränkt, insbesondere die Klasse der meromorphen Funktionen wurde bisher kaum auf das Phänomen der Universalität hin untersucht, obwohl sich angesichts der großen Anzahl an bekannten Ergebnissen über universelle holomorphe Funktionen in natürlicher Weise die Frage nach der Existenz universeller meromorpher Funktionen stellt.

Dieser Fragestellung soll die vorliegende Dissertation nachgehen. Nachdem wir in einem ersten einleitenden Kapitel gewisse Grundlagen geschafft haben, werden wir uns in Kapitel 2 mit sogenannten translationsuniversellen meromorphen Funktionen beschäftigen. Wir werden die Existenz zwei verschiedener Klassen solcher Funktionen beweisen und deren Eigenschaften ausführlich studieren.

Im dritten Kapitel betrachten wir meromorphe Funktionen, die universelles Verhalten bezüglich Streckungen aufweisen. Auch hier werden wir die Frage nach der Existenz klären und auf die Eigenschaften dieser Funktionen eingehen, wobei sowohl Gemeinsam-

keiten als auch Unterschiede zu translationsuniversellen Funktionen auftreten werden.
In Kapitel 4 beweisen wir die Existenz von Funktionen, welche entlang beliebiger unbeschränkter Kurven gewisse universelle Approximationseigenschaften besitzen. Hierbei wird es allerdings notwendig sein, die Klasse der approximierbaren Funktionen einzuschränken.
Im letzten Kapitel befassen wir uns schließlich mit der Folge der sukzessiven Ableitungen meromorpher Funktionen. Insbesondere werden wir der Frage nachgehen, ob in Analogie zu einem klassischen Ergebnis von Gerald R. MacLane über holomorphe Funktionen, auch meromorphe Funktionen eine Ableitungsfolge mit gewissen Universalitätseigenschaften besitzen können.

Für die Anregung und Betreuung der vorliegenden Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. Wolfgang Luh sehr herzlich danken. Desweiteren gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Jürgen Müller für die freundliche Übernahme des Koreferates.

Kapitel 1

Einführung

Dieses erste Kapitel dient der Vorbereitung und der Einführung in die Thematik. Wir werden einerseits gewisse Grundlagen schaffen, indem wir Notationen und Hilfsmittel bereitstellen, welche uns in dieser Arbeit begleiten werden, andererseits soll auch die Fragestellung der Arbeit erklärt und motiviert werden. Dazu werden wir kurz auf universelle holomorphe Approximation eingehen und einen historischen Überblick über bisher geleistete Vorarbeiten auf dem Gebiet der universellen meromorphen Approximation geben. Der letzte Abschnitt des Kapitels fasst schließlich die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit kurz zusammen.

1.1 Notationen und Bezeichnungen

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein, welche wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden werden. Die erweiterte komplexe Zahlenebene bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathbb{C}}$, das heißt $\widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Für die punktierte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ schreiben wir $\mathbb{C}^\times$. Mit B° und $\overline{B}$ bezeichnen wir wie üblich das Innere bzw. den Abschluss einer Menge B, weiter schreiben wir B^c für das Komplement von B. Für eine offene Menge $O \subset \mathbb{C}$ und eine abgeschlossene Menge $E \subset \mathbb{C}$ führen wir folgende Funktionenräume ein

$$\begin{aligned}
C(E) &:= \{f : f \text{ ist stetig auf } E\}, \\
H(O) &:= \{f : f \text{ ist holomorph auf } O\}, \\
M(O) &:= \{f : f \text{ ist meromorph auf } O\}, \\
A(E) &:= C(E) \cap H(E^\circ).
\end{aligned}$$

Wenn wir sagen, die Funktion f sei holomorph (bzw. meromorph) auf der abgeschlossenen Menge E, so meinen wir damit stets, dass eine offene Umgebung U_E von E und eine Funktion $F \in H(U_E)$ (bzw. $F \in M(U_E)$) existieren, so dass $F|_E = f$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $f \in H(E)$ (bzw. $f \in M(E)$).

1.2 Vorbereitungen

Im Folgenden werden wir einige Hilfsmittel zusammenstellen, auf welche wir später in dieser Arbeit zurückgreifen werden. Zum einen sind dies klassische Ergebnisse aus der komplexen Approximationstheorie, zum anderen werden wir auch Kenntnisse über den Raum der meromorphen Funktionen benötigen. Die meisten der vorgestellten Ergebnisse sind bekannt, daher werden wir größtenteils auf Beweise verzichten, und lediglich Referenzen angeben.

1.2.1 Hilfsmittel aus der gleichmäßigen Approximation

Ein erstes zentrales Resultat, welches gleichzeitig am Anfang der Approximation im Komplexen steht, stammt aus dem Jahre 1885 und geht auf Runge [53] zurück.

Satz 1.2.1 (**Runge, 1885**). *Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Weiter seien $f \in H(K)$ und $g \in M(K)$. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine rationale Funktion R_1 mit (einfachen) Polen außerhalb von K, so dass gilt

$$\max_K |f(z) - R_1(z)| < \varepsilon.$$

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine rationale Funktion R_2 mit $g - R_2 \in H(K)$, so dass gilt

$$\max_K |g(z) - R_2(z)| < \varepsilon.$$

Der Satz von Mergelian [45] aus dem Jahre 1952 liefert ein bestmögliches Resultat im Bereich der polynomialen Approximation auf Kompakta, hierbei bezeichnet $P(K)$ die Menge aller Funktionen, welche auf K gleichmäßig durch Polynome approximierbar sind.

Satz 1.2.2 (**Mergelian, 1952**). *Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $A(K) = P(K)$.

(ii) Das Komplement von K ist zusammenhängend.

Dieser Satz charakterisiert somit vollständig diejenigen kompakten Mengen K, welche $A(K) = P(K)$ erfüllen. Das „rationale Analogon“ zum Satz von Mergelian geht auf Vitushkin [56] zurück und stammt aus dem Jahre 1966. Bezeichnen wir mit $R(K)$ die

Menge der Funktionen, welche auf K gleichmäßig durch rationale Funktionen mit Polen außerhalb von K approximierbar sind, so charakterisiert dieser Satz notwendig und hinreichend diejenigen Kompakta K, welche $A(K) = R(K)$ erfüllen. Zu seiner Formulierung benötigen wir zunächst den Begriff der AC Kapazität (engl.: *continuous analytic capacity*) einer Menge $E \subset \mathbb{C}$.

Definition 1.2.3. *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum und es sei*

$$\mathcal{AC}(K) := \{f : f \text{ ist stetig in } \widetilde{\mathbb{C}} \text{ und holomorph in } \widetilde{\mathbb{C}} \setminus K, \quad \|f\|_{\widetilde{\mathbb{C}}} \leq 1, \quad f(\infty) = 0\},$$

wobei $\|f\|_{\widetilde{\mathbb{C}}} = \sup_{\widetilde{\mathbb{C}}} |f(z)|$ ist. Dann ist die AC Kapazität von K definiert durch

$$\alpha(K) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{AC}(K)\}.$$

Für eine (nicht notwendigerweise kompakte) Teilmenge $E \subset \mathbb{C}$ definieren wir

$$\alpha(E) := \sup\{\alpha(K) : K \subset E \text{ ist kompakt}\}.$$

Satz 1.2.4 (Vitushkin, 1966). *Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $A(K) = R(K)$.

(ii) Für jede offene Kreisscheibe D gilt $\alpha(D \setminus K) = \alpha(D \setminus K^\circ)$.

Auch andere, ebenfalls die AC Kapazität verwendende Kriterien sind möglich. Der Satz von Vitushkin löst das Problem der gleichmäßigen rationalen Approximation auf kompakten Mengen also vollständig. Es sei aber bemerkt, dass, im Gegensatz zum polynomialen Fall, die Bedingung an das Kompaktum K äußerst kompliziert ist, was in erster Linie daran liegt, dass die AC Kapazität keinerlei geometrische Anschauung ermöglicht. So ist es praktisch unmöglich, einer kompakten Menge „anzusehen", ob die in obigem Satz gestellte Kapazitätsbedingung erfüllt ist oder nicht. Es gibt aber einige anschauliche hinreichende Kriterien für die Gleichheit $A(K) = R(K)$, welche mittels des Satzes von Vitushkin bewiesen werden können.

Satz 1.2.5. *Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dann ist jede der folgenden Aussagen hinreichend für die Gleichheit $A(K) = R(K)$:*

(i) Das Komplement von K besitzt nur endlich viele Komponenten.

(ii) Der Durchmesser der Komponenten von K^c ist nach unten beschränkt.

(iii) Jeder Randpunkt von K ist zugleich Randpunkt einer Komponente von K^c.

Obwohl es noch eine Reihe weiterer hinreichender Kriterien gibt, macht dieser Satz bereits deutlich, dass es „viel mehr“ Kompakta K mit $A(K) = R(K)$ als mit $A(K) = P(K)$ gibt. Zudem ist klar, dass aus $A(K) = P(K)$ stets $A(K) = R(K)$ folgt. Die Sätze 1.2.2 und 1.2.4 geben nun Anlass zu folgender Definition.

Definition 1.2.6. *Wir definieren die folgenden Mengen*

$$\mathcal{M} := \{K \subset \mathbb{C} : K \text{ ist kompakt, } K^c \text{ ist zusammenhängend}\},$$
$$\mathcal{V} := \{K \subset \mathbb{C} : K \text{ ist kompakt, } \alpha(D \setminus K) = \alpha(D \setminus K^\circ) \text{ für jede offene Kreisscheibe } D\},$$

wobei α die in Definition 1.2.3 eingeführte AC Kapazität bezeichnet. Die Elemente aus $\mathcal{M}$ nennen wir Mergelian Mengen und die Elemente aus $\mathcal{V}$ Vitushkin Mengen.

Die Mengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{V}$ werden in der gesamten Arbeit von großer Bedeutung sein. Nach dem Satz von Mergelian liegt ein Kompaktum K genau dann in $\mathcal{M}$, wenn es $A(K) = P(K)$ erfüllt. Nach dem Satz von Vitushkin liegt K genau dann in $\mathcal{V}$, wenn $A(K) = R(K)$ gilt. Wie bereits erwähnt, ist weiterhin klar, dass $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ gilt, und dass die Menge $\mathcal{V}$ „viel größer“ ist als die Menge $\mathcal{M}$.

Wir kommen nun zu einer weiteren Definition, welche für uns von großer Wichtigkeit sein wird.

Definition 1.2.7. *Wir definieren folgende abzählbare Mengen*

$$\mathcal{P} := \Big\{p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu + i\, b_\nu) z^\nu : a_\nu \in \mathbb{Q}, b_\nu \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}_0\Big\},$$
$$\mathcal{R} := \Big\{r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} : p, q \in \mathcal{P}, q \not\equiv 0\Big\}.$$

Folglich ist $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome, deren Koeffizienten rationale Real- und Imaginärteile haben, $\mathcal{R}$ ist die Menge aller rationalen Funktionen, bei denen sowohl das Zähler- als auch das Nennerpolynom diese Eigenschaft haben. Offenbar sind beide Mengen abzählbar. Ein bekanntes Ergebnis, welches leicht aus dem Satz von Mergelian folgt, besagt, dass die Menge $\mathcal{P}$ für alle $K \in \mathcal{M}$ dicht im Raum $A(K)$ ist, versehen mit der Metrik $d_K(f, g) := \max_K |f(z) - g(z)|$. Von großer Bedeutung für den weiteren Verlauf ist das folgende Ergebnis, welches etwa in [41] bewiesen wurde und eine ähnliche Aussage für die Menge $\mathcal{R}$ und Vitushkin Kompakta macht.

Lemma 1.2.8. *Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{V}$, zu jeder Funktion $f \in A(K)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $r \in \mathcal{R}$ mit*

$$\max_K |f(z) - r(z)| < \varepsilon.$$

Abschließend wollen wir noch einige Ergebnisse aus dem Bereich der meromorphen Approximation auf abgeschlossenen Mengen angeben. Das folgende Resultat ist eine Erweiterung des Satzes von Runge auf abgeschlossene, unbeschränkte Mengen. Es ist eine unmittelbare Folgerung aus den Approximationssätzen von Roth [51] und dem Satz von Runge.

Satz 1.2.9. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und E eine in G abgeschlossene Teilmenge von G. Weiter seien $f \in H(E)$ und $g \in M(E)$. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $m_1 \in M(G) \cap H(E)$, so dass gilt

$$|f(z) - m_1(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in E.$$

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $m_2 \in M(G)$ mit $g - m_2 \in H(E)$, so dass gilt

$$|g(z) - m_2(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in E.$$

Durch zweimalige Anwendung des obigen Satzes kann man folgendes Ergebnis beweisen, welches Approximation mit gewisser Geschwindigkeit liefert. Dieses Lemma wird sich als äußerst nützlich zur Konstruktion universeller meromorpher Funktionen herausstellen, und wir werden es später häufig verwenden.

Lemma 1.2.10. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und E eine in G abgeschlossene Teilmenge von G. Es seien $f \in H(E)$ und $g \in M(E)$, weiter sei ϵ eine auf E holomorphe Funktion mit $|\epsilon(z)| > 0$ für alle $z \in E$. Dann gilt:*

(i) Es existiert eine Funktion $m_1 \in M(G) \cap H(E)$, so dass gilt

$$|f(z) - m_1(z)| < |\epsilon(z)| \quad \text{für alle } z \in E.$$

(ii) Es existiert eine Funktion $m_2 \in M(G)$ mit $g - m_2 \in H(E)$, so dass gilt

$$|g(z) - m_2(z)| < |\epsilon(z)| \quad \text{für alle } z \in E.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $|\epsilon(z)| < 1$ für alle $z \in E$ gilt. Nach Voraussetzung gilt $\frac{2}{\epsilon} \in H(E)$, so dass nach Satz 1.2.9 eine Funktion $h_1 \in M(G) \cap H(E)$ existiert mit

$$\left| \frac{2}{\epsilon(z)} - h_1(z) \right| < 1 \quad \text{für alle } z \in E.$$

Wegen $\left| \frac{2}{\epsilon(z)} - h_1(z) \right| \geq \frac{2}{|\epsilon(z)|} - |h_1(z)|$ folgt hieraus für alle $z \in E$

$$|h_1(z)| > \frac{2}{|\epsilon(z)|} - 1 > \frac{1}{|\epsilon(z)|},$$

somit ist h_1 auf E nullstellenfrei und es gilt

$$\frac{1}{|h_1(z)|} < |\epsilon(z)| \quad \text{für alle } z \in E.$$

Ist nun $f \in H(E)$ eine beliebige Funktion, so folgt $F(z) := h_1(z)\, f(z) \in H(E)$, und eine erneute Anwendung von Satz 1.2.9 liefert uns eine Funktion $h_2 \in M(G) \cap H(E)$ mit

$$|F(z) - h_2(z)| = |h_1(z)\, f(z) - h_2(z)| < 1 \quad \text{für alle } z \in E.$$

Hieraus erhalten wir schließlich

$$\left| f(z) - \frac{h_2(z)}{h_1(z)} \right| < \frac{1}{|h_1(z)|} < |\epsilon(z)| \quad \text{für alle } z \in E,$$

und somit wegen $m_1 := \frac{h_2}{h_1} \in M(G) \cap H(E)$ die Behauptung *(i)*.
Unter Verwendung der zweiten Aussage aus Satz 1.2.9 folgt auf analoge Weise die Behauptung *(ii)*.

□

Mit diesem Lemma wollen wir den Abschnitt über Hilfsmittel aus der komplexen Approximation abschließen. Es sei noch einmal bemerkt, dass wir uns im Wesentlichen auf Ergebnisse beschränkt haben, welche wir später in dieser Arbeit verwenden werden. Ausführliche Darstellungen des Themas *Approximation im Komplexen* findet man etwa bei Gaier [13], Gamelin [14], Gauthier und Hengartner [15], sowie Zalcman [58].

1.2.2 Die chordale Metrik und der Raum $(M_\infty(G), \rho)$

Neben den im vorigen Abschnitt zusammengestellten Ergebnissen aus der komplexen Approximationstheorie benötigen wir in dieser Arbeit noch gewisse Kenntnisse über den Raum $M(G)$ der auf einem Gebiet G meromorphen Funktionen. Die folgenden Ergebnisse sind bekannt und finden sich etwa bei Conway [9] oder Schiff [54], so dass wir auch hier größtenteils auf die Beweise verzichten werden.
Setzen wir für eine meromorphe Funktion $\phi \in M(G)$ wie üblich $\phi(z) = \infty$, falls z eine Polstelle von ϕ ist, so ist ϕ eine Abbildung von G nach $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wir versehen $\widetilde{\mathbb{C}}$ mit der *chordalen Metrik* d, welche bekanntlich wie folgt definiert ist.

Definition 1.2.11. *Es sei $d : \widetilde{\mathbb{C}} \times \widetilde{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &:= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ d(z_1, \infty) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \quad \text{für } z_1 \in \mathbb{C}, \\ d(\infty, \infty) &:= 0. \end{aligned}$$

Dann wird durch d eine Metrik auf $\widetilde{\mathbb{C}}$ definiert, welche wir die chordale Metrik nennen.

Im folgenden Lemma stellen wir einige elementare Eigenschaften der Metrik d zusammen, welche unmittelbar aus obiger Definition folgen.

Lemma 1.2.12. *Es sei $d(\cdot,\cdot)$ die chordale Metrik. Dann gilt:*

(E1) Es ist $d(z_1, z_2) \leq 1$ für alle $z_1, z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

(E2) Es ist $d(z_1, z_2) = d(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$ für alle $z_1, z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

(E3) Es ist $d(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Sind f und g zwei meromorphe Funktionen, so bilden diese nach $\widetilde{\mathbb{C}}$ ab, so dass wir mit Hilfe der Metrik d den Abstand zwischen den Funktionswerten $f(z)$ und $g(z)$ angeben können.

Bevor wir auf die Konvergenz von Folgen in der Metrik d zu sprechen kommen, führen wir den Stetigkeitsbegriff bezüglich dieser Metrik ein.

Definition 1.2.13. *Die Funktion f heißt sphärisch stetig im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt*

$$d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Die Funktion f heißt sphärisch stetig auf der Menge $E \subset \mathbb{C}$, falls f in jedem Punkt $z \in E$ sphärisch stetig ist.

Aus den Eigenschaften der chordalen Metrik folgt nun unmittelbar das folgende Ergebnis, siehe etwa Schiff [54], S. 4.

Lemma 1.2.14. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M(G)$ eine meromorphe Funktion. Dann ist f sphärisch stetig auf G.*

Wir kommen nun zu den wichtigen Begriffen der sphärisch gleichmäßigen und sphärisch kompakten Konvergenz von Funktionenfolgen.

Definition 1.2.15. *Es seien $E \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $O \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Weiter sei $\{f_n\}$ eine Folge auf E definierter Funktionen, und $\{g_n\}$ eine Folge auf O definierter Funktionen.*

(i) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert auf E sphärisch gleichmäßig gegen die Funktion f, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $n > N_\varepsilon$ und für jedes $z \in E$ gilt

$$d(f_n(z), f(z)) < \varepsilon.$$

(ii) Die Folge $\{g_n\}$ konvergiert auf O sphärisch kompakt gegen die Funktion g, falls die Folge $\{g_n\}$ auf jedem Kompaktum $K \subset O$ sphärisch gleichmäßig gegen g konvergiert.

Bemerkung 1.2.16. *Offenbar ist die Definition der sphärisch gleichmäßigen Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ auf der Menge E gegen die Funktion f äquivalent dazu, dass gilt*

$$\sup_E d(f_n(z), f(z)) \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Ist die Menge E hierbei kompakt, und sind die Funktionen f_n und f sphärisch stetig auf E, so folgt unter Beachtung der Stetigkeit der Funktionen $\varphi_n(z) := d(f_n(z), f(z))$ auf E, dass die sphärisch gleichmäßige Konvergenz äquivalent dazu ist, dass gilt

$$\max_E d(f_n(z), f(z)) \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Bekanntlich heißt eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ auf $E \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent gegen die Funktion f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $n > N_\varepsilon$ und für jedes $z \in E$ gilt $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Somit ist wegen *(E3)* klar, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_n\}$ gegen f die sphärisch gleichmäßige Konvergenz gegen f folgt. Falls die Grenzfunktion beschränkt ist, gilt hiervon auch die Umkehrung, siehe etwa Schiff [54], S. 3.

Satz 1.2.17. *Die Folge $\{f_n\}$ konvergiere auf $E \subset \mathbb{C}$ sphärisch gleichmäßig gegen eine Funktion f, welche auf E beschränkt ist. Dann konvergiert $\{f_n\}$ auf E gleichmäßig gegen f.*

Das folgende Ergebnis, welches wir später mehrfach verwenden werden, stellt einen gewissen Zusammenhang zwischen sphärisch kompakter Konvergenz und gleichmäßiger Konvergenz her, zum Beweis siehe Schiff [54], S. 72.

Satz 1.2.18. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{f_n\}$ eine Folge in G meromorpher Funktionen. Dann konvergiert die Folge $\{f_n\}$ auf G sphärisch kompakt gegen die Funktion f, genau dann wenn zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe $K := K(z_0, r) := \{z : |z - z_0| \leq r\}$ existiert mit*

$$\max_K |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \textit{oder} \quad \max_K \left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Wir wollen uns nun mit dem Raum $M(G)$ der auf einem Gebiet G meromorphen Funktionen beschäftigen. Unser Ziel wird es sein, auf dieser Menge eine Metrik einzuführen, so dass wir in gewisser Weise den Abstand zwischen zwei meromorphen Funktionen messen können. Wir folgen hierbei im Wesentlichen der Darstellung von Conway [9], Kapitel VII.

Lemma 1.2.19. *Es sei $O \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann existiert eine Folge $\{K_n\}$ kompakter Teilmengen von O, so dass gilt:*

(i) Es ist $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$,

(iii) Zu jedem Kompaktum $K \subset O$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_N$.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun folgendermaßen eine Metrik auf $M(G)$ definieren.

Definition 1.2.20. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{K_n\}$ eine gemäß Lemma 1.2.19 gewählte Folge kompakter Teilmengen von G. Ferner seien f und g in G meromorphe Funktionen. Dann setzen wir*

$$\rho_n(f,g) := \max_{K_n} d(f(z), g(z)).$$

Hiermit definieren wir weiter

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}.$$

Man sieht leicht, dass $(M(G), \rho)$ ein metrischer Raum ist. Weiter beachte man, dass die Metrik ρ hierbei in gewisser Weise unabhängig von der speziellen Wahl der kompakten Mengen K_n ist, da man zeigen kann, dass die von ρ erzeugten offenen Mengen unabhängig hiervon sind, siehe etwa Conway [9], S. 145. Desweiteren besitzt die Metrik ρ folgende Eigenschaften.

Lemma 1.2.21. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ρ die in Definition 1.2.20 eingeführte Metrik. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum $K \subset G$, so dass für alle Funktionen f und g aus $M(G)$ gilt*

$$\max_{K} d(f(z), g(z)) < \delta \quad \textit{impliziert} \quad \rho(f,g) < \varepsilon.$$

Ist andererseits ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum $K \subset G$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle Funktionen f und g aus $M(G)$ gilt

$$\rho(f,g) < \varepsilon \quad \textit{impliziert} \quad \max_{K} d(f(z), g(z)) < \delta.$$

Lemma 1.2.22. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{f_n\}$ eine Folge in $M(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\rho(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert auf G sphärisch kompakt gegen f.

Konvergiert eine Folge $\{f_n\}$ meromorpher Funktionen also in $(M(G), \rho)$ gegen die Funktion f, so ist dies äquivalent zur sphärisch kompakten Konvergenz der Folge auf G gegen f. Aus diesem Grund nennen wir die Metrik ρ auch die *Metrik der sphärisch kompakten Konvergenz*, die von ihr erzeugte Topologie auf $M(G)$ nennen wir die *Topologie der sphärisch kompakten Konvergenz.*

Bemerkung 1.2.23. *Bekanntlich kann man auf ähnliche Weise eine Metrik δ auf dem Raum der holomorphen Funktionen $H(G)$ definieren, die sogenannte Metrik der kompakten Konvergenz, siehe etwa Conway [9], Kapitel VII. Diese Metrik hat ähnliche Eigenschaften wie die Metrik ρ, und $(H(G), \delta)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Mit der in Definition 1.2.20 eingeführten Metrik ρ wird $M(G)$ zu einem metrischen Raum. Wir werden allerdings gleich zeigen, dass der Raum $(M(G), \rho)$ nicht vollständig ist. Zunächst führen wir noch folgende Definition ein.

Definition 1.2.24. *Wir definieren die Funktion $f_\infty : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ durch*

$$f_\infty(z) = \infty \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Funktion f_∞ bildet somit jedes $z \in \mathbb{C}$ auf den Wert $\infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$ ab. Man beachte, dass f_∞ sphärisch stetig ist, allerdings ist f_∞ nicht meromorph. Zudem sei erwähnt, dass Definition 1.2.20 auch im Fall $f = f_\infty$ oder $g = f_\infty$ sinnvoll ist, und dass auch $(M(G) \cup \{f_\infty\}, \rho)$ ein metrischer Raum ist, und entsprechende Aussagen zu Lemma 1.2.21 und 1.2.22 auch für $M(G) \cup \{f_\infty\}$ gelten.

Lemma 1.2.25. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist der metrische Raum $(M(G), \rho)$ nicht vollständig.*

Beweis. Wir betrachten für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k(z) \equiv k$ und zeigen, dass $\{f_k\}$ eine Cauchy-Folge in $(M(G), \rho)$ ist.
Es sei dazu ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta > 0$, so dass aus $0 \leq t < \delta$ folgt $\frac{t}{t+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, ferner setzen wir $N_\varepsilon := \frac{1}{\delta}$. Ist nun $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Kompaktum und sind n, m natürliche Zahlen mit $n, m > N_\varepsilon$, so gilt

$$\max_K d(f_n(z), f_m(z)) = \max_K d(n,m) = d(n,m) = \frac{|n-m|}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}} \leq \frac{|n-m|}{n\,m} < \frac{1}{N_\varepsilon} = \delta.$$

Ist nun $\{K_j\}$ eine gemäß Lemma 1.2.19 gewählte Folge kompakter Teilmengen von G und ρ_j wie in Definition 1.2.20, so folgt $0 \leq \rho_j(f_n, f_m) < \delta$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und für jedes $n, m > N_\varepsilon$, so dass gemäß unserer Wahl von δ für jedes j gilt

$$\frac{\rho_j(f_n, f_m)}{\rho_j(f_n, f_m) + 1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für jedes } n, m > N_\varepsilon.$$

Schließlich erhalten wir für jedes $n, m > N_\varepsilon$

$$\rho(f_n, f_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(f_n, f_m)}{1 + \rho_j(f_n, f_m)} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \varepsilon,$$

so dass $\{f_k\}$ eine Cauchy-Folge in $(M(G), \rho)$ ist. Offenbar konvergiert die Funktionenfolge $\{f_k\}$ aber gegen die Funktion f_∞, welche nicht in $M(G)$ liegt.

□

Folglich kann eine Folge meromorpher Funktionen sphärisch kompakt gegen die Funktion f_∞ konvergieren, welche konstant den Wert ∞ annimmt und somit nicht meromorph ist. Der nächste Satz besagt, dass dies jedoch in gewisser Weise der ungünstigste Fall ist, zum Beweis siehe etwa Schiff [54], S. 72.

Satz 1.2.26. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{f_n\}$ eine Funktionenfolge in $M(G)$. Weiter gelte $\rho(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt entweder $f \in M(G)$ oder $f = f_\infty$.*

Hieraus können wir nun eine wichtige Folgerung ziehen.

Lemma 1.2.27. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist der Raum $(M(G) \cup \{f_\infty\}, \rho)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

Definition 1.2.28. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann setzen wir*

$$M_\infty(G) := M(G) \cup \{f_\infty\}.$$

Mit dieser Definition und obigem Lemma gilt also, dass $(M_\infty(G), \rho)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, was sich später als sehr nützlich herausstellen wird. Von großer Wichtigkeit ist weiterhin, dass der Raum $(M_\infty(G), \rho)$ separabel ist, das heißt er enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.

Satz 1.2.29. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist die Menge $\mathcal{R}$ dicht in $(M_\infty(G), \rho)$. Folglich ist der Raum $(M_\infty(G), \rho)$ separabel.*

Beweis. Es seien $K \subset G$ ein Kompaktum, f eine Funktion aus $M_\infty(G)$ und $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.2.21 reicht es zu zeigen, dass ein $r \in \mathcal{R}$ existiert, so dass $\max_K d(f(z), r(z)) < \varepsilon$ gilt.
Falls $f = f_\infty$ ist, so wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + N^2}} = d(N, \infty) < \varepsilon,$$

woraus mit $r(z) \equiv N$ wegen $r \in \mathcal{R}$ dann die Behauptung folgt.
Es sei also $f \in M_\infty(G)$ mit $f \neq f_\infty$. Da f meromorph auf K ist, ist f nach dem Satz von

Runge auf K gleichmäßig, und somit insbesondere sphärisch gleichmäßig durch rationale Funktionen approximierbar. Folglich existiert ein rationales R mit

$$\max_K d(f(z), R(z)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es seien P und Q Polynome mit $R = \frac{P}{Q}$, so dass P und Q keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Da die Menge $\mathcal{P}$ dicht in $(H(\mathbb{C}), \delta)$ ist, existieren Folgen $\{P_n\}$ und $\{Q_n\}$ in $\mathcal{P}$, so dass gilt

$$\begin{aligned} P_n(z) &\to P(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty) \quad \text{und} \\ Q_n(z) &\to Q(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich

$$P_n(z) \to P(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty),$$

und wegen Satz 1.2.18 auch

$$\frac{1}{Q_n(z)} \to \frac{1}{Q(z)} \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty).$$

Da die Polynome P und Q hierbei keine gemeinsamen Nullstellen haben, folgt dann

$$\frac{P_n}{Q_n}(z) \to \frac{P}{Q}(z) = R(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere erhalten wir dann auch sphärisch kompakte Konvergenz auf G, und es existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\max_K d(\frac{P_M}{Q_M}(z), R(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Setzen wir nun $r_M := \frac{P_M}{Q_M}$, so gilt offenbar $r_M \in \mathcal{R}$ und wir erhalten insgesamt

$$\max_K d(f(z), r_M(z)) \leq \max_K d(f(z), R(z)) + \max_K d(R(z), r_M(z)) < \varepsilon.$$

□

1.3 Universelle holomorphe Approximation

Bevor wir auf universelle meromorphe Approximation und die Ziele dieser Arbeit zu sprechen kommen, wollen wir zur Motivation zunächst auf bekannte Ergebnisse aus der universellen holomorphen Approximation eingehen, wobei wir uns auf einige wenige Resultate beschränken werden, die für diese Arbeit von Interesse sind.
Wie bereits erwähnt, geht das erste Beispiel einer universellen holomorphen Funktion auf Birkhoff [5] zurück, welcher im Jahre 1929 den folgenden Satz veröffentlichte.

Satz 1.3.1 (**Birkhoff, 1929**). *Es existiert eine ganze Funktion* φ *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder ganzen Funktion f *existiert eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi(z + n_k) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Mit diesem erstaunlichen Ergebnis hat Birkhoff ein neues Gebiet der komplexen Approximationstheorie begründet, das der *universellen Approximation*. Die von Birkhoff konstruierte Funktion hat die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Translationen bezüglich der natürlichen Zahlen dicht liegt im Raum aller ganzen Funktionen, versehen mit der Metrik der kompakten Konvergenz. Ein ähnliches Ergebnis stammt von Luh [32] aus dem Jahre 1976.

Satz 1.3.2 (**Luh, 1976**). *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann existiert eine ganze Funktion* φ *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ *und jeder Funktion* $f \in A(K)$ *existiert eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Die Funktion aus obigem Satz hat also die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Translationen $\{\varphi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $K \in \mathcal{M}$ dicht in $A(K)$ liegt. Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir im Folgenden *translationsuniversell* (bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$). Wir wollen noch erwähnen, dass das Konzept der Translationsuniversalität auch auf Funktionen erweitert wurde, welche in allgemeinen Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ holomorph sind, siehe etwa [33] und [40]. Weiterhin sei bemerkt, dass Duyos-Ruiz [11] im Jahre 1984 zeigen konnte, dass die Menge der translationsuniversellen ganzen Funktionen eine residuale Teilmenge von $H(\mathbb{C})$ darstellt, somit gibt es gewissermaßen „viele“ solcher Funktionen.

Man beachte, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen den Sätzen 1.3.1 und 1.3.2 besteht. Da nämlich zu jedem Kompaktum $H \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ mit $H \subset K$ existiert, zeigt man leicht das folgende Ergebnis.

Lemma 1.3.3. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann sind folgende Eigenschaften einer Funktion* φ *äquivalent:*

(i) Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ *und jeder Funktion* $f \in A(K)$ *existiert eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

(ii) Zu jeder Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ *existiert eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Ein weiteres Resultat, das für diese Arbeit von Interesse ist, geht auf Zappa [59] zurück, welcher im Jahre 1988 die Existenz einer holomorphen *streckungsuniversellen* Funktion beweisen konnte.

Satz 1.3.4 (**Zappa, 1988**). *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ mit $0 \notin K$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Im Gegensatz zum obigen Satz 1.3.2 liegt in diesem Fall also die Folge der Streckungen $\{\varphi(z\,\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $A(K)$ für jedes $K \in \mathcal{M}$, wobei offenbar zusätzlich $0 \notin K$ gefordert werden muss.

Eine andere Art der Universalität wurde im Jahre 1952 von MacLane [42] entdeckt, er konstruierte eine ganze Funktion φ mit der Eigenschaft, dass die Folge ihrer Ableitungen dicht liegt im Raum aller ganzen Funktionen.

Satz 1.3.5 (**MacLane, 1952**). *Es existiert eine ganze Funktion φ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder ganzen Funktion f existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi^{(n_k)}(z) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis zu Lemma 1.3.3 folgt, dass hierzu äquivalent ist, dass die Folge $\{\varphi^{(n)}(z) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $A(K)$ ist für jedes $K \in \mathcal{M}$. Weitere Ergebnisse in Bezug auf solche *ableitungsuniversellen* Funktionen findet man etwa bei Grosse-Erdmann [22] oder Luh [37], entsprechende Ergebnisse über die universelle Approximation durch Folgen von Stammfunktionen etwa bei Blair und Rubel [6] oder Luh [34, 35].

Abschließend sei bemerkt, dass eine Vielzahl weiterer Ergebnisse über universelle holomorphe Funktionen existieren, auf die wir an dieser Stelle jedoch nicht eingehen werden. Wir verweisen etwa auf den Übersichtsartikel von Grosse-Erdmann [23], welcher einen Überblick über die bis zum Jahre 1999 erzielten Resultate gibt und ein umfangreiches Literaturverzeichnis beinhaltet, sowie auf das 2009 erschienene Buch von Bayart und Matheron [2].

1.4 Universelle meromorphe Approximation: Motivation und Stand der Forschung

Nachdem wir nun das Konzept der Universalität anhand einiger Ergebnisse aus dem Bereich der universellen holomorphen Approximation kennengelernt haben, wollen wir jetzt auf universelle meromorphe Funktionen und die Ziele dieser Arbeit zu sprechen kommen. Als Motivation dienen uns in erster Linie die zahlreichen bekannten Resultate über universelle holomorphe Funktionen. Betrachten wir etwa den Satz von Birkhoff, so stellt sich in natürlicher Weise die Frage, ob dieses Ergebnis auf den meromorphen Fall erweitert werden kann und ob eine meromorphe Funktion existiert, welche jede meromorphe Funktion sphärisch kompakt durch geeignete Translationen approximieren kann. Die gleiche Frage stellt sich in Anbetracht anderer Ergebnisse über universelle holomorphe Funktionen, wobei allgemein zu beachten ist, dass man sich bei der universellen holomorphen Approximation stets auf Mergelian Mengen beschränken muss, da zu jedem Kompaktum $K \notin \mathcal{M}$ Funktionen $f \in A(K)$ existieren, welche nicht holomorph approximierbar sind. Diese Beschränkung kann beim Übergang zur meromorphen Approximation aufgehoben werden, so dass die Frage nach der Existenz meromorpher Funktionen mit entsprechenden universellen Approximationseigenschaften auf kompakten Mengen $K \in \mathcal{V}$ berechtigt ist. Dies ist insbesondere deshalb interessant, da jede Mergelian Menge auch eine Vitushkin Menge darstellt, und die Menge $\mathcal{V}$ in gewisser Weise „viel mehr“ Elemente als die Menge $\mathcal{M}$ enthält.
Eine der Hauptfragestellungen dieser Arbeit besteht somit darin, zu untersuchen, ob die klassischen Ergebnisse über universelle holomorphe Funktionen auf den meromorphen Fall übertragbar sind. Aufgrund der Vielzahl an bekannten Resultaten aus der universellen holomorphen Approximation und insbesondere vor dem Hintergrund, dass meromorphe Funktionen vielfältigere Approximationsmöglichkeiten als holomorphe Funktionen bieten, scheint die Frage nach der Existenz universeller meromorpher Funktionen äußerst sinnvoll und interessant. Umso erstaunlicher ist es, dass diese Thematik in der Literatur bisher kaum Beachtung fand. Im Folgenden wollen wir kurz auf die wenigen bekannten Ergebnisse über universelle meromorphe Funktionen eingehen.

Die ersten Untersuchungen zu diesem Thema stammen aus den 1980er Jahren und gehen auf Kanatnikov [28, 29] zurück, welcher sich in zwei Arbeiten mit der Existenz universeller meromorpher Funktionen in Gebieten beschäftigt. Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist ein Ergebnis von Luh [33] über die Existenz universeller holomorpher Funktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten. Als Hauptergebnis zeigt Kanatnikov in [29] mit Hilfe des Satzes von Runge, dass zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ eine in G meromorphe Funktion ϕ existiert, so dass für geeignete Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ komplexer Zahlen die Funktionenfolge $\{\phi(a_n\, z + b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ auf beliebigen kompakten Mengen gewisse uni-

verselle Eigenschaften hat. Auf den Sonderfall $K \in \mathcal{V}$ geht Kanatnikov jedoch nicht ein. Zudem sei bemerkt, dass Kanatnikovs Resultate offenbar nicht sonderlich bekannt sind, so werden seine Arbeiten nur äußerst selten zitiert und es gibt anscheinend keine Ergebnisse, die darauf aufbauen.
Ein weiteres Ergebnis über universelle Approximation durch meromorphe Funktionen ist aus dem Jahr 2000. Luh und Martirosian [38] zeigen mittels eines konstruktiven Beweises, dass zu einer unbeschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ eine meromorphe Funktion ϕ existiert, welche translationsuniversell im Sinne von Satz 1.3.2 ist und zusätzlich ein langsames Wachstum im Sinne der Nevanlinnaschen charakteristischen Funktion $T(r, \phi)$ besitzt. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass mit der von Luh und Martirosian konstruierten Funktion keine Approximation auf Vitushkin Mengen möglich ist, die Funktion ist somit keine „richtige“ universelle meromorphe Funktion in unserem Sinne. Weiterhin sei noch erwähnt, dass die gleichen Autoren [39] im Jahre 2002 ein entsprechendes Ergebnis für im Einheitskreis meromorphe Funktionen erhalten, auch hier ist allerdings nur Approximation auf Mergelian Mengen möglich.
Im Jahre 2001 gelingt es Chan [7] mittels einer neuen Variante des sogenannten Hyperzyklizitätskriteriums die Existenz meromorpher translationsuniverseller Funktionen zu beweisen. Genauer gesagt zeigt er, dass Funktionen $\phi \in M(\mathbb{C})$ existieren, so dass die Folge $\{\phi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes Gebiet G dicht in $(M_\infty(G), \rho)$ ist. Insbesondere existiert also zu jeder in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion f eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen, so dass $\{\phi(z+n_k)\}$ auf $\mathbb{C}$ sphärisch kompakt gegen f konvergiert. Auch Chan geht allerdings nicht auf die Approximation auf Vitushkin Mengen ein, obwohl sich aus seinem Ergebnis leicht folgern lässt, dass die Folge $\{\phi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ auf solchen Kompakta universelle Approximationseigenschaften hat. Zudem beachte man, dass Chan lediglich die Existenz bezüglich der natürlichen Zahlen universeller Funktionen beweist, ob dies auch für allgemeine unbeschränkte Folgen gilt, ist hierbei nicht klar.
Unabhängig von den Ergebnissen von Kanatnikov und Chan zeigen Luh, Meyrath und Niess [41] schließlich 2008 durch einen neuen konstruktiven Beweis, dass zu jeder unbeschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ eine Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ existiert, so dass für jedes $K \in \mathcal{V}$ jede Funktion $f \in A(K)$ durch geeignete Teilfolgen von $\{\phi(z+\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ approximiert werden kann. Mittels eines Ergebnisses von Bayart und Grivaux [1] wird zudem gezeigt, dass die Funktion ϕ im Falle $\{\lambda_n\} = \{n\}$ so konstruiert werden kann, dass zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{V}$, zu jeder Funktion $f \in A(K)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen $\{n_k\}$ mit positiver unterer Dichte existiert, so dass $\max_K |\phi(z+n_k) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Außerdem werden Aussagen über die Existenz translationsuniverseller Funktionen in allgemeinen Gebieten gemacht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die einzigen zurzeit bekannten Ergebnisse in Bezug auf universelle meromorphe Funktionen sich mit der Existenz translationsuniverseller Funktionen befassen, weiterführende Resultate sind jedoch nicht bekannt.

So wurden bisher weder die Eigenschaften translationsuniverseller Funktionen studiert, noch wurden meromorphe Funktionen auf andere Universalitäten, wie etwa Streckungs- oder Ableitungsuniversalität untersucht. Vor diesem Hintergrund setzen die Überlegungen der vorliegenden Arbeit an, welche einige offene Fragen aus dem Bereich der universellen meromorphen Approximation beantworten wird. Im folgenden Abschnitt wollen wir genauer auf diese Fragen eingehen und die Gliederung der Arbeit kurz erläutern.

1.5 Gliederung der Arbeit und Hauptergebnisse

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit translationsuniversellen meromorphen Funktionen. Wir führen zunächst zwei Klassen solcher Funktionen ein, anschließend beweisen wir auf verschiedene Arten, dass beide jeweils residuale Teilmengen von $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ sind und zeigen somit insbesondere, dass die Sätze 1.3.1 und 1.3.2 auf den meromorphen Fall erweiterbar sind. Im weiteren Verlauf des Kapitels studieren wir die Eigenschaften translationsuniverseller meromorpher Funktionen, wobei wir uns intensiv mit den Polstellen solcher Funktionen beschäftigen werden. Insbesondere werden wir zeigen, dass die Polstellen gewissermaßen kontrollierbar sind, indem wir translationsuniverselle Funktionen konstruieren, bei denen sowohl die Lage als auch die Ordnung der Polstellen vorgeschrieben werden kann. Interessanterweise werden wir dadurch in der Lage sein, zu beweisen, dass sich die beiden zu Anfang des Kapitels eingeführten Funktionenklassen tatsächlich unterscheiden, und es somit gewissermaßen zwei verschiedene Arten von meromorpher Translationsuniversalität gibt.

Ausgangspunkt für das dritte Kapitel ist der bereits erwähnte Satz von Zappa über die Existenz einer holomorphen streckungsuniversellen Funktion. In den ersten Abschnitten klären wir die Frage nach der Existenz meromorpher streckungsuniverseller Funktionen, wobei wir wiederum die Residualität der entsprechenden Menge erhalten werden, und zeigen somit, dass auch das Ergebnis von Zappa auf den meromorphen Fall erweiterbar ist. Weiterhin erhalten wir die Existenz von Funktionen, welche gleichzeitig translations- und streckungsuniversell sind. Anschließend studieren wir in Analogie zu Kapitel 2 die Eigenschaften streckungsuniverseller Funktionen, wobei sich gewisse Gemeinsamkeiten zu translationsuniversellen Funktionen zeigen werden. Zum Abschluss des Kapitels beschäftigen wir uns mit dem Verhalten meromorpher streckungsuniverseller Funktionen auf allgemeinen unbeschränkten Kurven, wobei wir sehen werden, dass diese Funktionen die Eigenschaft besitzen, auf jeder solchen Kurve jedem Wert beliebig nahe zu kommen.

Im vierten Kapitel behandeln wir meromorphe Funktionen, welche auf beliebigen unbeschränkten Kurven gewisse Universalitätseigenschaften besitzen. Wir konstruieren Funktionen ϕ mit der Eigenschaft, dass zu jeder unbeschränkten Kurve eine Folge $\{z_n\}$ auf dieser Kurve existiert, entlang welcher ϕ eine gewisse Art von Translationsuniversalität besitzt. Genauer gesagt zeigen wir, dass zu jeder Konstanten eine Teilfolge von $\{z_n\}$ existiert, so dass die Folge der Translationen von ϕ bezüglich dieser Teilfolge kompakt in $\mathbb{C}$ gegen diese Konstante konvergiert, wobei wir auch sehen werden, dass ein entsprechendes Ergebnis für nichtkonstante Funktionen im Allgemeinen nicht gültig ist. Insbesondere kann keine Funktion existieren, welche entlang jeder unbeschränkten Kurve translationsuniversell im Sinne von Satz 1.3.2 ist. Ausserdem beweisen wir entsprechende Ergebnisse für Funktionen in allgemeinen einfach zusammenhängenden Gebieten. Als Folgerung aus diesen Sätzen erhalten wir die Existenz meromorpher Funktionen, welche entlang jeder unbeschränkten Kurve sogenannte maximale cluster sets besitzen.

In Kapitel 5 gehen wir der Fragestellung nach, ob in Analogie zum Satz von MacLane auch die Folge der sukzessiven Ableitungen einer meromorphen Funktion über universelle Approximationseigenschaften verfügen kann. Mittels eines klassischen Ergebnisses von Pólya, welches sich mit dem von ihm eingeführten Begriff der *finalen Menge* einer meromorphen Funktion beschäftigt, können wir jedoch beweisen, dass die Existenz einer im Sinne des Satzes von MacLane ableitungsuniversellen meromorphen Funktion auszuschließen ist. Allerdings stellt sich sodann unmittelbar die Frage, ob Ableitungsuniversalität möglich ist, wenn wir uns dabei auf Punkte beschränken, welche in der finalen Menge liegen. Wir werden zunächst zeigen, dass auch in diesem Fall im Allgemeinen kein universelles Verhalten der Ableitungen zu erwarten ist, später dann jedoch eine spezielle Klasse meromorpher Funktionen behandeln, für welche wir positive Ergebnisse beweisen können. Genauer gesagt werden wir zeigen, dass „viele“ Funktionen aus dieser Klasse die Eigenschaft haben, auf „vielen“ kompakten Teilmengen der finalen Menge ableitungsuniversell zu sein.

Kapitel 2

Translationsuniverselle meromorphe Funktionen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit translationsuniversellen meromorphen Funktionen, wobei wir noch definieren werden, was genau darunter zu verstehen ist. Wie in Abschnitt 1.4 bereits erwähnt wurde, konnte die Existenz meromorpher Funktionen, deren Translationen bezüglich einer unbeschränkten Folge universelle Approximationseigenschaften besitzen, bereits auf verschiedene Weise bewiesen werden, dennoch werden wir hier noch einmal darauf eingehen. Wir erläutern zunächst, wie man auf konstruktive Weise die Existenz universeller meromorpher Funktionen nachweisen kann, anschließend geben wir einen neuen, sogenannten generischen Beweis dafür an. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden wir Eigenschaften translationsuniverseller Funktionen studieren, zudem werden wir einige Aussagen über die Polstellen solcher Funktionen machen.

2.1 Konstruktive und generische Existenzbeweise

Wir werden im Folgenden auf verschiedene Arten die Existenz meromorpher translationsuniverseller Funktionen nachweisen. Interessanterweise werden wir dabei sehen, dass die Beweise in gewisser Weise unterschiedliche Funktionen liefern. Zunächst geben wir folgende wichtige Definition an, in welcher wir klären, was unter translationsuniversellen meromorphen Funktionen zu verstehen ist.

Definition 2.1.1. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen.*

(i) Eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ nennen wir $\mathcal{V}$-translationsuniversell (bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$), wenn zu jedem $K \in \mathcal{V}$ und zu jedem $f \in A(K)$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Die Menge aller Funktionen, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$ sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$. Die Menge aller $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$.

(ii) *Eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ nennen wir translationsuniversell (bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$), wenn die Folge $\{\phi(z+\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ ist, d.h. wenn zu jedem $f \in M_\infty(\mathbb{C})$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt*

$$\phi(z+\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Die Menge aller Funktionen, welche translationsuniversell bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$ sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$. Die Menge aller translationsuniversellen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_T$.

Es ist klar, dass sowohl $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ als auch $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_T$ gilt. Zudem beachte man, dass zu jedem $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ (bzw. $\mathcal{U}_T$) eine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ existiert, so dass $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ (bzw. $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$) gilt.
Wir werden uns in diesem Kapitel mit Funktionen aus den Mengen $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{U}_T$ beschäftigen. Insbesondere werden wir sehen, dass sowohl $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \neq \emptyset$ als auch $\mathcal{U}_T \neq \emptyset$ gilt.

2.1.1 Konstruktiver Ansatz

In diesem Abschnitt werden wir auf konstruktive Weise die Existenz meromorpher $\mathcal{V}$-translationsuniverseller Funktionen beweisen, und Satz 1.3.2 auf meromorphe Funktionen und Vitushkin Kompakta erweitern, siehe hierzu auch [41].

Satz 2.1.2. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich $\{\lambda_n\}$ ist. Insbesondere gilt also $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \neq \emptyset$.*

Beweis. Es sei $\{r_n\}$ eine Abzählung der in Definition 1.2.7 eingeführten Menge $\mathcal{R}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass eine Folge paarweise disjunkter, abgeschlossener Kreisscheiben D_n mit Mittelpunkt λ_n und Radius d_n existiert, so dass $d_n < d_{n+1}$ und $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. (Ist dies nicht von vornherein möglich, so wählen wir eine geeignete Teilfolge von $\{\lambda_n\}$).
Wir betrachten nun die abgeschlossene Menge $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ und setzen

$$g(w) := r_n(w - \lambda_n) \quad \text{für } w \in D_n,$$
$$\epsilon(w) := \frac{1}{n} \quad \text{für } w \in D_n.$$

Die Funktion g liegt dann in $M(E)$, weiter ist ϵ aus $H(E)$ mit $\epsilon(w) > 0$. Nach Lemma 1.2.10 existiert eine Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit

$$|g(w) - \phi(w)| < \epsilon(w) \quad \text{für alle } w \in E.$$

Folglich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{D_n} |r_n(w - \lambda_n) - \phi(w)| < \frac{1}{n},$$

woraus wir mit der Substitution $z = w - \lambda_n$ erhalten

$$\max_{\{|z| \leq d_n\}} |r_n(z) - \phi(z + \lambda_n)| < \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Es sei nun K ein Kompaktum aus $\mathcal{V}$ und f eine Funktion aus $A(K)$. Nach Lemma 1.2.8 existiert eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ mit $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und

$$\max_{K} |f(z) - r_{n_k}(z)| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Wegen $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset \{z : |z| \leq d_{n_k}\}$ für alle $k > k_0$ gilt. Somit folgt unter Verwendung von (2.1) und (2.2) für $k > k_0$

$$\begin{aligned}
\max_K |\phi(z + \lambda_{n_k}) - f(z)| &\leq \max_K |\phi(z + \lambda_{n_k}) - r_{n_k}(z)| + \max_K |r_{n_k}(z) - f(z)| \\
&\leq \max_{\{|z| \leq d_{n_k}\}} |\phi(z + \lambda_{n_k}) - r_{n_k}(z)| + \max_K |r_{n_k}(z) - f(z)| \\
&< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $\max_K |\phi(z + \lambda_{n_k}) - f(z)| \to 0$ für $k \to \infty$, und somit die Behauptung.

□

Im nächsten Ergebnis werden wir eine ähnliche Aussage für $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen machen, wie wir in Lemma 1.3.3 für holomorphe Funktionen gemacht haben, und beweisen, dass gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta aus $\mathcal{V}$ eine gewisse Art von kompakter Konvergenz impliziert.

Lemma 2.1.3. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann sind folgende Eigenschaften einer Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ äquivalent:*

(i) Die Funktion ϕ ist $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$.

(ii) Zu jeder Funktion $f \in M(\mathbb{C})$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

wobei P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikation *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Es sei dazu $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft *(ii)*, weiter sei K ein Kompaktum aus $\mathcal{V}$ und f eine beliebige Funktion aus $A(K)$. Nach dem Satz von Vitushkin existiert zu $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion R mit Polen außerhalb von K, so dass gilt

$$\max_K |R(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bezeichnen wir mit P_R die Menge der Polstellen von R, so gilt $K \subset \mathbb{C} \setminus P_R$ und unter Verwendung der Eigenschaft *(ii)* existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_K |\phi(z + \lambda_{n_0}) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $K \in \mathcal{V}$ und $f \in A(K)$ beliebig waren, folgt hieraus die Behauptung.

Zum Nachweis der umgekehrten Implikation betrachten wir ein beliebiges $f \in M(\mathbb{C})$ und bezeichnen mit P_f der Menge der Polstellen von f. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$D_k := \{z : |z| \leq k\}$$

und bezeichnen mit $z_1, \ldots, z_{l_k}$ die Pole von f in D_k. Weiter betrachten wir die Mengen

$$E_i^{(k)} := \left\{ z : |z - z_i| < \frac{1}{k+1} \right\}, \quad i = 1, \ldots, l_k,$$

und setzen schließlich

$$B_k := D_k \setminus \bigcup_{i=1}^{l_k} E_i^{(k)}.$$

Es folgt, dass das Kompaktum B_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{V}$ ist, zudem gilt $P_f \cap B_k = \emptyset$, und somit $f \in A(B_k)$. Nach Voraussetzung folgt also, dass zu jedem (festen) $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{m_j^{(k)}\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt

$$\phi(z + \lambda_{m_j^{(k)}}) \to f(z) \quad \text{gleichmäßig auf } B_k \quad (j \to \infty).$$

Insbesondere können wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $m_{j_k}^{(k)} \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$\max_{B_k} \left| \phi(z + \lambda_{m_{j_k}^{(k)}}) - f(z) \right| < \frac{1}{k}.$$

Beachten wir nun, dass zu jedem Kompaktum $H \subset \mathbb{C} \setminus P_f$ ein $k_H \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $H \subset B_k$ für alle $k > k_H$ ist, so erhalten wir schließlich mit $n_k := m_{j_k}^{(k)}$

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

und somit die Behauptung.

$\square$

Bemerkung 2.1.4. *Falls f eine ganze Funktion ist, und somit $P_f = \emptyset$ gilt, besagt die Eigenschaft (ii) aus obigem Lemma, dass die Folge $\{\phi(z + \lambda_{n_k})\}$ für $k \to \infty$ kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen f konvergiert.*
Ist also $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und ϕ eine bezüglich dieser Folge $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion, so existiert zu jeder ganzen Funktion f eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Meromorphe $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen erfüllen also insbesondere die Eigenschaften (i) und (ii) aus Lemma 1.3.3.

Auch wenn das obige Ergebnis eine gewisse Ähnlichkeit zu Lemma 1.3.3 aufweist, so gibt es hierbei doch einen fundamentalen Unterschied. Würden wir für holomorphe Funktionen entsprechend der Definition 2.1.1 die Begriffe $\mathcal{M}$-translationsuniversell und translationsuniversell einführen, so wären diese gemäß Lemma 1.3.3 äquivalent, so dass diese Unterscheidung im holomorphen Fall keinen Sinn macht. Das obige Lemma besagt jedoch *nicht*, dass für meromorphe Funktionen die Begriffe $\mathcal{V}$-translationsuniversell und translationsuniversell äquivalent sind, und wir werden später sehen, dass dies nicht der Fall ist und tatsächlich $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \neq \mathcal{U}_T$ gilt.

2.1.2 Generischer Ansatz

In diesem Abschnitt wollen wir einen weiteren Beweis für die Existenz universeller meromorpher Funktionen angeben. Im Gegensatz zu dem konstruktiven Beweis aus dem vorigen Abschnitt werden wir hier die sogenannte generische Beweismethode verwenden. Diese hat den Vorteil, dass sie uns eine in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ residuale Menge universeller Funktionen liefert, allerdings ist sie nicht so „durchsichtig“ wie die konstruktive Methode. Zum Beweis unseres Hauptergebnisses über die Existenz translationsuniverseller meromorpher Funktionen werden wir das *Universalitätskriterium* benutzen, welches auf Grosse-Erdmann [21] zurückgeht und auch bei vielen Ergebnissen der universellen holomorphen Approximation eine zentrale Rolle spielt. Zunächst benötigen wir hierzu die folgende Definition.

Definition 2.1.5. *Es seien X und Y metrische Räume und $\{T_n\}$ eine Folge stetiger Abbildungen von X nach Y. Dann heißt $\{T_n\}$ (topologisch) transitiv, falls für alle offenen nichtleeren Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$T_N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Mit dieser Definition lautet das Universalitätskriterium nun wie folgt.

Satz 2.1.6 (**Grosse-Erdmann, 1987**). *Es seien X ein vollständiger metrischer Raum und Y ein separabler metrischer Raum, weiter sei $\{T_n\}$ eine Folge stetiger Abbildungen von X nach Y. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Folge $\{T_n\}$ ist transitiv.

(ii) Es existiert eine dichte Teilmenge $\mathfrak{U}$ von X, so dass für jedes $x \in \mathfrak{U}$ gilt

$$\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist dicht in } Y. \tag{2.3}$$

Falls eine der beiden Bedingungen erfüllt ist, so ist die Menge aller $x \in X$, für welche (2.3) gilt, residual in X.

Mit diesem Hilfsmittel können wir die Existenz universeller meromorpher Funktionen beweisen, wobei wir im Gegensatz zu Satz 2.1.2 nun translationsuniverselle Funktionen erhalten werden. Zudem werden wir sehen, dass die Menge dieser Funktionen eine in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ residuale Menge darstellt.

Satz 2.1.7. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann ist die Menge $\mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$, insbesondere gilt also $\mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir setzen $X = Y = (M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$. Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 1.2.2 ist X dann vollständig und Y separabel. Wir betrachten nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $T_n : X \to Y$ mit $T_n\phi(z) := \phi(z + \lambda_n)$ und zeigen zunächst, dass T_n für jedes n stetig ist. Es sei dazu $n \in \mathbb{N}$ fest, und $\{f_k\}$ eine Folge in $M_\infty(\mathbb{C})$ mit $\rho(f_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$ und ein $f \in M_\infty(\mathbb{C})$. Ferner sei $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Kompaktum und es sei $\tilde{K} := K + \lambda_n = \{w : w = z + \lambda_n, z \in K\}$. Wegen $\rho(f_k, f) \to 0$ folgt aus Lemma 1.2.22

$$f_k(w) \to f(w) \quad \text{sphärisch gleichmäßig auf } \tilde{K} \quad (k \to \infty),$$

woraus wir mit der Substitution $z = w - \lambda_n$ erhalten

$$f_k(z + \lambda_n) \to f(z + \lambda_n) \quad \text{sphärisch gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Da K beliebig war, folgt die sphärisch kompakte Konvergenz von $f_k(z + \lambda_n) = T_n f_k(z)$ auf $\mathbb{C}$ gegen $f(z + \lambda_n) = T_n f(z)$, so dass wir mit Lemma 1.2.22 erhalten

$$\rho(T_n f_k, T_n f) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von T_n.
Nach Satz 2.1.6 bleibt die Transitivität der Folge $\{T_n\}$ zu zeigen. Es seien dazu U und V zwei offene, nichtleere Teilmengen von $M_\infty(\mathbb{C})$, weiter seien $f \in U$ und $g \in V$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(f) \subset U$ und $V_\varepsilon(g) \subset V$ gilt, wobei $U_\varepsilon(f)$ und $V_\varepsilon(g)$ die

ε-Umgebungen von f und g sind. Nach Lemma 1.2.21 existiert nun eine abgeschlossene Kreisscheibe K mit Mittelpunkt 0 und ein $\delta > 0$, so dass für $h \in M_\infty(\mathbb{C})$ gilt

$$\max_K d(f(z), h(z)) < \delta \text{ impliziert } \rho(f,h) < \varepsilon, \text{ und somit } h \in U_\varepsilon(f) \subset U, \quad \text{sowie}$$
$$\max_K d(g(z), h(z)) < \delta \text{ impliziert } \rho(g,h) < \varepsilon, \text{ und somit } h \in V_\varepsilon(g) \subset V.$$

Da $\{\lambda_n\}$ unbeschränkt ist, können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $K \cap (K + \lambda_{n_0}) = \emptyset$ gilt. Auf der kompakten Menge $K \cup (K + \lambda_{n_0})$ definieren wir folgende Funktion

$$j(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in K, \\ g(z - \lambda_{n_0}) & \text{für } z \in K + \lambda_{n_0}. \end{cases}$$

Es folgt $j \in M(K \cup (K + \lambda_{n_0}))$, so dass nach dem Satz von Runge eine rationale Funktion $r \in M_\infty(\mathbb{C})$ existiert mit

$$\max_K d(f(z), r(z)) < \delta \quad \text{und} \quad \max_{K+\lambda_{n_0}} d(g(z - \lambda_{n_0}), r(z)) < \delta.$$

Durch die Substitution $w = z - \lambda_{n_0}$ erhalten wir hieraus

$$\max_K d(f(z), r(z)) < \delta \quad \text{und} \quad \max_K d(g(w), r(w + \lambda_{n_0})) = \max_K d(g(w), T_{n_0} r(w)) < \delta,$$

so dass schließlich folgt

$$r \in U \quad \text{und} \quad T_{n_0} r \in V.$$

Folglich gilt $T_{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$, woraus mit dem Universalitätskriterium die Behauptung folgt.

□

Somit ist gezeigt, dass die Menge $\mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\})$ der bezüglich einer unbeschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ translationsuniversellen Funktionen residual, und somit insbesondere nichtleer ist. Nach Definition von $\mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\})$ ist für jedes $\phi \in \mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\})$ die Folge $\{\phi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$. Hieraus können wir nun leicht folgern, dass $\{\phi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ auch für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ dicht in $(M_\infty(G), \rho)$ liegt.

Korollar 2.1.8. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann liegt die Folge $\{\phi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $\phi \in \mathfrak{U}_T(\{\lambda_n\})$ dicht in $(M_\infty(G), \rho)$, das heißt zu jedem $f \in M_\infty(G)$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{sphärisch kompakt auf } G \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset G$ ein beliebiges Kompaktum und f eine beliebige Funktion aus $M_\infty(G)$. Weiter sei ϕ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$. Nach dem Satz von Runge existiert eine Folge $\{r_k\}$ rationaler Funktionen mit

$$\max_K d(r_k(z), f(z)) < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da hierbei jedes $r_k \in M_\infty(\mathbb{C})$ ist, existiert nach Definition von $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_j^{(k)}\}$ mit

$$\max_K d(\phi(z + \lambda_{n_j^{(k)}}), r_k(z)) < \frac{1}{j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Schließlich wählen wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in \mathbb{N}$ mit $j_k > j_{k-1}$, so dass die Folge $\{m_k\}$ mit $m_k := n_{j_k}^{(k)}$ monoton wachsend ist und erhalten insgesamt für jedes k

$$\max_K d(\phi(z + \lambda_{m_k}), f(z)) \le \max_K d(\phi(z + \lambda_{m_k}), r_k(z)) + \max_K d(r_k(z), f(z)) < \frac{1}{j_k} + \frac{1}{k}.$$

Daher gilt $\max_K d(\phi(z + \lambda_{m_k}), f(z)) \to 0$ für $k \to \infty$ und somit die Behauptung.

□

Bemerkung 2.1.9. *Das obige Ergebnis ist eine Erweiterung des bereits erwähnten Resultates von Chan, welches wir im Fall $\{\lambda_n\} = \{n\}$ erhalten.*

Wie bereits angedeutet, werden wir später in der Lage sein, zu zeigen, dass die Mengen $\mathcal{U}_T$ und $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ nicht übereinstimmen. Wir können jedoch leicht zeigen, dass zumindest $\mathcal{U}_T \subset \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ gilt.

Lemma 2.1.10. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann gilt $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$. Insbesondere gilt also $\mathcal{U}_T \subset \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$.*

Beweis. Es sei $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ eine beliebige Funktion, wir zeigen dass dann $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ folgt. Nach Definition 2.1.1 existiert zu jeder Funktion $f \in M(\mathbb{C})$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Hieraus folgt mit Satz 1.2.17 unmittelbar

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

wobei P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnet. Da $f \in M(\mathbb{C})$ beliebig war, ist dies nach Lemma 2.1.3 äquivalent dazu, dass $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ gilt.

□

Als unmittelbare Folgerung hieraus erhalten wir eine Erweiterung von Satz 2.1.2.

Satz 2.1.11. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann ist die Menge $\mathcal{U}_T^{\chi}(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$.*

Beweis. Gemäß Satz 2.1.7 ist die Menge $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$. Da nach Lemma 2.1.10 gilt $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_T^{\chi}(\{\lambda_n\})$, folgt die Behauptung. □

2.1.3 Ein weiterer Existenzbeweis

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einen weiteren Beweis für die Existenz translationsuniverseller meromorpher Funktionen angeben, welcher sich allerdings erheblich von den bisherigen unterscheidet. Unter Verwendung eines Ergebnisses von Bès und Peris [4] werden wir auf äußerst einfache Weise zeigen, dass die Menge $\mathcal{U}_T(\{n\})$ nicht leer ist, dass also eine bezüglich der natürlichen Zahlen translationsuniverselle Funktion existiert. Wir benötigen hierzu das folgende Ergebnis aus [4].

Satz 2.1.12. *Es existiert ein Paar ganzer Funktionen $(F, G) \in H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C})$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jedem Paar $(f, g) \in H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C})$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\begin{aligned} F(z + n_k) &\to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty) \quad \textit{und} \\ G(z + n_k) &\to g(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Hiermit können wir nun leicht die Existenz einer translationsuniversellen meromorphen Funktion beweisen.

Satz 2.1.13. *Es gilt $\mathcal{U}_T(\{n\}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir betrachten die meromorphe Funktion $\phi(z) := \frac{F(z)}{G(z)}$, wobei F und G die ganzen Funktionen aus Satz 2.1.12 sind. Wir wollen zeigen, dass die Folge $\{\phi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ liegt. Es sei dazu zunächst $f \in M(\mathbb{C})$ eine beliebige meromorphe Funktion. Dann existieren ganze Funktionen φ_1 und φ_2, welche keine gemeinsamen Nullstellen haben, so dass $f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ gilt. Nach Satz 2.1.12 existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\begin{aligned} F(z + n_k) &\to \varphi_1(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty) \quad \text{und} \\ G(z + n_k) &\to \varphi_2(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich

$$F(z+n_k) \to \varphi_1(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty),$$

und wegen Satz 1.2.18 auch

$$\frac{1}{G(z+n_k)} \to \frac{1}{\varphi_2(z)} \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Da die beiden Funktionen φ_1 und φ_2 keine gemeinsamen Nullstellen haben, folgt hieraus schließlich

$$\phi(z+n_k) = \frac{F(z+n_k)}{G(z+n_k)} \to \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = f(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Da $f \in M(\mathbb{C})$ beliebig war, ist die Folge $\{\phi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $(M(\mathbb{C}), \rho)$, und somit auch in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$.

□

Bemerkung 2.1.14. *Mit dem gleichen Beweis wie zu Korollar 2.1.8 folgt, dass die in obigem Beweis konstruierte Funktion ϕ auch die Eigenschaft hat, dass die Folge $\{\phi(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ dicht in $(M_\infty(G), \rho)$ liegt.*

2.2 Eigenschaften translationsuniverseller Funktionen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die Existenz zweier Klassen translationsuniverseller meromorpher Funktionen bewiesen haben, und sogar die Residualität der entsprechenden Mengen zeigen konnten, wollen wir nun die Eigenschaften solcher Funktionen studieren. Hierbei können wir uns oftmals auf $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen beschränken, da nach Lemma 2.1.10 klar ist, dass die entsprechenden Aussagen dann auch für translationsuniverselle Funktionen gelten.

Beachtet man, dass aus elementaren Eigenschaften der AC Kapazität folgt, dass mit $K \in \mathcal{V}$ auch stets $K + z_0 = \{w : w = z + z_0, z \in K\}$ eine Vitushkin Menge ist, so erhalten wir leicht das folgende Resultat.

Lemma 2.2.1. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt.*

(i) Ist $\phi_1 \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, so gilt auch $\phi_1(\cdot + z_0) \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$.

(ii) Ist $\phi_2 \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$, so gilt auch $\phi_2(\cdot + z_0) \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$.

Beweis. Es seien K_1 und K_2 kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $K_1 \in \mathcal{V}$, weiter seien $f_1 \in A(K_1)$ und $f_2 \in M_\infty(\mathbb{C})$. Wir setzen

$$\tilde{K}_1 := z_0 + K_1 \quad \text{und} \quad g_1(z) := f_1(z - z_0),$$

sowie

$$\tilde{K}_2 := z_0 + K_2 \quad \text{und} \quad g_2(z) := f_2(z - z_0).$$

Es folgt zunächst $\tilde{K}_1 \in \mathcal{V}$ und $g_1 \in A(\tilde{K}_1)$, so dass nach Voraussetzung zu $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\max_{\tilde{K}_1} |\phi_1(w + \lambda_{N_1}) - g_1(w)| < \varepsilon.$$

Mit der Substitution $z = w - z_0$ folgt hieraus

$$\max_{K_1} |\phi_1(z + z_0 + \lambda_{N_1}) - g_1(z + z_0)| < \varepsilon,$$

und somit wegen $g_1(z + z_0) = f_1(z)$ die erste Behauptung.

Weiter existiert nach Voraussetzung zu $\varepsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{\tilde{K}_2} d(\phi_2(w + \lambda_{N_2}), g_2(w)) < \varepsilon,$$

woraus auf die gleiche Weise mit der Substitution $z = w - z_0$ wegen $g_2(z + z_0) = f_2(z)$ die zweite Behauptung folgt.

$\square$

Weiterhin können wir auf einfache Weise zeigen, dass mit ϕ auch die Funktion $\frac{1}{\phi}$ über gewisse Universalitätseigenschaften verfügt.

Lemma 2.2.2. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen, weiter seien $\phi_1 \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ und $\phi_2 \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $K \in \mathcal{V}$ und zu jedem $f \in A(K)$ mit $f(z) \neq 0$ auf K existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen, so dass gilt

$$\frac{1}{\phi_1(z + \lambda_{n_k})} \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

(ii) Es gilt $\frac{1}{\phi_2} \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$.

Beweis. Zum Nachweis der ersten Aussage seien ein $K \in \mathcal{V}$, ein $f \in A(K)$ mit $f(z) \neq 0$ auf K, und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Setzen wir $g(z) := \frac{1}{f(z)}$, so erhalten wir $g \in A(K)$ mit

$m_g := \min_K |g(z)| > 0$. Nach Voraussetzung existiert nun zu $\delta := \min\left\{\frac{m_g}{2}, \varepsilon\,\frac{m_g^2}{2}\right\}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_K |\phi_1(z + \lambda_{n_0}) - g(z)| < \delta.$$

Wegen $\max_K |\phi_1(z + \lambda_{n_0}) - g(z)| < \frac{m_g}{2}$ folgt hieraus zunächst

$$\min_K |\phi_1(z + \lambda_{n_0})| \geq \frac{m_g}{2} > 0,$$

so dass wir für jedes $z \in K$ erhalten

$$\left|\frac{1}{\phi_1(z + \lambda_{n_0})} - \frac{1}{g(z)}\right| = \frac{|g(z) - \phi_1(z + \lambda_{n_0})|}{|g(z)|\ |\phi_1(z + \lambda_{n_0})|} \leq \frac{2}{m_g^2}\ |g(z) - \phi_1(z + \lambda_{n_0})| < \varepsilon.$$

Schließlich folgt $\max_K \left|\frac{1}{\phi_1(z+\lambda_{n_0})} - \frac{1}{g(z)}\right| < \varepsilon$, und somit wegen $\frac{1}{g} = f$ die Behauptung.

Zum Nachweis der zweiten Aussage seien ein beliebiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ und ein $f \in M_\infty(\mathbb{C})$ gegeben. Dann ist die Funktion $g := \frac{1}{f}$ ebenfalls aus $M_\infty(\mathbb{C})$, so dass wegen $\phi_2 \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ existiert mit

$$\max_K d(\phi_2(z + \lambda_{n_k}), g(z)) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wegen $d(z_1, z_2) = d(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$ folgt hieraus

$$\max_K d\left(\frac{1}{\phi_2(z + \lambda_{n_k})}, \frac{1}{g(z)}\right) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

und somit wegen $\frac{1}{g} = f$ die Behauptung.

□

Wir wollen jetzt auf die Frage eingehen, ob meromorphe Translationsuniversalität sich auf Ableitungen überträgt. Im holomorphen Fall lässt sich leicht zeigen, dass jede Ableitung einer translationsuniversellen Funktion ihrerseits auch universell ist. Das folgende Lemma wird zeigen, dass diese Aussage für meromorphe Funktionen nicht gültig ist.

Lemma 2.2.3. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen, weiter sei $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion. Dann gilt:*

(i) Die Funktion ϕ' ist nicht $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich $\{\lambda_n\}$, es gilt also $\phi' \notin \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$.

(ii) Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi^{(j)}(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage *(i)*. Dazu setzen wir $K := \{z : |z| = 1\}$ und betrachten die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$. Offenbar gilt dann $K \in \mathcal{V}$ und $f \in A(K)$. Nehmen wir nun an, die meromorphe Funktion ϕ' wäre $\mathcal{V}$-translationsuniversell, so erhalten wir die Existenz einer Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi'(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz folgt hieraus

$$\int\limits_{|z|=1} \phi'(z + \lambda_{n_k})\, dz \to \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \quad (k \to \infty).$$

Nach dem Residuensatz ist das linke Integral hierbei für jedes k gleich dem $2\pi i$-fachen der Summe der Residuen von $\phi'(z + \lambda_{n_k})$ an den Polstellen in $\{|z| < 1\}$. Da $\phi'(z + \lambda_{n_k})$ für jedes k die Ableitung der meromorphen Funktion $\varphi_k(z) := \phi(z + \lambda_{n_k})$ darstellt, sind alle Residuen von $\phi'(z+\lambda_{n_k})$ gleich 0, so dass der Wert dieses Integrals für jedes k gleich 0 ist und wir einen Widerspruch erhalten.

Zum Nachweis von *(ii)* sei ein $j \in \mathbb{N}_0$, ein Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und eine Funktion $f \in A(K)$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom p mit

$$\max_K |p(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Es sei nun P eine Stammfunktion der Ordnung j von p, das heißt $P^{(j)}(z) = p(z)$. Weiter wählen wir ein Kompaktum $H \in \mathcal{M}$, welches $K \subset H^\circ$ erfüllt. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $\{n_k\}$ mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to P(z) \quad \text{gleichmäßig auf } H \quad (k \to \infty),$$

woraus die kompakte Konvergenz in H° folgt. Da diese Konvergenz sich auf alle Ableitungen überträgt folgt schließlich, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\max_K \left|\phi^{(j)}(z + \lambda_N) - p(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus mit (2.4) die Behauptung folgt.

$\square$

Bemerkung 2.2.4.

(i) Aus der ersten Aussage können wir folgern, dass aus $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ stets $\phi' \notin \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ folgt. Weiter hat der Beweis verdeutlicht, dass sogar $\phi' \notin \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ gilt, d.h. die Funktion ϕ' kann bezüglich keiner unbeschränkten Folge $\mathcal{V}$-translationsuniversell sein.

(ii) *Nach Lemma 1.3.3 ist die zweite Aussage äquivalent dazu, dass zu jedem* $j \in \mathbb{N}_0$ *und zu jeder ganzen Funktion* f *eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen existiert mit*

$$\phi^{(j)}(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

(iii) *Die zweite Aussage zeigt, dass auch die Ableitungen meromorpher* $\mathcal{V}$*-translationsuniverseller Funktionen* ϕ *über gewisse universelle Approximationseigenschaften verfügen, allerdings geht die Möglichkeit der universellen Approximation auf Kompakta* $K \in \mathcal{V}$ *beim Übergang von* ϕ *zu* $\phi^{(j)}$ *verloren. Der obige Beweis der zweiten Aussage hat allerdings verdeutlicht, dass es durchaus möglich ist, gewisse Funktionen auf* $K \in \mathcal{V}$ *durch Translationen von* $\phi^{(j)}$ *zu approximieren. Ist nämlich* $f \in A(K)$ *derart, dass eine Approximation von* f *auf* K *durch rationale Funktionen möglich ist, welche in* $\mathbb{C}$ *eine Stammfunktion (der Ordnung* j*) besitzen, so kann mit der gleichen Argumentation wie beim Beweis von (ii) gezeigt werden, dass die Folge* $\{\phi^{(j)}(z + \lambda_{n_k})\}$ *auf* K *gegen* f *konvergiert. Klar ist aber, dass auf* $K \in \mathcal{V}$ *mit* $K \notin \mathcal{M}$ *nie alle Funktionen aus* $A(K)$ *durch Translationen von* ϕ' *approximiert werden können, da in einem solchen Fall stets Funktionen aus* $A(K)$ *existieren, welche nur durch Funktionen approximierbar sind, deren Residuen nicht alle gleich* 0 *sind, und welche somit in* $\mathbb{C}$ *keine Stammfunktion besitzen. Dass die Universalität von* ϕ *beim Übergang zu* $\phi^{(j)}$ *erhalten bleibt wenn man sich auf Kompakta* $K \in \mathcal{M}$ *beschränkt, liegt also im Wesentlichen daran, dass nach dem Satz von Mergelian in diesem Fall jedes* $f \in A(K)$ *durch Polynome, und somit durch Funktionen, welche in* $\mathbb{C}$ *eine Stammfunktion der Ordnung* j *besitzen, approximiert werden kann.*

(iv) *Schließlich sei noch bemerkt, dass bei einer* $\mathcal{V}$*-translationsuniversellen meromorphen Funktion* ϕ *offenbar nie alle Residuen gleich* 0 *sein können. Insbesondere kann zu einer solchen Funktion also in* $\mathbb{C}$ *keine Stammfunktion existieren.*

In den Arbeiten von Luh [36] und Grosse-Erdmann [21] wird die Existenz „holomorpher Monster“ bewiesen, dies sind translationsuniverselle holomorphe Funktionen φ mit der Eigenschaft, dass Ableitungen beliebiger Ordnung und gleichzeitig Stammfunktionen beliebiger Ordnung von φ ihrerseits auch translationsuniversell sind. Nach obigem Lemma und der anschließenden Bemerkung ist klar, dass ein solches Ergebnis im meromorphen Fall nicht gelten kann, da einerseits die Ableitungen universeller meromorpher Funktionen nicht mehr universell sind, und andererseits Stammfunktionen noch nicht einmal existieren. Die Existenz „meromorpher Monster“ ist folglich ausgeschlossen.

Im Folgenden werden wir weitere Aussagen über die Werteverteilung meromorpher translationsuniverseller Funktionen zusammenstellen. Dazu führen wir zunächst die folgende Definition ein.

Definition 2.2.5. *Es sei $\{f_n\}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ meromorpher Funktionen und $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt w-Stellenhäufungspunkt von $\{f_n\}$, wenn zu jeder Umgebung U von z_0 unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $w \in f_n(U)$ existieren. Wir schreiben $H_w(\{f_n\})$ für die Menge aller w-Stellenhäufungspunkte von $\{f_n\}$.*
In den Sonderfällen $w = 0$ und $w = \infty$ bezeichnen wir die entsprechenden Mengen auch als die Menge der Nullstellen- bzw. die Menge der Polstellenhäufungspunkte von $\{f_n\}$.

Bemerkung 2.2.6.

(i) *Offenbar liegt ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann in $H_w(\{f_n\})$, wenn eine Folge $\{z_k\}$ in $\mathbb{C}$ mit $z_k \to z_0$ und eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ mit $n_k \to \infty$ existieren, so dass $f_{n_k}(z_k) = w$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Man beachte, dass hierbei nicht $z_k \neq z_0$ gefordert wird, somit gilt $z_0 \in H_w(\{f_n\})$ auch dann, wenn für eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ mit $n_k \to \infty$ gilt $f_{n_k}(z_0) = w$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere muss daher die Menge der w-Stellenhäufungspunkte einer Folge $\{f_n\}$ nicht mit der Menge der Häufungspunkte von $\{z : f_n(z) = w$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ übereinstimmen.*

(ii) *Weiter ist klar, dass $H_w(\{f_n\})$ stets eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.*

Im nächsten Satz wollen wir die Struktur der Menge $H_w(\{f_n\})$ untersuchen, wenn wir Folgen $\{f_n\} = \{\phi(\cdot + \lambda_n)\}$ betrachten, wobei $\phi \in M(\mathbb{C})$ translationsuniversell ist. Wir werden sehen, dass solche Funktionenfolgen in gewisser Weise eine „universelle Verteilung von Häufungspunkten" besitzen.

Satz 2.2.7. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion. Dann existiert zu jedem $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ und zu jeder abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{C}$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit*

$$H_w(\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E.$$

Beweis. Im Fall $E = \emptyset$ ist die Aussage klar. Es sei also $\emptyset \neq E \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge und es sei $m_E := \inf\{|z| : z \in E\}$. Wir werden im Folgenden zu $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ eine streng monoton wachsende Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen konstruieren, so dass $H_w(\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E$ gilt. Dazu setzen wir $n_1 := 1$ und nehmen an, dass für ein $k \geq 2$ die Zahlen $n_1, \ldots, n_{k-1}$ bereits bekannt sind. Wir betrachten die Menge

$$D_k := \{z : |z| \leq m_E + k\},$$

welche offenbar ein Kompaktum aus $\mathcal{M}$ ist und $E \cap D_k \neq \emptyset$ erfüllt. Wir überdecken die kompakte Menge $E \cap D_k$ mit einer endlichen Anzahl offener Kreise $U_{k1}, \ldots, U_{kv_k}$ mit Radius $\frac{1}{k+1}$, so dass $U_{kj} \cap (E \cap D_k) \neq \emptyset$ für alle $j \in \{1, \ldots, v_k\}$ gilt, und wählen paarweise verschiedene Punkte $z_{kj} \in U_{kj}$, wobei $j = 1, \ldots, v_k$.

(i) Wir betrachten nun zunächst den Fall $w \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Funktionen

$$P_k(z) := \prod_{j=1}^{v_k}(z - z_{kj}) \qquad \text{und} \qquad p_k(z) := P_k(z) + w,$$

diese sind offensichtlich Polynome, welche in $\mathbb{C}$ exakt die Punkte $z_{k1}, \ldots, z_{kv_k}$ als Null- bzw. als w-Stellen haben. Nach Konstruktion sind diese Punkte alle im Inneren der Menge D_{k+1} enthalten. Wegen $D_{k+1} \in \mathcal{M}$ und $p_k \in A(D_{k+1})$ existiert nach Voraussetzung eine Folge $\{m_l\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z + \lambda_{m_l}) \to p_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D_{k+1} \quad (l \to \infty),$$

und somit auch

$$\varphi(z + \lambda_{m_l}) - w \to P_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D_{k+1} \quad (l \to \infty). \tag{2.5}$$

Wir setzen

$$\varepsilon_k := \min\Big\{ \min_{\substack{1 \le i,j \le v_k \\ i \ne j}} |z_{ki} - z_{kj}|\,, \, \frac{4}{k+1} \Big\}.$$

Aus den Sätzen von Hurwitz und Rouché folgt, dass ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $l > l_0$ die Funktion $\phi(z + \lambda_{m_l})$ in D_{k+1} an exakt v_k Punkten $\zeta_{k1}^{(l)}, \ldots, \zeta_{kv_k}^{(l)}$ eine w-Stelle besitzt, für welche gilt

$$\max_{j=1,\ldots,v_k} \left| z_{kj} - \zeta_{kj}^{(l)} \right| < \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Schließlich wählen wir ein festes $l(k) > l_0$ mit $m_{l(k)} > n_{k-1}$ und setzen $n_k := m_{l(k)}$. Auf diese Weise erhalten wir unsere Folge $\{n_k\}$.

Es sei nun $z_0 \in E$ ein beliebiger Punkt und es bezeichne $U_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\}$ die δ-Umgebung von z_0. Gemäß obiger Konstruktion der Folge $\{n_k\}$ hat die Funktion $\phi(z + \lambda_{n_k})$ für jedes $k > |z_0| - m_E$ eine w-Stelle in $U_{\frac{2}{k+1} + \frac{\varepsilon_k}{2}}(z_0) \subset U_{\frac{4}{k+1}}(z_0)$. Hieraus folgt, dass der Punkt z_0 ein w-Stellenhäufungspunkt der Folge $\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ ist, und da $z_0 \in E$ beliebig war, erhalten wir

$$E \subset H_w(\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}). \tag{2.6}$$

Ist nun $z_1 \in E^c$ ein beliebiger Punkt und $\delta := \frac{\operatorname{dist}(z_1, E)}{2} > 0$, so gilt wiederum nach Konstruktion von $\{n_k\}$, dass $\phi(z + \lambda_{n_k})$ für jedes $k > \max\{\frac{4}{\delta}, |z_1| - m_E\}$ keine w-Stelle in $U_\delta(z_1)$ hat. Somit ist z_1 kein w-Stellenhäufungspunkt der Folge $\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$, und wir erhalten

$$E \supset H_w(\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}). \tag{2.7}$$

Aus (2.6) und (2.7) folgt die Behauptung für $w \in \mathbb{C}$.

(ii) Zum Nachweis der Aussage im Fall $w = \infty$ betrachten wir die rationale Funktion $R_k(z) := \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{z-z_{kj}}$, die in $\mathbb{C}$ exakt die Punkte $z_{k1}, \ldots, z_{kv_k}$ als Polstellen hat, welche nach Konstruktion alle im Inneren von D_{k+1} enthalten sind. Wir setzen wieder

$$\varepsilon_k := \min\Big\{ \min_{\substack{1\le i,j\le v_k \\ i\neq j}} |z_{ki} - z_{kj}|\,,\ \frac{4}{k+1} \Big\},$$

und definieren für $j = 1, \ldots, v_k$ die folgenden Mengen

$$B_j^k := \left\{ z : |z - z_{kj}| < \frac{\varepsilon_k}{4} \right\},$$

welche offenbar $B_j^k \cap B_i^k = \emptyset$ für $j \neq i$ erfüllen, zudem beachte man, dass $B_j^k \subset D_{k+1}$ für $j = 1, \ldots, v_k$ gilt. Schließlich setzen wir $C_k := D_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{v_k} B_j^k$. Es folgt $C_k \in \mathcal{V}$ und $R_k \in A(C_k)$, so dass nach Voraussetzung eine Folge $\{m_l\}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\phi(z + \lambda_{m_l}) \to R_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } C_k \quad (l \to \infty).$$

Insbesondere erhalten wir für jedes (feste) $j \in \{1, \ldots, v_k\}$

$$\phi(z + \lambda_{m_l}) \to R_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } \partial B_j^k = \left\{ z : |z - z_{kj}| = \frac{\varepsilon_k}{4} \right\} \quad (l \to \infty),$$

und somit auch

$$\int\limits_{\partial B_j^k} \phi(z + \lambda_{m_l})\, dz \to \int\limits_{\partial B_j^k} R_k(z)\, dz = \sum_{p=1}^{v_k} \int\limits_{\partial B_j^k} \frac{1}{z - z_{kp}}\, dz = \int\limits_{\partial B_j^k} \frac{1}{z - z_{kj}} = 2\pi\, i \quad (l \to \infty).$$

Hieraus folgt, dass zu jedem $j \in \{1, \ldots, v_k\}$ ein $l_j \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\phi(z + \lambda_{m_l})$ für jedes $l > l_j$ eine Polstelle in $\{z : |z - z_{kj}| < \frac{\varepsilon_k}{4}\}$ hat. Folglich existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\phi(z+\lambda_{m_l})$ für jedes $l > l_0$ und für jedes $j \in \{1, \ldots, v_k\}$ (mindestens) eine Polstelle in B_j^k, und keine Polstelle in C_k hat. Schließlich wählen wir ein festes $l(k) > l_0$ mit $m_{l(k)} > n_{k-1}$ und setzen $n_k := m_{l(k)}$. Auf diese Weise erhalten wir unsere Folge $\{n_k\}$. Der Nachweis, dass für diese Folge $H_\infty(\{\phi(z + \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E$ gilt, erfolgt auf analoge Weise wie im Fall $w \in \mathbb{C}$.

□

Bemerkung 2.2.8.

(i) Ist also ϕ eine translationsuniverselle Funktion, so besitzt die Funktionenfolge $\{\phi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ gewissermaßen eine universelle Verteilung von w-Stellenhäufungspunkten, da zu jeder vorgegebenen abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{C}$ eine Teilfolge existiert, deren Menge der w-Stellenhäufungspunkte mit E übereinstimmt. Diese Art der Universalität wurde erstmals von Gehlen und Luh untersucht, welche in [17] Potenzreihen konstruierten, so dass die Folge ihrer Teilsummen eine universelle Verteilung von Nullstellenhäufungspunkten in obigem Sinne besitzt. Dieses Ergebnis wurde später von Gehlen [16] noch erweitert.

(ii) *Der obige Beweis hat verdeutlicht, dass das Ergebnis keineswegs auf $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen beschränkt ist. Insbesondere haben wir im Fall $w \in \mathbb{C}$ lediglich benötigt, dass mit der Folge $\{\phi(z+\lambda_n)\}$ gewisse Polynome auf kompakten Mengen $K \in \mathcal{M}$ approximiert werden können. In diesem Fall bleibt das Ergebnis also insbesondere für jede Funktionenfolge $\{f_n\}$ richtig, welche auf $K \in \mathcal{M}$ jedes $f \in A(K)$ approximieren kann.*

Satz 2.2.9. *Es sei $\{f_n\}$ ein Folge von Funktionen, so dass zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ eine Folge $\{m_k\}$ natürlicher Zahlen mit $f_{m_k}(z) \to f(z)$ gleichmäßig auf K für $k \to \infty$ existiert. Dann existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und zu jeder abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{C}$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit*

$$H_w(\{f_{n_k}(z) : k \in \mathbb{N}\}) = E.$$

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass das Ergebnis (im Fall $w \in \mathbb{C}$) auch für holomorphe translationsuniverselle Funktionen gilt. Zudem ist klar, dass Satz 2.2.7 auch für jede Ableitung von ϕ richtig bleibt. Im Fall $w \in \mathbb{C}$ folgt dies aus Satz 2.2.9, da die Folge $\{\phi^{(j)}(z+\lambda_n)\}$ nach Lemma 2.2.3 für jedes $j \in \mathbb{N}$ die benötigten Voraussetzungen erfüllt. Für den Fall $w = \infty$ beachte man, dass die Polstellenmenge von $\phi^{(j)}$ mit der Polstellenmenge von ϕ übereinstimmt, somit gilt die Aussage auch im Fall $w = \infty$ für $\phi^{(j)}$.

Mit Hilfe von Satz 2.2.7 können wir nun leicht weitere Aussagen über die Werteverteilung translationsuniverseller Funktionen machen.

Korollar 2.2.10. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion. Ferner sei $j \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann gilt:*

(i) *Es ist $H_w(\{\phi^{(j)}(z+\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{C}$ für alle $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.*

(ii) *Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt die Menge $\{\phi^{(j)}(z_0+\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{C}$.*

(iii) *Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi^{(j)}(z+\lambda_n) : z \in U_\varepsilon(z_0)\} = \widetilde{\mathbb{C}}.$$

(iv) *Die Funktion $\phi^{(j)}$ nimmt jedes $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ an abzählbar vielen Stellen als Funktionswert an.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.2.7 und Bemerkung 2.2.8, wenn wir $E = \mathbb{C}$ setzen.
Die zweite Aussage folgt aus der Approximationseigenschaft von $\phi^{(j)}$. Ist nämlich $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt und $\zeta \in \mathbb{C}$, so setzen wir $K := \{z_0\}$ und $f(z) \equiv \zeta$. Dann gilt $K \in \mathcal{M}$ und $f \in A(K)$, so dass wegen Lemma 2.2.3 eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert mit $\phi^{(j)}(z + \lambda_{n_k}) \to f(z)$ gleichmäßig auf K. Das bedeutet aber $\phi^{(j)}(z_0 + \lambda_{n_k}) \to \zeta$ und da ζ beliebig war, folgt die Behauptung.
Zum Nachweis der dritten Aussage sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ beliebig. Nach Aussage *(i)* gilt $z_0 \in H_w(\{\phi^{(j)}(z + \lambda_n)\})$, so dass eine Folge $\{\zeta_k\}$ in $U_\varepsilon(z_0)$ mit $\zeta_k \to z_0$ und eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existieren mit $\phi^{(j)}(\zeta_k + \lambda_{n_k}) = w$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da hierbei für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $(\zeta_k + \lambda_{n_k}) \in U_\varepsilon(z_0 + \lambda_{n_k})$ folgt die Behauptung *(iii)*. Weiter beachte man, dass offenbar $\phi^{(j)}(z) = w$ für alle $z \in \{z : z = \zeta_k + \lambda_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ gilt, und da diese Menge wegen der Beschränktheit der Folge $\{\zeta_k\}$ und der Unbeschränktheit der Folge $\{\lambda_{n_k}\}$ abzählbar ist, folgt die vierte Aussage.

□

Bemerkung 2.2.11.

(i) Die zweite Aussage des obigen Korollars bedeutet, dass $\{\phi^{(j)}(z_0 + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *jedem Wert aus* $\mathbb{C}$ *beliebig nahe kommt. Betrachten wir nun eine beliebig kleine Umgebung* $U_\varepsilon(z_0)$ *um* z_0*, so besagt die dritte Aussage, dass das Bild der Menge* $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{U_\varepsilon(z_0) + \lambda_n\}$ *unter der Abbildung* $\phi^{(j)}$ *gleich* $\widetilde{\mathbb{C}}$ *ist, in diesem Fall wird also jeder Wert aus* $\widetilde{\mathbb{C}}$ *auch tatsächlich angenommen (sogar abzählbar oft).*

(ii) Nach Lemma 2.1.10 gelten Satz 2.2.7 und Korollar 2.2.10 auch für $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$.

In unserem nächsten Ergebnis werden wir uns mit den Residuen translationsuniverseller Funktionen beschäftigen. Aus Korollar 2.2.10 wissen wir, dass die Menge der Polstellenhäufungspunkte von $\{\phi(z + \lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\mathbb{C}$ übereinstimmt, insbesondere hat jede translationsuniverselle Funktion ϕ abzählbar viele Polstellen. Weiter ist nach Bemerkung 2.2.4 klar, dass nicht alle Residuen von ϕ gleich 0 sein können. Verschärfend zeigen wir auf einfache Weise das folgende Ergebnis, hierbei bezeichnet $Res(\phi(z), z_0)$ das Residuum der Funktion ϕ an der Polstelle z_0.

Satz 2.2.12. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann gilt:*

(i) Ist $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ *eine* $\mathcal{V}$*-translationsuniverselle Funktion, so existiert zu jedem* $a \in \mathbb{C}$*, zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und zu jedem* $\delta > 0$ *ein* $N := N(a, \epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$*, so dass gilt*

$$\left| \sum_{i=1}^{p(N)} Res(\phi(z), z_i) - a \right| < \varepsilon,$$

wobei $z_1, \ldots, z_{p(N)}$ *die Polstellen von* ϕ *in* $U_\delta(\lambda_N) := \{z : |z - \lambda_N| < \delta\}$ *sind.*

(ii) Ist $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ eine translationsuniverselle Funktion, und bezeichnet P_ϕ die Menge der Polstellen von ϕ, so liegt die Menge $\{Res(\phi(z), w) : w \in P_\phi\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei zunächst $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion. Weiter sei $a \in \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die meromorphe Funktion $f(z) := \frac{a}{z}$ und das Vitushkin Kompaktum $K := K_\delta := \{z : |z| = \delta\}$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to \frac{a}{z} \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz folgt hieraus

$$\int_K \phi(z + \lambda_{n_k})\, dz \to \int_K \frac{a}{z}\, dz \quad (k \to \infty),$$

und somit

$$2\pi i \sum_{i=1}^{p(n_k)} Res(\phi(z + \lambda_{n_k}), \zeta_i) \to 2\pi i\, a \quad (k \to \infty),$$

wobei $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p(n_k)}$ die Polstellen von $\phi(z + \lambda_{n_k})$ in $U_\delta(0)$ sind. Man beachte, dass dann $\zeta_1 + \lambda_{n_k}, \ldots, \zeta_{p(n_k)} + \lambda_{n_k}$ die Pole von $\phi(z)$ in $U_\delta(\lambda_{n_k})$ sind. Insbesondere existiert nun ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{i=1}^{p(n_{k_0})} Res(\phi(z + \lambda_{n_{k_0}}), \zeta_i) - a \right| < \varepsilon.$$

Setzen wir $N := n_{k_0}$, so erhalten wir unter Beachtung der Gleichheit $Res(\phi(z+\lambda_N), \zeta_i) = Res(\phi(z), \zeta_i + \lambda_N)$ dass gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{p(N)} Res(\phi(z), \zeta_i + \lambda_N) - a \right| < \varepsilon.$$

Mit $z_i := \zeta_i + \lambda_N$ für $i = 1, \ldots, p(N)$ folgt schließlich die Behauptung im Fall $a \neq 0$. Offensichtlich gilt die Aussage dann aber auch für $a = 0$.

Zum Nachweis der zweiten Aussage sei $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ eine translationsuniverselle Funktion. Weiter sei $a \in \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger Punkt und die Funktion f sei definiert durch $f(z) := \frac{a}{z}$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to \frac{a}{z} \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty), \tag{2.8}$$

so dass nach Satz 1.2.18 eine abgeschlossene Kreisscheibe $K(0,r) := \{z : |z| \leq r\}$ existiert mit

$$\max_{K(0,r)} \left|\phi(z+\lambda_{n_k}) - \frac{a}{z}\right| \to 0 \quad \text{oder} \quad \max_{K(0,r)} \left|\frac{1}{\phi(z+\lambda_{n_k})} - \frac{z}{a}\right| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Im ersten Fall folgt $Res(\phi(z+\lambda_{n_k}), 0) = Res(\phi(z), \lambda_{n_k}) = a$ für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$, und somit die Behauptung. Im zweiten Fall folgt die kompakte Konvergenz im Inneren von $K(0,r)$, so dass wir mit dem Satz von Hurwitz ein $k_0 \in \mathbb{N}$ erhalten, so dass die Funktion $\phi(z+\lambda_{n_k})$ für jedes $k > k_0$ exakt eine einfache Polstelle p_k in $K^\circ(0, \frac{r}{2}) = \{z : |z| < \frac{r}{2}\}$ hat. Weiter beachte man, dass aus (2.8) und Satz 1.2.17 folgt, dass gilt

$$\phi(z+\lambda_{n_k}) \to \frac{a}{z} \quad \text{gleichmäßig auf } \partial K\big(0, \frac{r}{2}\big) = \big\{z : |z| = \frac{r}{2}\big\} \quad (k \to \infty),$$

woraus wir unmittelbar erhalten

$$\int\limits_{\partial K(0,\frac{r}{2})} \phi(z+\lambda_{n_k})\, dz \to \int\limits_{\partial K(0,\frac{r}{2})} \frac{a}{z}\, dz \quad (k \to \infty).$$

Beachten wir, dass das linke Integral hierbei für jedes $k > k_0$ gleich $2\pi i\, Res(\phi(z+\lambda_{n_k}), p_k)$ ist, so folgt

$$2\pi i\, Res(\phi(z+\lambda_{n_k}), p_k) \to 2\pi i\, a \quad (k \to \infty).$$

Also gilt $Res(\phi(z+\lambda_{n_k}), p_k) \to a$ für $k \to \infty$, so dass wir unter Beachtung der Gleichheit $Res(\phi(z+\lambda_{n_k}), p_k) = Res(\phi(z), p_k + \lambda_{n_k})$ schließlich mit $w_k := p_k + \lambda_{n_k} \in P_\phi$ erhalten

$$Res(\phi(z), w_k) \to a \quad (k \to \infty).$$

Da $a \in \mathbb{C}^\times$ hierbei beliebig war, folgt dass die Menge $\{Res(\phi(z), w) : w \in P_\phi\}$ dicht in $\mathbb{C}^\times$, und somit auch in $\mathbb{C}$ ist.

□

Bemerkung 2.2.13.

(i) *Insbesondere besagt die erste Aussage des obigen Satzes, dass $\mathcal{V}$-translationsuniverselle meromorphe Funktionen stets die Eigenschaft haben, dass endliche Summen ihrer Residuen dicht in $\mathbb{C}$ liegen. Funktionen welche dies nicht erfüllen, können folglich nicht $\mathcal{V}$-translationsuniversell sein. Als Beispiel betrachten wir meromorphe Funktionen der Form $\frac{f'}{f}$, diese haben bekanntlich ausschließlich ganzzahlige Residuen und kommen daher gemäß Satz 2.2.12 als $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen nicht in Frage.*

(ii) *Die zweite Aussage kann auch folgendermaßen formuliert werden. Ist $\phi \in M(\mathbb{C})$ translationsuniversell mit der Polstellenmenge P_ϕ und ist $g : P_\phi \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(w) := Res(\phi(z), w)$, so liegt die Menge $g(P_\phi)$ dicht in $\mathbb{C}$.*

(iii) *Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Satz 2.2.7 und Korollar 2.2.10, bleibt das obige Ergebnis beim Übergang zu ϕ' nicht richtig, da in diesem Fall alle Residuen gleich* 0 *sind.*

2.3 Über Polstellen translationsuniverseller Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Polstellen translationsuniverseller meromorpher Funktionen. So werden wir etwa sehen, dass es bei solchen Funktionen möglich ist, sowohl die Lage als auch die Ordnung der Pole gewissermaßen vorzuschreiben. Insbesondere werden wir dadurch in der Lage sein, zu zeigen, dass die Menge $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ nicht mit der Menge $\mathcal{U}_T$ übereinstimmt.

2.3.1 Funktionen mit vorgeschriebenen Polstellen

Wir werden im Folgenden $\mathcal{V}$-translationsuniverselle meromorphe Funktionen konstruieren, bei denen ein gewisser Anteil der Polstellen vorgeschrieben werden kann, das gleiche gilt für die zugehörigen Hauptteile. Alle weiteren Polstellen ergeben sich aus der Beweiskonstruktion. Zum Beweis dieses Ergebnisses werden wir den Satz von Mittag-Leffler, sowie den Satz von Nersesian über tangentielle Approximation benutzen. Wir führen zunächst einmal folgende Begriffe ein.

Definition 2.3.1. *Es sei $E \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge.*

(i) *Eine auf E definierte, positive und stetige Funktion $\epsilon(z)$ nennen wir Fehlerfunktion.*

(ii) *Wir sagen E sei eine Carleman-Menge, wenn jedes $f \in A(E)$ auf E tangentielle Approximation durch ganze Funktionen zulässt, d.h. wenn zu jedem $f \in A(E)$ und jeder Fehlerfunktion $\epsilon(z)$ eine ganze Funktion $g(z)$ existiert mit*

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon(z) \quad \text{für alle } z \in E.$$

Der Satz von Nersesian [47] aus dem Jahre 1971 liefert eine vollständige Charakterisierung der Carleman-Mengen.

Satz 2.3.2 (Nersesian, 1971). *Es sei $E \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Menge E ist eine Carleman-Menge.*

(ii) Die Menge E besitzt folgende Eigenschaften:

- $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus E$ *ist zusammenhängend.*
- $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus E$ *ist an* ∞ *lokal zusammenhängend.*
- *Zu jeder kompakten Teilmenge* $K \subset \mathbb{C}$ *existiert eine Umgebung* U *von* ∞*, so dass keine Zusammenhangskomponente von* E° *gleichzeitig* K *und* U *trifft.*

Diesen Satz werden wir später zur Konstruktion universeller Funktion verwenden. Zunächst aber beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.3.3. *Es sei* $E \subset \mathbb{C}$ *eine Carleman-Menge und* f *eine Funktion aus* $M(E)$*. Weiter seien* $\{z_n\}$ *eine Folge paarweise verschiedener Zahlen in* $\mathbb{C} \setminus E$ *ohne Häufungspunkt in* $\mathbb{C}$*, und* $\{P_n\}$ *eine Folge von Polynomen mit* $P_n(0) = 0$ *für alle* n*.*
Dann existiert zu jeder auf E *definierten Fehlerfunktion* $\epsilon(z)$ *eine meromorphe Funktion* $\varphi \in M(\mathbb{C})$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Sind $\{\zeta_m\}$ *die Polstellen von* f *auf* E *und* $\{H_m\}$ *die zugehörigen Hauptteile, so gilt dies auch für* φ*.*

(ii) Die Funktion φ *hat für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *eine Polstelle an* z_n *mit dem Hauptteil* $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$*.*

(iii) Für $z \notin (\{\zeta_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n : n \in \mathbb{N}\})$ *hat* φ *an* z *keinen Pol.*

(iv) Es gilt $|f(z) - \varphi(z)| < \epsilon(z) \quad$ *für alle* $z \in E$*.*

Beweis. Da die Menge $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\zeta_m : m \in \mathbb{N}\}$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ hat, existiert nach dem Satz von Mittag-Leffler eine meromorphe Funktion $m \in M(\mathbb{C})$, welche exakt die Polstellen $\{z_n\}$ und $\{\zeta_m\}$ mit den zugehörigen Hauptteilen $\left\{P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right\}$ bzw. $\{H_m\}$ hat. Man beachte, dass die Funktion m hierbei bis auf eine additive ganze Funktion eindeutig bestimmt ist.
Für $z \in E$ betrachten wir nun die Funktion

$$h(z) := f(z) - m(z),$$

diese ist holomorph auf E, so dass insbesondere $h \in A(E)$ gilt. Da E nach Voraussetzung eine Carleman-Menge ist, existiert zu jeder Fehlerfunktion $\epsilon(z)$ eine ganze Funktion $l \in H(\mathbb{C})$, so dass gilt

$$|h(z) - l(z)| < \epsilon(z) \quad \text{für alle } z \in E.$$

Mit dieser Funktion l setzen wir nun

$$\varphi(z) := m(z) + l(z).$$

Es folgt, dass φ aus $M(\mathbb{C})$ ist, und da l eine ganze Funktion ist, hat φ exakt die gleichen Polstellen und Hauptteile wie m, so dass die ersten drei Aussagen des Satzes gelten. Weiter gilt für $z \in E$

$$\begin{aligned}|f(z) - \varphi(z)| &= |f(z) - m(z) - l(z)| \\ &= |h(z) - l(z)| \\ &< \epsilon(z),\end{aligned}$$

so dass die Behauptung folgt.

$\square$

Weiterhin führen wir noch die folgende Definition ein.

Definition 2.3.4. *Wir nennen eine Folge $\{r_n\}$ rationaler Funktionen eine $\mathcal{V}$-Folge, wenn zu jedem $K \in \mathcal{V}$, jedem $f \in A(K)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt*

$$\max_K |f(z) - r_N(z)| < \varepsilon.$$

Mit Hilfe des obigen Lemmas 2.3.3 können wir nun das bereits erwähnte Ergebnis beweisen, und eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion konstruieren, bei der ein gewisser Anteil der Polstellen, sowie die zugehörigen Hauptteile vorgeschrieben werden können. Die restlichen Polstellen ergeben sich in natürlicher Weise aus der Beweiskonstruktion.

Satz 2.3.5. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen, so dass eine Folge paarweise disjunkter, abgeschlossener Kreisscheiben D_n mit Mittelpunkt λ_n und Radius d_n existiert, wobei $d_n < d_{n+1} \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Ferner seien $\{z_n\}$ eine Folge paarweise verschiedener Zahlen in $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, und $\{P_n\}$ eine Folge von Polynomen mit $P_n(0) = 0$ für jedes n. Schließlich sei $\{r_n\}$ eine $\mathcal{V}$-Folge rationaler Funktionen.*
Dann existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat ϕ in D_n exakt die gleichen Polstellen und Hauptteile wie die Funktion $r_n(z - \lambda_n)$.

(ii) Die Funktion ϕ hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Polstelle an z_n mit dem Hauptteil $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$.

(iii) Die Funktion ϕ hat keine weiteren Polstellen.

(iv) Die Funktion ϕ ist $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich $\{\lambda_n\}$.

Beweis. Wir betrachten die abgeschlossene Menge $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, welche nach Satz 2.3.2 eine Carleman-Menge ist. Auf dieser Menge definieren wir die folgenden Funktionen

$$g(w) := r_n(w - \lambda_n) \quad \text{für } w \in D_n,$$
$$\epsilon(w) := \frac{1}{n} \quad \text{für } w \in D_n.$$

Die Funktion g liegt dann in $M(E)$, weiter ist ϵ eine auf E definierte Fehlerfunktion. Nach Lemma 2.3.3 existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$, für welche die drei ersten Aussagen des Satzes gelten, und welche zusätzlich erfüllt

$$|g(w) - \phi(w)| < \epsilon(w) \quad \text{für alle } w \in E.$$

Folglich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{D_n} |r_n(w - \lambda_n) - \phi(w)| < \frac{1}{n},$$

woraus wir mit der Substitution $z = w - \lambda_n$ erhalten

$$\max_{\{|z| \leq d_n\}} |r_n(z) - \phi(z + \lambda_n)| < \frac{1}{n}.$$

Da $\{r_n\}$ nach Voraussetzung eine $\mathcal{V}$-Folge ist, folgt die letzte Aussage des Satzes nun auf analoge Weise wie im Beweis zu Satz 2.1.2.

□

Bemerkung 2.3.6.

(i) *Man beachte, dass die an die Folge $\{\lambda_n\}$ gestellte Bedingung in obigem Satz keine Einschränkung darstellt, da jede unbeschränkte Folge eine Teilfolge mit den gewünschten Eigenschaften besitzt. Folglich besitzt jede unbeschränkte Folge eine Teilfolge, für welche die Aussage des Satzes gilt.*

(ii) *Weiter ist klar, dass es möglich ist, keine oder nur endlich viele Polstellen z_n vorzuschreiben. Zudem beachte man, dass das Vorschreiben von Hauptteilen natürlich insbesondere das Vorschreiben der Ordnung und des Residuums an der jeweiligen Polstelle beinhaltet.*

(iii) *Nach Lemma 1.2.8 ist jede Abzählung der Menge $\mathcal{R}$ eine $\mathcal{V}$-Folge, und somit eine mögliche Wahl für die Folge $\{r_n\}$ in obigem Satz.*

(iv) *Schließlich sei noch bemerkt, dass wir die universelle Funktion in obigem Satz ohne die Verwendung von Lemma 1.2.10 konstruiert haben. Folglich kann die Existenz $\mathcal{V}$-translationsuniverseller meromorpher Funktionen auch durch eine Kombination der Sätze von Mittag-Leffler und Nersesian bewiesen werden.*

Somit ist gezeigt, dass zu einer vorgegebenen Folge $\{z_n\}$, welche gewisse Bedingungen erfüllt, stets eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion ϕ existiert, die an jedem z_n eine Polstelle besitzt. Zudem können die Hauptteile, und somit auch die Ordnung dieser Pole vorgegeben werden. Der Beweis hat allerdings verdeutlicht, dass die Funktion ϕ noch weitere Polstellen besitzt. Dies sind die Polstellen der rationalen Funktionen $r_n(z-\lambda_n)$ auf den Kreisscheiben D_n, diese werden in gewisser Weise für die universelle Approximationseigenschaft von ϕ benötigt, und wir können deren Lage nicht im Voraus festlegen. Somit ist es nicht möglich, die Lage *aller* Polstellen von ϕ vorzuschreiben. Im nächsten Abschnitt werden wir jedoch sehen, dass die Ordnung der Polstellen der Funktionen r_n durch eine geeignete Wahl der $\mathcal{V}$-Folge $\{r_n\}$ in Satz 2.3.5 kontrollierbar ist. Beschränken wir uns also beim Vorschreiben auf die Polstellenordnung, so können wir Aussagen machen, welche für *alle* Pole von ϕ gelten.

2.3.2 Folgerungen

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass bei $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen ein Teil der Polstellen unter gewissen Einschränkungen frei wählbar ist, allerdings wurde auch klar, dass dies nie für alle Polstellen gelten kann. Im Folgenden werden wir $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen mit vorgeschriebener Polstellenordnung konstruieren, wobei dies für *alle* Pole gilt. Als äußerst interessante Folgerung werden wir erhalten, dass die Mengen $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{U}_T$ nicht identisch sind. Von großer Wichtigkeit wird hierbei ein Lemma sein, welches eine Verschärfung von Lemma 1.2.8 darstellt. Zu seiner Formulierung führen wir zunächst die folgenden Mengen ein.

Definition 2.3.7. *Es sei $M \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir definieren folgende Teilmengen von $\mathcal{R}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &:= \{r \in \mathcal{R} : \text{ alle Polstellen von } r \text{ sind von erster Ordnung}\}, \\ \mathcal{R}_M &:= \{r \in \mathcal{R} : \text{ alle Polstellen von } r \text{ sind von der Ordnung } \geq M\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sowohl $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}'$ als auch $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}_M$ gilt, da jedes $r \in \mathcal{P}$ überhaupt keine Polstellen besitzt. Wir kommen nun zu dem bereits oben erwähnten Lemma, welches besagt, dass Abzählungen der Mengen $\mathcal{R}'$ und $\mathcal{R}_M$ jeweils $\mathcal{V}$-Folgen sind.

Lemma 2.3.8. *Es sei $K \in \mathcal{V}$ ein beliebiges Kompaktum und $f \in A(K)$. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r \in \mathcal{R}'$ mit

$$\max_K |f(z) - r(z)| < \varepsilon.$$

(ii) Zu jedem $M \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r \in \mathcal{R}_M$ mit

$$\max_K |f(z) - r(z)| < \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Es seien dazu ein $K \in \mathcal{V}$, eine Funktion $f \in A(K)$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Satz von Vitushkin existiert eine rationale Funktion $\tilde{R}$ mit Polen in K^c, so dass gilt

$$\max_K \left| f(z) - \tilde{R}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da hierbei $\tilde{R} \in H(K)$ gilt, existiert nach dem Satz von Runge eine rationale Funktion R, welche nur einfache Polstellen in K^c besitzt, und welche $\max_K \left| \tilde{R}(z) - R(z) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$, und somit insbesondere

$$\max_K |f(z) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.9}$$

erfüllt. Es sei $R = \frac{P}{Q}$ mit Polynomen P und Q, welche keine gemeinsamen Nullstellen haben. Die Polstellen von R sind die Nullstellen von Q, diese sind alle einfach und liegen in K^c, wir bezeichnen sie im Folgenden mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Nun setzen wir

$$m_Q := \min_K |Q(z)| > 0, \quad M_P := \max_K |P(z)|, \quad M_Q := \max_K |Q(z)|.$$

Weiter wählen wir ein Kompaktum $D \in \mathcal{M}$ mit $K \subset D$ und $\zeta_i \in D^\circ$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann existieren Folgen von Polynomen $\{P_n\}$ und $\{Q_n\}$ in $\mathcal{P}$ mit $grad(P_n) = grad(P)$ und $grad(Q_n) = grad(Q) = m$ für alle n, so dass gilt

$$\begin{aligned} P_n(z) &\to P(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D \quad (n \to \infty), \\ Q_n(z) &\to Q(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D \quad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da die m Nullstellen von Q alle einfach und somit paarweise verschieden sind, und zudem alle in D° enthalten sind, folgt mit dem Satz von Hurwitz angewendet auf die Folge $\{Q_n\}$, dass die Polynome Q_n für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ in D exakt m Nullstellen haben, welche zudem paarweise verschieden sind. Wegen $grad(Q_n) = m$ folgt zudem, dass Q_n keine weiteren Nullstellen hat. Wegen (2.10) erhalten wir nun insgesamt, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Polynome $P_N, Q_N \in \mathcal{P}$ folgende Eigenschaften haben:

- $\max_D |P(z) - P_N(z)| < \frac{m_Q^2}{2} \frac{1}{M_Q} \frac{\varepsilon}{4}$,
- $\max_D |Q(z) - Q_N(z)| < \min \left\{ \frac{m_Q}{2}, \frac{m_Q^2}{2} \frac{1}{M_P} \frac{\varepsilon}{4} \right\}$,
- Q_N hat nur einfache Nullstellen.

Wegen $\max_K |Q(z) - Q_N(z)| \leq \max_D |Q(z) - Q_N(z)| < \frac{m_Q}{2}$ und $|Q(z)| \geq m_Q$ für alle $z \in K$, gilt weiterhin

$$\min_K |Q_N(z)| \geq \frac{m_Q}{2} > 0.$$

Für die Funktion $R_N := \frac{P_N}{Q_N} \in \mathcal{R}'$ gilt nun für alle $z \in K$

$$\begin{aligned}
|R(z) - R_N(z)| &= \left| \frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{P_N(z)}{Q_N(z)} \right| \\
&= \frac{|P(z)Q_N(z) - P_N(z)Q(z)|}{|Q(z)|\ |Q_N(z)|} \\
&\leq \frac{2}{m_Q^2}\ |P(z)Q_N(z) - P(z)Q(z) + P(z)Q(z) - P_N(z)Q(z)| \\
&\leq \frac{2}{m_Q^2}\ (|P(z)|\ |Q(z) - Q_N(z)| + |Q(z)|\ |P(z) - P_N(z)|) \\
&< \frac{2}{m_Q^2} \left(M_P \frac{m_Q^2}{2} \frac{1}{M_P} \frac{\varepsilon}{4} + M_Q \frac{m_Q^2}{2} \frac{1}{M_Q} \frac{\varepsilon}{4} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Es folgt $\max_K |R(z) - R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, so dass wir mit (2.9) insgesamt erhalten

$$\max_K |f(z) - R_N(z)| < \varepsilon,$$

und somit wegen $R_N \in \mathcal{R}'$ die Behauptung.

Zum Nachweis der zweiten Aussage seien ein $K \in \mathcal{V}$, eine Funktion $f \in A(K)$, eine natürliche Zahl M sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Lemma 1.2.8 existiert eine rationale Funktion $r_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathcal{R}$, wobei p_1 und q_1 keine gemeinsamen Nullstellen haben, so dass gilt

$$\max_K |f(z) - r_1(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hierbei liegen alle Pole von r_1, das heißt alle Nullstellen von q_1, in K^c. Daher ist die Funktion $\frac{1}{q_1^M(z)}$ auf K holomorph, und es folgt

$$0 < c := \max_K \left| \frac{1}{q_1^M(z)} \right| < \infty.$$

Wir wählen nun ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$, so dass $a\,c < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt und setzen

$$r(z) := r_1(z) + \frac{a}{q_1^M(z)} = \frac{q_1^{M-1}(z)\,p_1(z) + a}{q_1^M(z)}.$$

Offenbar gilt dann $r \in \mathcal{R}_M$ und es folgt

$$\begin{aligned}\max_K |f(z) - r(z)| &= \max_K \left| f(z) - r_1(z) - \frac{a}{q_1^M(z)} \right| \\ &\leq \max_K |f(z) - r_1(z)| + a \max_K \left| \frac{1}{q_1^M(z)} \right| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

woraus wir die Behauptung erhalten.

□

Mit diesem Lemma und Satz 2.3.5 können wir nun leicht die Existenz $\mathcal{V}$-translationsuniverseller Funktionen mit vorgeschriebener Polstellenordnung beweisen.

Satz 2.3.9. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann gilt:*

(i) Es existiert eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, welche ausschließlich Polstellen erster Ordnung besitzt.

(ii) Zu jedem $M \in \mathbb{N}$ existiert eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion $\phi_M \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, welche nur Polstellen der Ordnung $\geq M$ besitzt. Insbesondere existieren $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen, welche keine Polstellen erster Ordnung haben.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass eine Folge paarweise disjunkter, abgeschlossener Kreisscheiben D_n mit Mittelpunkt λ_n und Radius d_n existiert, so dass $d_n < d_{n+1} \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Es sei nun $M \in \mathbb{N}$ fest, weiter seien $\{r'_n\}$ und $\{r_n^{(M)}\}$ Abzählungen der in Definition 2.3.7 eingeführten Mengen $\mathcal{R}'$ und $\mathcal{R}_M$. Nach Lemma 2.3.8 sind diese Abzählungen $\mathcal{V}$-Folgen. Wir wenden nun Satz 2.3.5 für diese Folgen an, wobei wir $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ und $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ setzen, und erhalten Funktionen $\phi \in M(\mathbb{C})$ und $\phi_M \in M(\mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat ϕ in D_n exakt die gleichen Polstellen und Hauptteile wie die Funktion $r'_n(z - \lambda_n)$, diese sind nach Definition der Menge $\mathcal{R}'$ alle von erster Ordnung.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat ϕ_M in D_n exakt die gleichen Polstellen und Hauptteile wie die Funktion $r_n^{(M)}(z - \lambda_n)$, diese sind nach Definition der Menge $\mathcal{R}_M$ alle von der Ordnung $\geq M$.
- Die Funktionen ϕ und ϕ_M besitzen keine weiteren Polstellen.
- Die Funktionen ϕ und ϕ_M sind $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich $\{\lambda_n\}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Bemerkung 2.3.10. *In obigem Beweis haben wir Satz 2.3.5 mit* $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ *angewendet. Es ist klar, dass man in diesem Beweisschritt auch noch zusätzliche Polstellen* z_n *vorschreiben könnte, wobei die Folge* $\{z_n\}$ *gemäß Satz 2.3.5 zu wählen ist.*

Somit ist gezeigt, dass bei einer $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktion die Ordnung der Polstellen in gewisser Weise vorgeschrieben werden kann, wobei dies dann für alle Pole der Funktion gilt. Interessanterweise werden wir dadurch nun beweisen können, dass die Menge der $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen und die Menge der translationsuniversellen Funktionen nicht identisch sind. Dies wird leicht aus dem nächsten Lemma folgen, welches im Wesentlichen besagt, dass bei translationsuniversellen Funktionen die Ordnung der Polstellen nicht im Sinne von Satz 2.3.9 vorgeschrieben werden kann.

Lemma 2.3.11. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und* $\phi \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ *eine translationsuniverselle Funktion. Dann besitzt* ϕ *abzählbar viele Polstellen erster Ordnung.*

Beweis. Aus Lemma 2.2.2 folgt $\frac{1}{\phi} \in \mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$, so dass eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\frac{1}{\phi(z+\lambda_{n_k})} \to f(z) := z \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C},$$

und somit wegen Satz 1.2.17 insbesondere

$$\frac{1}{\phi(z+\lambda_{n_k})} \to z \quad \text{gleichmäßig auf } \overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}.$$

Hieraus folgt die kompakte Konvergenz in $\mathbb{D}$, so dass nach dem Satz von Hurwitz ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Funktion $\frac{1}{\phi(z+\lambda_{n_k})}$ für jedes $k > k_0$ in $\mathbb{D}$ exakt eine einfache Nullstelle besitzt. Folglich hat die Funktion $\phi(z+\lambda_{n_k})$ für jedes solche k exakt eine einfache Polstelle p_k in $\mathbb{D}$. Somit erhalten wir schließlich, dass ϕ für jedes $k > k_0$ eine Polstelle erster Ordnung an $\zeta_k := p_k + \lambda_{n_k}$ hat. Wegen der Beschränktheit der Folge $\{p_k\}_{k>k_0}$ und der Unbeschränktheit der Folge $\{\lambda_{n_k}\}_{k>k_0}$ ist die Menge $\{\zeta_k : k > k_0\}$ abzählbar, so dass die Behauptung folgt.

□

Mit diesem Lemma und Satz 2.3.9 folgt nun unmittelbar das folgende Ergebnis.

Satz 2.3.12. *Es existieren* $\mathcal{V}$*-translationsuniverselle Funktionen, welche nicht translationsuniversell sind. Insbesondere gilt also* $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \neq \mathcal{U}_T$.

Beweis. Nach Satz 2.3.9 existieren zu jeder unbeschränkten Folge Funktionen, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell sind und keine Polstellen erster Ordnung besitzen. Diese Funktionen können gemäß Lemma 2.3.11 nicht translationsuniversell sein.

□

Bemerkung 2.3.13.

(i) *Die obigen Ergebnisse haben verdeutlicht, dass Translationsuniversalität in gewisser Weise stärkere Bedingungen an die Polstellen der universellen Funktionen stellt als $\mathcal{V}$-Translationsuniversalität. Dies lässt sich dadurch erklären, dass wir mit einer $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktion ϕ stets Funktionen $f \in A(K)$ approximieren, wobei $K \in \mathcal{V}$ ist. Nach dem Satz von Vitushkin ist dies im Wesentlichen äquivalent dazu, auf K rationale Funktionen r mit Polen außerhalb von K zu approximieren. Aus diesem Grund muss das Verhalten von ϕ „nahe der Polstellen" nur bedingt mit dem Verhalten von r „nahe der Polstellen" übereinstimmen. Wie in den obigen Ergebnissen gezeigt, kann sich hierbei insbesondere die Ordnung der Pole von ϕ von der Ordnung der Pole von r unterscheiden. So kann etwa die Funktion $\frac{1}{z}$ nach Satz 2.3.9 und Lemma 2.1.3 kompakt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch eine $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktion approximiert werden, welche keine einfachen Pole hat.*
Im Falle der Translationsuniversalität ist dies nicht mehr gültig. Da wir in diesem Fall meromorphe Funktionen auf beliebigen Kompakta, und somit insbesondere auf solchen, auf denen sie Polstellen haben, (sphärisch) approximieren, müssen die Pole der approximierenden universellen Funktion ϕ gewisse Bedingungen erfüllen. So ist es etwa zur sphärisch kompakten Approximation von $\frac{1}{z}$ notwendig, dass ϕ einfache Polstellen besitzt.

(ii) *Eine weitere interessante Folgerung aus Satz 2.3.12 ist, dass es eine Klasse meromorpher Funktionen gibt, welche in gewisser Weise zwischen den holomorphen translationsuniversellen und den meromorphen translationsuniversellen Funktionen liegt, dies ist die Klasse der Funktionen, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell aber nicht translationsuniversell sind. Diese erfüllen insbesondere die Approximationseigenschaft holomorpher translationsuniverseller Funktionen, das heißt sie besitzen die Eigenschaft, dass auf jedem $K \in \mathcal{M}$ jede Funktion aus $A(K)$ gleichmäßig durch geeignete Translationen approximiert werden kann. Da sie diese Eigenschaft sogar für alle $K \in \mathcal{V}$ besitzen, sind diese Funktionen „echt stärker" als die holomorphen translationsuniversellen Funktionen. Andererseits liegt die Folge der Translationen nicht dicht in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$, so dass diese Funktionen gleichzeitig „echt schwächer" als meromorphe translationsuniverselle Funktionen sind.*

In Satz 2.3.12 haben wir gesehen, dass die Menge $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$ nicht leer ist. Unter Verwendung von Lemma 2.2.1 können wir noch leicht das folgende Ergebnis beweisen, welches eine gewisse Aussage über die Größe der Menge $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$ macht.

Satz 2.3.14. *Es sei $f \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion. Dann existiert eine Folge meromorpher Funktionen ϕ_k, so dass gilt:*

(i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\phi_k \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$, das heißt die Funktionen ϕ_k sind $\mathcal{V}$-translationsuniversell, aber nicht translationsuniversell.

(ii) Es gilt

$$\phi_k(z) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C} \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

wobei P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnet.

Insbesondere existiert zu jeder ganzen Funktion f eine Folge meromorpher Funktionen $\{\phi_k\}$ in $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$, welche für $k \to \infty$ kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen f konvergiert.

Beweis. Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Nach Satz 2.3.9 existiert dann eine meromorphe Funktion ϕ, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell bezüglich $\{\lambda_n\}$ ist und keine Pole erster Ordnung besitzt. Gemäß Lemma 2.3.11 gilt also $\phi \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die meromorphe Funktion

$$\varphi_n(z) := \phi(z + \lambda_n),$$

welche nach Lemma 2.2.1 ebenfalls $\mathcal{V}$-translationsuniversell ist. Zudem ist klar, dass jedes φ_n ausschließlich Pole der Ordnung ≥ 2 besitzt, so dass $\varphi_n \in \mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Ist nun $f \in M(\mathbb{C})$ eine beliebige meromorphe Funktion, so existiert nach Lemma 2.1.3 eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z + \lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \setminus P_f \quad (k \to \infty).$$

Mit $\phi_k(z) := \varphi_{n_k}(z)$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 2.3.15. *Es ist klar, dass die Menge $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$ nicht residual in $M_\infty(\mathbb{C})$ sein kann. Dies folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass die Menge $\mathcal{U}_T$, welche nach Satz 2.1.7 residual ist, im Komplement von $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{U}_T$ enthalten ist.*

Kapitel 3

Streckungsuniverselle meromorphe Funktionen

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit translationsuniversellen Funktionen beschäftigt, also mit Funktionen, bei denen die Folge ihrer Translationen bezüglich einer unbeschränkten Folge universelle Approximationseigenschaften besitzt. Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen ist der bereits in Kapitel 1 erwähnte Satz 1.3.4 von Zappa, welcher die Existenz einer streckungsuniversellen ganzen Funktion beweist, d.h. einer Funktion $\varphi \in H(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft, dass die Folge ihrer Streckungen bezüglich einer unbeschränkten Folge für jedes $K \in \mathcal{M}$ mit $0 \notin K$ dicht in $A(K)$ ist. In diesem Kapitel wird dieses Ergebnis auf meromorphe Funktionen erweitert und die Existenz streckungsuniverseller meromorpher Funktionen bewiesen. Zudem werden wir einige Eigenschaften solcher Funktionen zusammenstellen. Es sei noch bemerkt, dass, im Gegensatz zu translationsuniversellen Funktionen, meromorphe streckungsuniverselle Funktionen in der Literatur bisher nicht behandelt wurden.

3.1 Konstruktive und generische Existenzbeweise

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz meromorpher streckungsuniverseller Funktionen nachweisen, wobei wir wieder sehen werden, dass hierzu verschiedene Beweistechniken verwendet werden können. Zunächst aber wollen wir in Analogie zu Definition 2.1.1 festhalten, was genau unter meromorphen streckungsuniversellen Funktionen zu verstehen ist.

Definition 3.1.1. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen.*

(i) Eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ nennen wir $\mathcal{V}$-streckungsuniversell (bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$), wenn zu jedem $K \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und zu jedem $f \in A(K)$

eine Folge $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt*

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Die Menge aller Funktionen, welche $\mathcal{V}$*-streckungsuniversell bezüglich der Folge* $\{\lambda_n\}$ *sind, bezeichnen wir mit* $\mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$*. Die Menge aller* $\mathcal{V}$*-streckungsuniversellen Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$*.*

(ii) Eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ *nennen wir streckungsuniversell (bezüglich der Folge* $\{\lambda_n\}$*), wenn die Folge* $\{\phi(z\,\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* $(M_\infty(\mathbb{C}^\times), \rho)$ *ist, d.h. wenn zu jedem* $f \in M_\infty(\mathbb{C}^\times)$ *eine Folge* $\{n_k\}$ *natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt*

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C}^\times \quad (k \to \infty).$$

Die Menge aller Funktionen, welche streckungsuniversell bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$ *sind, bezeichnen wir mit* $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$*. Die Menge aller streckungsuniversellen Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathcal{U}_S$*.*

Wiederum ist klar, dass $\mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_S$ gilt. Zudem existiert zu jedem $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$ (bzw. $\mathcal{U}_S$) eine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ (bzw. $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$).

3.1.1 Konstruktiver Ansatz

In unserem ersten Satz werden wir auf konstruktive Weise die Existenz $\mathcal{V}$-streckungsuniverseller Funktionen nachweisen. Wir werden sogar sehen, dass die Menge $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \cap \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$ nicht leer ist, dass also Funktionen existieren, welche gleichzeitig $\mathcal{V}$-translationsuniversell und $\mathcal{V}$-streckungsuniversell sind.

Satz 3.1.2. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann existiert eine meromorphe Funktion* $\phi \in M(\mathbb{C})$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Funktion ϕ *ist* $\mathcal{V}$*-translationsuniversell bezüglich* $\{\lambda_n\}$*.*

(ii) Die Funktion ϕ *ist* $\mathcal{V}$*-streckungsuniversell bezüglich* $\{\lambda_n\}$*.*

Insbesondere gilt also $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \cap \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}} \neq \emptyset$*.*

Beweis. Zunächst einmal betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Mengen

$$D_k := \{z : |z| \le k\} \quad \text{und} \quad F_k := \left\{z : \frac{1}{k} \le |z| \le k+1\right\}.$$

Da die Folge $\{\lambda_n\}$ unbeschränkt ist, können wir Teilfolgen $\{\lambda_{n_k}\}$ und $\{\lambda_{m_k}\}$ so wählen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\lambda_{n_k}| + k < |\lambda_{m_k}| \, \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad |\lambda_{m_k}| \, (k+1) < \left|\lambda_{n_{k+1}}\right| - (k+1).$$

Setzen wir nun für $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \lambda_{n_k} + D_k \quad \text{und} \quad B_k := \lambda_{m_k} \, F_k,$$

so gilt gemäß unserer Wahl der Folgen $\{\lambda_{n_k}\}$ und $\{\lambda_{m_k}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\emptyset = A_k \cap B_k = A_k \cap A_{k+1} = B_k \cap A_{k+1} = A_k \cap B_{k+1} = B_k \cap B_{k+1},$$

das heißt die Mengen A_k und B_k sind alle paarweise disjunkt. Wir betrachten im Folgenden die in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Menge $E := \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cup B_k)$ und bezeichnen mit $\{r_k\}$ wie üblich eine Abzählung der in Definition 1.2.7 eingeführten Menge $\mathcal{R}$. Weiter definieren wir auf E die folgenden Funktionen

$$g(w) := \begin{cases} r_k(w - \lambda_{n_k}) & \text{für } w \in A_k, \\ r_k\left(\frac{w}{\lambda_{m_k}}\right) & \text{für } w \in B_k, \end{cases}$$

$$\epsilon(w) := \frac{1}{k} \quad \text{für } w \in A_k \cup B_k.$$

Die Funktion g ist dann aus $M(E)$, weiter ist ϵ aus $H(E)$ mit $\epsilon(w) > 0$. Nach Lemma 1.2.10 existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit

$$|\phi(w) - g(w)| < \epsilon(w) \quad \text{für alle } w \in E.$$

Folglich erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{A_k} |\phi(w) - r_k(w - \lambda_{n_k})| < \frac{1}{k} \quad \text{und}$$

$$\max_{B_k} \left|\phi(w) - r_k\left(\frac{w}{\lambda_{m_k}}\right)\right| < \frac{1}{k},$$

woraus mit der Substitution $z = w - \lambda_{n_k}$ bzw. $z = \frac{w}{\lambda_{m_k}}$ folgt

$$\max_{D_k} |\phi(z + \lambda_{n_k}) - r_k(z)| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \tag{3.1}$$

$$\max_{F_k} |\phi(z\, \lambda_{m_k}) - r_k(z)| < \frac{1}{k}. \tag{3.2}$$

Es seien nun K ein Kompaktum aus $\mathcal{V}$ und f eine Funktion aus $A(K)$. Nach Lemma 1.2.8 existiert eine Folge natürlicher Zahlen $\{k_l\}$ mit $k_l \to \infty$ für $l \to \infty$ und

$$\max_{K} |f(z) - r_{k_l}(z)| < \frac{1}{l} \quad \text{für jedes } l \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

(i) Für l hinreichend groß gilt $K \subset D_{k_l}$ und es folgt mit (3.1) und (3.3)

$$\begin{aligned}\max_K \left|\phi(z+\lambda_{n_{k_l}}) - f(z)\right| &\le \max_K \left|\phi(z+\lambda_{n_{k_l}}) - r_{k_l}(z)\right| + \max_K |r_{k_l}(z) - f(z)| \\ &\le \max_{D_{k_l}} \left|\phi(z+\lambda_{n_{k_l}}) - r_{k_l}(z)\right| + \max_K |r_{k_l}(z) - f(z)| \\ &< \frac{1}{k_l} + \frac{1}{l}.\end{aligned}$$

Also gilt $\max_K \left|\phi(z+\lambda_{n_{k_l}}) - f(z)\right| \to 0$ für $l \to \infty$, woraus die erste Behauptung folgt.

(ii) Falls $0 \notin K$ ist, so gilt für l hinreichend groß $K \subset F_{k_l}$ und es folgt mit (3.2) und (3.3)

$$\begin{aligned}\max_K \left|\phi(z\,\lambda_{m_{k_l}}) - f(z)\right| &\le \max_K \left|\phi(z\,\lambda_{m_{k_l}}) - r_{k_l}(z)\right| + \max_K |r_{k_l}(z) - f(z)| \\ &\le \max_{F_{k_l}} \left|\phi(z\,\lambda_{m_{k_l}}) - r_{k_l}(z)\right| + \max_K |r_{k_l}(z) - f(z)| \\ &< \frac{1}{k_l} + \frac{1}{l}.\end{aligned}$$

Also gilt $\max_K \left|\phi(z\,\lambda_{m_{k_l}}) - f(z)\right| \to 0$ für $l \to \infty$, woraus die zweite Behauptung folgt und der Satz somit bewiesen ist.

□

Der obige Satz klärt also die Frage nach der Existenz meromorpher $\mathcal{V}$-streckungsuniverseller Funktionen. Wir werden nun zeigen, dass für solche Funktionen eine ähnliche Aussage gemacht werden kann, wie die, welche wir in Lemma 2.1.3 für $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen gemacht haben.

Lemma 3.1.3. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann sind folgende Eigenschaften einer Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ äquivalent:*

(i) Die Funktion ϕ ist $\mathcal{V}$-streckungsuniversell bezüglich der Folge $\{\lambda_n\}$.

(ii) Zu jeder Funktion $f \in M(\mathbb{C}^\times)$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf } \mathbb{C}^\times \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

wobei P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnet.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der zu Lemma 2.1.3. Wir zeigen zunächst die Implikation *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Es sei dazu $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft *(ii)*, weiter seien K ein Kompaktum aus $\mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und f eine beliebige Funktion aus $A(K)$. Nach dem Satz von Vitushkin existiert zu $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion R mit Polen außerhalb von K, so dass gilt

$$\max_K |R(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bezeichnen wir mit P_R die Menge der Polstellen von R, so gilt $K \subset \mathbb{C}^\times \setminus P_R$ und unter Verwendung der Eigenschaft *(ii)* existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_K |\phi(z\,\lambda_{n_0}) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $K \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und $f \in A(K)$ beliebig waren, folgt hieraus die Behauptung.

Zum Nachweis der umgekehrten Implikation betrachten wir ein beliebiges $f \in M(\mathbb{C}^\times)$ und bezeichnen mit P_f der Menge der Polstellen von f. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$D_k := \left\{ z : \frac{1}{k+1} \leq |z| \leq k \right\}$$

und bezeichnen mit $z_1, \ldots, z_{l_k}$ die Pole von f in D_k. Weiter betrachten wir die Mengen

$$E_i^{(k)} := \left\{ z : |z - z_i| < \frac{1}{k+1} \right\}, \quad i = 1, \ldots, l_k,$$

und setzen schließlich

$$B_k := D_k \setminus \bigcup_{i=1}^{l_k} E_i^{(k)}.$$

Es folgt, dass das Kompaktum B_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{V}$ ist und $0 \notin B_k$ erfüllt, zudem gilt $P_f \cap B_k = \emptyset$, und somit $f \in A(B_k)$. Nach Voraussetzung folgt also, dass zu jedem (festen) $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{m_j^{(k)}\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass gilt

$$\phi(z\,\lambda_{m_j^{(k)}}) \to f(z) \quad \text{gleichmäßig auf } B_k \quad (j \to \infty).$$

Insbesondere können wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $m_{j_k}^{(k)} \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$\max_{B_k} \left| \phi(z\,\lambda_{m_{j_k}^{(k)}}) - f(z) \right| < \frac{1}{k}.$$

Beachten wir nun, dass zu jedem Kompaktum $H \subset \mathbb{C}^\times \setminus P_f$ ein $k_H \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $H \subset B_k$ für alle $k > k_H$ ist, so erhalten wir schließlich mit $n_k := m_{j_k}^{(k)}$

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C}^\times \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

und somit die Behauptung.

$\square$

Bemerkung 3.1.4. *Auch hier wollen wir auf den Sonderfall eingehen, dass* $f \in H(\mathbb{C}^\times)$ *ist, und somit* $\mathbb{C}^\times \setminus P_f = \mathbb{C}^\times$ *gilt. In diesem Fall folgt aus obigem Lemma, dass die Folge* $\{\phi(z\,\lambda_{n_k})\}$ *für* $k \to \infty$ *kompakt auf* $\mathbb{C}^\times$ *gegen* f *konvergiert.*
Ist also $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und* ϕ *eine bezüglich dieser Folge* $\mathcal{V}$*-streckungsuniverselle Funktion, so existiert zu jeder Funktion* $f \in H(\mathbb{C}^\times)$ *eine Folge* $\{n_k\}$ *in* $\mathbb{N}$ *mit*

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{kompakt auf}\ \mathbb{C}^\times \quad (k \to \infty).$$

Man beachte hierbei, dass holomorphe streckungsuniverselle Funktionen diese Eigenschaft nicht haben, was im Wesentlichen daran liegt, dass nicht jedes Kompaktum $H \subset \mathbb{C}^\times$ *in einem Kompaktum* $K \in \mathcal{M}$ *mit* $0 \notin K$ *enthalten ist.*

3.1.2 Generischer Ansatz

Nachdem wir im vorigen Abschnitt auf konstruktive Weise die Existenz $\mathcal{V}$-streckungsuniverseller Funktionen nachgewiesen haben, wollen wir nun zeigen, dass dies auch durch einen generischen Beweis möglich ist. Der Vorteil hiervon wird wieder sein, dass wir eine in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ residuale Menge an universellen Funktionen erhalten, zudem werden diese streckungsuniversell sein. Der Beweis benutzt wieder das Universalitätskriterium, und wird ähnlich sein wie der entsprechende Beweis zu dem Satz über die Existenz translationsuniverseller Funktionen.

Satz 3.1.5. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann ist die Menge* $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ *residual in* $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$*, insbesondere gilt also* $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\}) \neq \emptyset$*.*

Beweis. Wir setzen $X = (M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ und $Y = (M_\infty(\mathbb{C}^\times), \rho)$. Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 1.2.2 ist X dann vollständig und Y separabel. Wir betrachten nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $T_n : X \to Y$ mit $T_n\phi(z) := \phi(z\,\lambda_n)$ und zeigen zunächst, dass T_n für jedes n stetig ist. Es sei dazu $n \in \mathbb{N}$ fest, und $\{f_k\}$ eine Folge in $M_\infty(\mathbb{C})$ mit $\rho(f_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$ und ein $f \in M_\infty(\mathbb{C})$. Ferner sei $K \subset \mathbb{C}^\times$ ein beliebiges Kompaktum und $\tilde{K} := \lambda_n K = \{w : w = \lambda_n z, z \in K\}$. Wegen $\rho(f_k, f) \to 0$ folgt aus Lemma 1.2.22

$$f_k(w) \to f(w) \quad \text{sphärisch gleichmäßig auf } \tilde{K} \quad (k \to \infty),$$

woraus wir mit der Substitution $z = \frac{w}{\lambda_n}$ erhalten

$$f_k(z\,\lambda_n) \to f(z\,\lambda_n) \quad \text{sphärisch gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Da $K \subset \mathbb{C}^\times$ beliebig war, folgt die sphärisch kompakte Konvergenz von $f_k(z\,\lambda_n) = T_n f_k(z)$ auf $\mathbb{C}^\times$ gegen $f(z\,\lambda_n) = T_n f(z)$, so dass mit Lemma 1.2.22 folgt

$$\rho(T_n f_k, T_n f) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von T_n.
Nach Satz 2.1.6 bleibt die Transitivität der Folge $\{T_n\}$ zu zeigen. Es seien dazu U eine offene, nichtleere Teilmenge von $M_\infty(\mathbb{C})$, und V eine offene, nichtleere Teilmenge von $M_\infty(\mathbb{C}^\times)$, weiter seien $f \in U$ und $g \in V$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(f) \subset U$ und $V_\varepsilon(g) \subset V$ gilt, wobei $U_\varepsilon(f)$ und $V_\varepsilon(g)$ die ε-Umgebungen von f und g sind. Nach Lemma 1.2.21 existiert nun eine abgeschlossene Kreisscheibe $K_1 \subset \mathbb{C}$, ein abgeschlossener Kreisring $K_2 \subset \mathbb{C}^\times$ und ein $\delta > 0$, so dass für $h \in M_\infty(\mathbb{C})$ gilt

$$\max_{K_1} d(f(z), h(z)) < \delta \text{ impliziert } \rho(f,h) < \varepsilon, \text{ und somit } h \in U_\varepsilon(f) \subset U, \quad \text{sowie}$$
$$\max_{K_2} d(g(z), h(z)) < \delta \text{ impliziert } \rho(g,h) < \varepsilon, \text{ und somit } h \in V_\varepsilon(g) \subset V.$$

Da $\{\lambda_n\}$ unbeschränkt ist, können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $K_1 \cap (\lambda_{n_0} K_2) = \emptyset$ gilt. Auf der kompakten Menge $K_1 \cup (\lambda_{n_0} K_2)$ definieren wir folgende Funktion

$$j(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in K_1, \\ g\left(\frac{z}{\lambda_{n_0}}\right) & \text{für } z \in \lambda_{n_0} K_2. \end{cases}$$

Es folgt $j \in M(K_1 \cup (\lambda_{n_0} K_2))$, so dass nach dem Satz von Runge eine rationale Funktion $r \in M_\infty(\mathbb{C})$ existiert mit

$$\max_{K_1} d(f(z), r(z)) < \delta \quad \text{und} \quad \max_{\lambda_{n_0} K_2} d\Big(g\big(\frac{z}{\lambda_{n_0}}\big), r(z)\Big) < \delta.$$

Durch die Substitution $w = \frac{z}{\lambda_{n_0}}$ erhalten wir hieraus

$$\max_{K_1} d(f(z), r(z)) < \delta \quad \text{und} \quad \max_{K_2} d(g(w), r(w\,\lambda_{n_0})) = \max_{K_2} d(g(w), T_{n_0} r(w)) < \delta,$$

so dass schließlich folgt

$$r \in U \quad \text{und} \quad T_{n_0} r \in V.$$

Folglich gilt $T_{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$, woraus mit dem Universalitätskriterium (Satz 2.1.6) die Behauptung folgt.

□

Somit ist auch die Frage nach der Existenz meromorpher streckungsuniverseller Funktionen geklärt, zudem ist auch die Menge dieser Funktionen residual in $M_\infty(\mathbb{C})$. Wie im translationsuniversellen Fall können wir hieraus nun einige interessante Folgerungen ziehen.

Korollar 3.1.6. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann liegt die Folge $\{\phi(z\,\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $\phi \in \mathfrak{U}_S(\{\lambda_n\})$ dicht in $(M_\infty(G \setminus \{0\}), \rho)$, d.h. zu jedem $f \in M_\infty(G \setminus \{0\})$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{sphärisch kompakt auf } G \setminus \{0\} \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset G \setminus \{0\}$ ein beliebiges Kompaktum und f eine beliebige Funktion aus $M_\infty(G \setminus \{0\})$. Weiter sei ϕ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$. Nach dem Satz von Runge existiert eine Folge $\{r_k\}$ rationaler Funktionen mit

$$\max_K d(r_k(z), f(z)) < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da hierbei jedes $r_k \in M_\infty(\mathbb{C}^\times)$ ist, existiert nach Definition von $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{n_j^{(k)}\}$ in $\mathbb{N}$ mit

$$\max_K d(\phi(z\,\lambda_{n_j^{(k)}}), r_k(z)) < \frac{1}{j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Schließlich wählen wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in \mathbb{N}$ mit $j_k > j_{k-1}$, so dass die Folge $\{m_k\}$ mit $m_k := n_{j_k}^{(k)}$ monoton wachsend ist und erhalten insgesamt für jedes k

$$\max_K d(\phi(z\,\lambda_{m_k}), f(z)) \leq \max_K d(\phi(z\,\lambda_{m_k}), r_k(z)) + \max_K d(r_k(z), f(z)) < \frac{1}{j_k} + \frac{1}{k}.$$

Daher gilt $\max_K d(\phi(z\,\lambda_{m_k}), f(z)) \to 0$ für $k \to \infty$ und somit die Behauptung.

□

Lemma 3.1.7. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann gilt $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$. Insbesondere gilt also $\mathcal{U}_S \subset \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$.*

Beweis. Es sei $\phi \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ eine beliebige Funktion, wir zeigen, dass dann $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ folgt. Nach Definition 3.1.1 existiert zu jeder Funktion $f \in M(\mathbb{C}^\times)$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{sphärisch kompakt auf } \mathbb{C}^\times \quad (k \to \infty).$$

Hieraus folgt wegen Satz 1.2.17 unmittelbar

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C}^\times \setminus P_f \quad (k \to \infty),$$

wobei P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnet. Da $f \in M(\mathbb{C}^\times)$ beliebig war, ist dies nach Lemma 3.1.3 äquivalent dazu, dass $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ gilt.

□

Hieraus können wir nun unmittelbar folgern, dass auch die Menge der $\mathcal{V}$-streckungsuniversellen Funktionen residual ist.

Satz 3.1.8. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann ist die Menge $\mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$.*

Beweis. Gemäß Satz 3.1.5 ist die Menge $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$. Da nach Lemma 3.1.7 gilt $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\}) \subset \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, folgt die Behauptung. □

Somit ist nun bewiesen, dass sowohl die Menge der $\mathcal{V}$-streckungsuniversellen, als auch die Menge der streckungsuniversellen meromorphen Funktionen jeweils eine in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ residuale Menge darstellen. Da dies auch für die entsprechenden Mengen der $\mathcal{V}$-translationsuniversellen und translationsuniversellen meromorphen Funktionen gezeigt werden konnte, folgt leicht das folgende Ergebnis, welches im Wesentlichen alle bisherigen Existenzaussagen enthält.

Korollar 3.1.9. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann sind die Mengen $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\}) \cap \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ und $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\}) \cap \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$. Insbesondere sind die Mengen $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}} \cap \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{U}_T \cap \mathcal{U}_S$ residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Residualität der Mengen $\mathcal{U}_T^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, $\mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$, $\mathcal{U}_T(\{\lambda_n\})$ und $\mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$, sowie dem Satz von Baire. □

3.2 Eigenschaften streckungsuniverseller Funktionen

Nachdem die Frage nach der Existenz meromorpher streckungsuniverseller Funktionen nun vollständig geklärt ist, wollen wir die Eigenschaften solcher Funktionen untersuchen. Auch hier können wir uns häufig auf $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktionen beschränken, da die entsprechenden Aussagen nach Lemma 3.1.7 dann auch für streckungsuniverselle Funktionen gelten.

Zunächst einmal zeigen wir, dass Streckungsuniversalität bezüglich einer unbeschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ unmittelbar die Universalität bezüglich jeder Folge impliziert, welche durch Streckung von $\{\lambda_n\}$ hervorgeht. Wiederum beachte man, dass mit K auch die Menge $z_0\, K = \{w : w = z_0\, z, z \in K\}$ in $\mathcal{V}$ liegt.

Lemma 3.2.1. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger Punkt.*

(i) Ist $\phi_1 \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ so gilt auch $\phi_1(\cdot\, z_0) \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$.

(ii) Ist $\phi_2 \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ so gilt auch $\phi_2(\cdot\, z_0) \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$.

Beweis. Es seien K_1 und K_2 kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}^\times$ mit $K_1 \in \mathcal{V}$, weiter seien $f_1 \in A(K_1)$ und $f_2 \in M_\infty(\mathbb{C}^\times)$. Wir setzen

$$\tilde{K}_1 := z_0 \, K_1 \quad \text{und} \quad g_1(z) := f_1\big(\frac{z}{z_0}\big),$$

sowie

$$\tilde{K}_2 := z_0 \, K_2 \quad \text{und} \quad g_2(z) := f_2\big(\frac{z}{z_0}\big).$$

Es folgt zunächst $\tilde{K}_1 \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin \tilde{K}_1$, und $g_1 \in A(\tilde{K}_1)$, so dass nach Voraussetzung zu $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\max_{\tilde{K}_1} |\phi_1(w\,\lambda_{N_1}) - g_1(w)| < \varepsilon.$$

Mit der Substitution $z = \frac{w}{z_0}$ folgt hieraus

$$\max_{K_1} |\phi_1(z\,z_0\,\lambda_{N_1}) - g_1(z\,z_0)| < \varepsilon,$$

und somit wegen $g_1(z\,z_0) = f_1(z)$ die erste Behauptung.

Weiter existiert nach Voraussetzung zu $\varepsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{\tilde{K}_2} d(\phi_2(w\,\lambda_{N_2}), g_2(w)) < \varepsilon,$$

woraus auf die gleiche Weise mit der Substitution $z = \frac{w}{z_0}$ wegen $g_2(z\,z_0) = f_2(z)$ die zweite Behauptung folgt.

□

Bemerkung 3.2.2. *Aus Lemma 3.2.1 lässt sich eine interessante Folgerung ziehen. Ist nämlich $\phi \in M(\mathbb{C})$ streckungsuniversell bezüglich einer Folge, welche auf einer Geraden γ mit $0 \in \gamma$ liegt, so folgt unmittelbar, dass zu jeder Geraden Γ mit $0 \in \Gamma$ eine Folge auf dieser Geraden existiert, bezüglich der ϕ ebenfalls streckungsuniversell ist.*

Analog zum translationsuniversellen Fall werden wir nun zeigen, dass die Streckungsuniversalität einer Funktion ϕ sich gewissermaßen auf $\frac{1}{\phi}$ überträgt.

Lemma 3.2.3. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen, weiter seien $\phi_1 \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ und $\phi_2 \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $K \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und zu jedem $f \in A(K)$ mit $f(z) \neq 0$ auf K existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen, so dass gilt

$$\frac{1}{\phi_1(z\,\lambda_{n_k})} \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

(ii) Es gilt $\frac{1}{\phi_2} \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.2.2. Die Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ ist aus $A(K)$ mit $m_g := \min_K |g(z)| > 0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert nach Voraussetzung zu $\delta := \min\left\{\frac{m_g}{2}, \varepsilon\,\frac{m_g^2}{2}\right\}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_K |\phi_1(z\,\lambda_{n_0}) - g(z)| < \delta,$$

woraus wir mit der gleichen Argumentation wie in Lemma 2.2.2 erhalten

$$\max_K \left| \frac{1}{\phi_1(z\,\lambda_{n_0})} - \frac{1}{g(z)} \right| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt wegen $\frac{1}{g} = f$ die Behauptung.

Ist $K \subset \mathbb{C}^\times$ ein beliebiges Kompaktum und f eine Funktion aus $M_\infty(\mathbb{C}^\times)$, so ist die Funktion $g := \frac{1}{f}$ ebenfalls aus $M_\infty(\mathbb{C}^\times)$, so dass wegen $\phi_2 \in \mathcal{U}_S(\{\lambda_n\})$ eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ existiert mit

$$\max_K d(\phi_2(z\,\lambda_{n_k}), g(z)) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wegen $d(z_1, z_2) = d(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$ folgt hieraus

$$\max_K d\left(\frac{1}{\phi_2(z\,\lambda_{n_k})}, \frac{1}{g(z)}\right) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

und somit wegen $\frac{1}{g} = f$ die Behauptung.

□

Im nächsten Lemma werden wir sehen, dass auch Streckungsuniversalität nicht auf Ableitungen übertragbar ist.

Lemma 3.2.4. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und* $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ *eine* $\mathcal{V}$*-streckungsuniverselle Funktion. Dann ist die Funktion* ϕ' *nicht* $\mathcal{V}$*-streckungsuniversell.*

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der entsprechende Teil im Beweis von Lemma 2.2.3. Wir setzen $K := \{z : |z| = 1\}$ und betrachten die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$. Offenbar gilt dann $K \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und $f \in A(K)$. Nehmen wir nun an, die meromorphe Funktion ϕ' wäre $\mathcal{V}$-streckungsuniversell, so erhalten wir die Existenz einer Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi'(z\,\lambda_{n_k}) \to f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz folgt hieraus

$$\int\limits_{|z|=1} \phi'(z\,\lambda_{n_k})\,dz \to \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \quad (k \to \infty).$$

Nach dem Residuensatz ist das linke Integral hierbei für jedes k gleich dem $2\pi i$-fachen der Summe der Residuen von $\phi'(z\,\lambda_{n_k})$ an den Polstellen in $\{|z| < 1\}$. Da $\phi'(z\,\lambda_{n_k})$ für jedes k die Ableitung der meromorphen Funktion $\varphi_k(z) := \frac{1}{\lambda_{n_k}}\,\phi(z\,\lambda_{n_k})$ darstellt, sind alle Residuen von $\phi'(z\,\lambda_{n_k})$ gleich 0, so dass der Wert dieses Integrals für jedes k gleich 0 ist und wir einen Widerspruch erhalten

□

Bemerkung 3.2.5. *Wie im Fall der $\mathcal{V}$-Translationsuniversalität, können wir auch hier folgern, dass bei $\mathcal{V}$-streckungsuniversellen Funktionen nicht alle Residuen gleich* 0 *sein können, so dass auch diese Funktionen in $\mathbb{C}$ keine Stammfunktionen besitzen.*

In Satz 2.2.7 haben wir gesehen, dass die Folge der Translationen bei $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen in gewisser Weise eine universelle Verteilung von Häufungspunkten besitzt. Zudem wurde deutlich, dass dies für jede Funktionenfolge $\{f_n\}$ gilt, für welche zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass $\{f_{n_k}\}$ auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Nun ist nicht klar, ob ein entsprechendes Ergebnis auch im streckungsuniversellen Fall gilt, da (sowohl holomorphe als auch meromorphe) streckungsuniverselle Funktionen nicht die Eigenschaft besitzen, auf jedem $K \in \mathcal{M}$ jedes $f \in A(K)$ gleichmäßig durch Streckungen approximieren zu können, sondern lediglich auf Kompakta $K \in \mathcal{M}$, welche den Nullpunkt nicht enthalten. Wir wollen nun zeigen, dass das Ergebnis durch eine Modifikation des Beweises von Satz 2.2.7 dennoch zumindest auf den meromorphen Fall übertragen werden kann. Zunächst beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.2.6. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktion. Dann nimmt ϕ jedes $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ an abzählbar vielen Stellen als Funktionswert an.*

Beweis. Wir setzen $D := \{z : |z-1| \le \frac{1}{2}\}$ und betrachten zunächst den Fall $w \in \mathbb{C}$. Die Funktion $f(z) := z - 1 + w$ ist aus $A(D)$, so dass wegen $D \in \mathcal{M}$ und $0 \notin D$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) \to z - 1 + w \quad \text{gleichmäßig auf } D \quad (k \to \infty),$$

und somit auch

$$\phi(z\,\lambda_{n_k}) - w \to z - 1 \quad \text{gleichmäßig auf } D \quad (k \to \infty).$$

Nach dem Satz von Hurwitz existiert dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und eine Folge $\{\zeta_k\}$ mit $\zeta_k \to 1$ für $k \to \infty$, so dass für jedes $k > k_0$ gilt $\phi(\zeta_k \, \lambda_{n_k}) = w$. Wegen $\zeta_k \to 1$ und der Unbeschränktheit der Folge $\{\lambda_{n_k}\}$ ist die Menge $\{\zeta_k \, \lambda_{n_k} : k > k_0\}$ abzählbar, so dass die Behauptung folgt.

Im Fall $w = \infty$ betrachten wir die Funktion $g(z) := \frac{1}{z-1}$. Wir beachten, dass wegen $\partial D = \{z : |z-1| = \frac{1}{2}\} \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin \partial D$ und $g \in A(\partial D)$ eine Folge $\{m_k\}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\phi(z \, \lambda_{m_k}) \to \frac{1}{z-1} \quad \text{gleichmäßig auf } \partial D \quad (k \to \infty),$$

und somit auch

$$\int_{\partial D} \phi(z \, \lambda_{m_k}) \, dz \to \int_{\partial D} \frac{1}{z-1} \, dz = 2\pi i \quad (k \to \infty).$$

Folglich existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Summe der Residuen von $\phi(z \, \lambda_{m_k})$ an den Polstellen in $\{z : |z-1| < \frac{1}{2}\}$ für jedes $k > k_0$ ungleich 0 ist. Insbesondere muss zu jedem $k > k_0$ (mindestens) ein $\zeta_k \in \{z : |z-1| < \frac{1}{2}\}$ existieren, so dass $\phi(\zeta_k \, \lambda_{m_k}) = \infty$ gilt. Da die Menge $\{\zeta_k \, \lambda_{m_k} : k > k_0\}$ wegen der Unbeschränktheit von $\{\lambda_{m_k}\}$ abzählbar ist, folgt die Behauptung.

□

Satz 3.2.7. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktion. Dann existiert zu jedem $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ und zu jeder abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in E$ eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit*

$$H_w(\{\phi(z \, \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E.$$

Beweis. Es sei $E \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge mit $0 \in E$ und $E \neq \{0\}$. Wir werden zu $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ eine streng monoton wachsende Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen konstruieren, so dass $H_w(\{\phi(z \, \lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E$ gilt. Dazu setzen wir $n_1 := 1$ und nehmen an, dass für ein $k \geq 2$ die Zahlen $n_1, \ldots, n_{k-1}$ bereits bekannt sind. Wir betrachten die Menge

$$D_k := \left\{ z : \frac{1}{k} \leq |z| \leq k \right\},$$

welche offenbar ein Kompaktum aus $\mathcal{V}$ mit $0 \notin D_k$ ist, und $E \cap D_k \neq \emptyset$ für alle hinreichend großen k erfüllt. Wir überdecken die kompakte Menge $E \cap D_k$ mit einer endlichen Anzahl offener Kreise $U_{k1}, \ldots, U_{kv_k}$ mit Radius $\frac{1}{4k(k+1)}$, so dass $U_{kj} \cap (E \cap D_k) \neq \emptyset$ für alle $j = 1, \ldots, v_k$ gilt, und wählen paarweise verschiedene Punkte $z_{kj} \in U_{kj}$, wobei $j = 1, \ldots, v_k$.

(i) Wir betrachten nun zunächst den Fall $w \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Funktionen

$$P_k(z) := \prod_{j=1}^{v_k} (z - z_{kj}) \qquad \text{und} \qquad p_k(z) := P_k(z) + w,$$

diese sind offensichtlich Polynome, welche in $\mathbb{C}$ exakt die Punkte $z_{k1}, \ldots, z_{kv_k}$ als Null- bzw. als w-Stellen haben. Nach Konstruktion sind diese Punkte alle im Inneren der Menge D_{k+1} enthalten. Wegen $0 \notin D_{k+1} \in \mathcal{V}$ und $p_k \in A(D_{k+1})$, existiert nach Voraussetzung eine Folge $\{m_l\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z\,\lambda_{m_l}) \to p_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D_{k+1} \quad (l \to \infty),$$

und somit auch

$$\varphi(z\,\lambda_{m_l}) - w \to P_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } D_{k+1} \quad (l \to \infty).$$

Wir setzen

$$\varepsilon_k := \min\Big\{ \min_{\substack{1 \le i,j \le v_k \\ i \ne j}} |z_{ki} - z_{kj}|\,,\ \frac{1}{k(k+1)} \Big\}.$$

Aus dem Satz von Hurwitz und einer allgemeinen Version des Satzes von Rouché (siehe etwa Rudin [52], S.229, Aufgabe 24) folgt, dass ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $l > l_0$ die Funktion $\phi(z\,\lambda_{m_l})$ in D_{k+1} an exakt v_k Punkten $\zeta_{k1}^{(l)}, \ldots, \zeta_{kv_k}^{(l)}$ eine w-Stelle besitzt, für welche gilt

$$\max_{j=1,\ldots,v_k} \left| z_{kj} - \zeta_{kj}^{(l)} \right| < \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Schließlich wählen wir ein festes $l(k) > l_0$ mit $m_{l(k)} > n_{k-1}$ und setzen $n_k := m_{l(k)}$. Auf diese Weise erhalten wir unsere Folge $\{n_k\}$.

Nun ist zunächst einmal klar, dass $0 \in H_w(\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\})$ gilt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde ein $\varepsilon > 0$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass die Funktion $\phi(z\,\lambda_{n_k})$ für jedes $k > k_0$ keine w-Stelle in $U_\varepsilon(0) = \{z : |z| < \varepsilon\}$ hat. Aus der Unbeschränktheit der Folge $\{\lambda_{n_k}\}$ würde dann folgen, dass $\phi(z)$ in $\mathbb{C}$ keine w-Stelle hätte, was offenbar ein Widerspruch zu Lemma 3.2.6 ist. (Somit ist auch klar, dass die Aussage des Satzes auch im Fall $E = \{0\}$ gültig ist).
Es sei nun $z_0 \in E \setminus \{0\}$ ein beliebiger Punkt und $U_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\}$ sei die δ-Umgebung von z_0. Gemäß obiger Konstruktion der Folge $\{n_k\}$ hat die Funktion $\phi(z\,\lambda_{n_k})$ für jedes $k > |z_0|$ eine w-Stelle in $U_{\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{\varepsilon_k}{2}}(z_0) \subset U_{\frac{1}{k(k+1)}}(z_0)$. Hieraus folgt, dass der Punkt z_0 ein w-Stellenhäufungspunkt der Folge $\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ ist, und da $z_0 \in E \setminus \{0\}$ beliebig war, erhalten wir nun insgesamt

$$E \subset H_w(\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}). \tag{3.4}$$

Ist nun $z_1 \in E^c$ ein beliebiger Punkt und $\delta := \frac{\operatorname{dist}(z_1,E)}{2} > 0$, so gilt wiederum nach Konstruktion von $\{n_k\}$, dass $\phi(z\,\lambda_{n_k})$ für jedes $k > \max\{\frac{1}{\delta}, |z_1|\}$ keine w-Stelle in $U_\delta(z_1)$ hat. Somit ist z_1 kein w-Stellenhäufungspunkt der Folge $\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$, und wir erhalten

$$E \supset H_w(\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}). \tag{3.5}$$

Aus (3.4) und (3.5) folgt jetzt die Behauptung im Fall $w \in \mathbb{C}$.

(ii) Zum Nachweis der Aussage im Fall $w = \infty$ betrachten wir die rationale Funktion $R_k(z) := \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{z - z_{kj}}$, die in $\mathbb{C}$ exakt die Punkte $z_{k1}, \ldots, z_{kv_k}$ als Polstellen hat, welche nach Konstruktion alle im Inneren von D_{k+1} enthalten sind. Wir setzen wieder

$$\varepsilon_k := \min\left\{ \min_{\substack{1 \le i,j \le v_k \\ i \ne j}} |z_{ki} - z_{kj}|\,,\ \frac{1}{k(k+1)} \right\},$$

und definieren für $j = 1, \ldots, v_k$ die folgenden Mengen

$$B_j^k := \left\{ z : |z - z_{kj}| < \frac{\varepsilon_k}{4} \right\},$$

welche offenbar $B_j^k \cap B_i^k = \emptyset$ für $j \ne i$ erfüllen, zudem beachte man, dass $B_j^k \subset D_{k+1}$ für $j = 1, \ldots, v_k$ gilt. Schließlich setzen wir $C_k := D_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{v_k} B_j^k$. Es folgt $C_k \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin C_k$ und $R_k \in A(C_k)$, so dass nach Voraussetzung eine Folge $\{m_l\}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\phi(z\,\lambda_{m_l}) \to R_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } C_k \quad (l \to \infty).$$

Insbesondere erhalten wir für jedes (feste) $j \in \{1, \ldots, v_k\}$

$$\phi(z\,\lambda_{m_l}) \to R_k(z) \quad \text{gleichmäßig auf } \partial B_j^k = \left\{ z : |z - z_{kj}| = \frac{\varepsilon_k}{4} \right\} \quad (l \to \infty),$$

und somit auch

$$\int_{\partial B_j^k} \phi(z\,\lambda_{m_l})\,dz \to \int_{\partial B_j^k} R_k(z)\,dz = \sum_{p=1}^{v_k} \int_{\partial B_j^k} \frac{1}{z - z_{kp}}\,dz = \int_{\partial B_j^k} \frac{1}{z - z_{kj}} = 2\pi\,i \quad (l \to \infty).$$

Hieraus folgt, dass zu jedem $j \in \{1, \ldots, v_k\}$ ein $l_j \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\phi(z\,\lambda_{m_l})$ für jedes $l > l_j$ eine Polstelle in $\{z : |z - z_{kj}| < \frac{\varepsilon_k}{4}\}$ hat. Folglich existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\phi(z\,\lambda_{m_l})$ für jedes $l > l_0$ und für jedes $j \in \{1, \ldots, v_k\}$ (mindestens) eine Polstelle in B_j^k, und keine Polstelle in C_k hat. Schließlich wählen wir ein festes $l(k) > l_0$ mit $m_{l(k)} > n_{k-1}$ und setzen $n_k := m_{l(k)}$. Auf diese Weise erhalten wir unsere Folge $\{n_k\}$. Der Nachweis, dass für diese Folge $H_\infty(\{\phi(z\,\lambda_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}) = E$ gilt, erfolgt auf analoge Weise wie im Fall $w \in \mathbb{C}$.

□

Hiermit können wir ähnlich wie im translationsuniversellen Fall das folgende Korollar beweisen. Da der Beweis nahezu identisch mit dem Beweis von Korollar 2.2.10 ist, werden wir an dieser Stelle darauf verzichten.

Korollar 3.2.8. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktion. Dann gilt:*

(i) Es ist $H_w(\{\phi(z\,\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{C}$ *für alle* $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

(ii) Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ *liegt die Menge* $\{\phi(z_0\,\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* $\mathbb{C}$.

(iii) Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi(z\,\lambda_n) : z \in U_\varepsilon(z_0)\} = \widetilde{\mathbb{C}}.$$

Vergleicht man die obigen Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten aus Kapitel 2.2, so sieht man, dass streckungsuniverselle Funktionen ähnliche Eigenschaften in Bezug auf die Werteverteilung besitzen wie translationsuniverselle Funktionen.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir uns mit dem Verhalten streckungsuniverseller Funktionen entlang unbeschränkter Kurven beschäftigen. Wir werden sehen, dass diese Funktionen sich hierbei erheblich von translationsuniversellen Funktionen unterscheiden. Zunächst aber benötigen wir folgende Definition, welche auch im nächsten Kapitel von großer Bedeutung sein wird.

Definition 3.2.9. *Es sei* $g : [0,1) \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion mit* $\overline{\lim}_{t \to 1^-} g(t) = \infty$. *Dann nennen wir* $\gamma := \{z : z = g(t)$ *für ein* $t \in [0,1)\}$ *eine unbeschränkte Kurve.*

Eine unbeschränkte Kurve γ ist somit eine „Kurve" in $\mathbb{C}$, so dass eine Folge $\{z_n\}$ komplexer Zahlen auf γ (d.h. $z_n \in \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ existiert. Wir werden nun beweisen, dass $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle meromorphe Funktionen die Eigenschaft haben, auf jeder unbeschränkten Kurve jedem Wert beliebig nahe zu kommen.

Satz 3.2.10. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und* $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ *eine* $\mathcal{V}$*-streckungsuniverselle Funktion. Dann existiert zu jeder unbeschränkten Kurve* γ *und zu jedem* $a \in \mathbb{C}$ *eine Folge* $\{z_k\}$ *auf* γ *mit* $z_k \to \infty$, *so dass gilt*

$$\phi(z_k) \to a \quad (k \to \infty).$$

Insbesondere liegt das Bild jeder unbeschränkten Kurve unter der Abbildung ϕ *dicht in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei γ eine beliebige unbeschränkte Kurve und $a \in \mathbb{C}$ ein fester Wert. Wir setzen

$$K := \{z : |z| = 1\} \quad \text{und} \quad f(z) \equiv a.$$

Offenbar gilt dann $K \in \mathcal{V}$ mit $0 \notin K$ und $f \in A(K)$, so dass nach Voraussetzung eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\max_K |\phi(z\,\lambda_{n_k}) - f(z)| = \max_K |\phi(z\,\lambda_{n_k}) - a| < \frac{1}{k}.$$

Mit der Substitution $w = z\,\lambda_{n_k}$ erhalten wir hieraus für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{\{|w|=|\lambda_{n_k}|\}} |\phi(w) - a| < \frac{1}{k}.$$

Da die Kurve γ nach Voraussetzung unbeschränkt ist, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\gamma \cap \{z : |z| = |\lambda_{n_k}|\} \neq \emptyset$ für jedes $k > k_0$. Zu jedem solchen k wählen wir nun einen Punkt $z_k \in (\gamma \cap \{z : |z| = |\lambda_{n_k}|\})$ und erhalten auf diese Weise eine Folge $\{z_k\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ auf γ mit $z_k \to \infty$. Weiter gilt für jedes $k > k_0$

$$|\phi(z_k) - a| \leq \max_{\{|w|=|\lambda_{n_k}|\}} |\phi(w) - a| < \frac{1}{k},$$

und somit $\phi(z_k) \to a$ für $k \to \infty$.

□

Aus diesem Satz folgt noch unmittelbar das folgende Ergebnis.

Korollar 3.2.11. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und $\phi \in \mathcal{U}_S^{\mathcal{V}}(\{\lambda_n\})$ eine $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktion. Dann ist ϕ auf jeder unbeschränkten Kurve γ unbeschränkt.*

Beweis. Wir nehmen an, es existiere eine unbeschränkte Kurve γ, auf welcher ϕ beschränkt ist, das heißt es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$|\phi(z)| < M \quad \text{für alle } z \in \gamma. \tag{3.6}$$

Nach Satz 3.2.10 existiert zu $M + 1$ eine Folge $\{z_k\}$ auf γ mit

$$\phi(z_k) \to M + 1 \quad (k \to \infty),$$

woraus wir unmittelbar einen Widerspruch zu (3.6) erhalten.

□

Bemerkung 3.2.12.

(i) Da die Menge der $\mathcal{V}$-streckungsuniversellen meromorphen Funktionen residual in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ ist, folgt aus obigem Satz, dass dies ebenfalls für die Menge der meromorphen Funktionen gilt, welche auf jeder unbeschränkten Kurve jedem Wert beliebig nahe kommen. Aus der Residualität der Menge der $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen und dem Satz von Baire folgt dann wiederum, dass auch die Menge der Funktionen, welche $\mathcal{V}$-translationsuniversell und gleichzeitig auf jeder unbeschränkten Kurve jedem Wert beliebig nahe kommen, residual in $M_\infty(\mathbb{C})$ ist. Dennoch gelten die obigen Ergebnisse nicht für alle $\mathcal{V}$-translationsuniversellen Funktionen, da man leicht zeigen kann, dass $\mathcal{V}$-translationsuniverselle Funktionen konstruiert werden können, welche auf gewissen unbeschränkten Kurven beschränkt sind, und somit insbesondere nicht die Eigenschaft aus Satz 3.2.10 erfüllen können.

(ii) *Weiter sei bemerkt, dass das obige Ergebnis auch einen Unterschied zu holomorphen streckungsuniversellen Funktionen aufweist. Vogt [57] hat nämlich gezeigt, dass zwar einerseits zu jeder unbeschränkten Folge* $\{\lambda_n\}$ *eine in* $H(\mathbb{C})$ *residuale Menge an holomorphen streckungsuniversellen Funktionen existiert, welche auf jeder unbeschränkten Kurve unbeschränkt sind, andererseits konnte er aber auch zeigen, dass stets eine bezüglich* $\{\lambda_n\}$ *streckungsuniverselle Funktion existiert, welche auf einer unbeschränkten Kurve* γ *beschränkt ist. Gemäß obigem Satz ist dies im meromorphen Fall nicht möglich.*

Kapitel 4

Universelle Eigenschaften entlang beliebiger Kurven

Die Funktionen die wir bisher behandelt haben, haben stets die Eigenschaft, dass sie bezüglich einer vorgegebenen unbeschränkten Folge gewisse Universalitätseigenschaften besitzen. In diesem Kapitel werden wir uns mit meromorphen Funktionen beschäftigen, welche bezüglich „sehr vieler“ unbeschränkter Folgen universell sind. Im Wesentlichen werden wir Funktionen konstruieren, so dass zu jeder unbeschränkten Kurve eine Folge auf dieser Kurve existiert, entlang welcher die Funktionen gewisse universelle Eigenschaften besitzen.

4.1 Universelle Approximation von Konstanten entlang beliebiger Kurven

In diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz meromorpher Funktionen, welche entlang beliebiger unbeschränkter Kurven universelle Approximationseigenschaften haben. Da wir solche Funktionen auch in Gebieten betrachten werden, müssen wir zunächst einmal den bereits in Definition 3.2.9 eingeführten Begriff einer in $\mathbb{C}$ unbeschränkten Kurve auf allgemeine Gebiete erweitern, das gleiche gilt für den Begriff der unbeschränkten Folge. Zudem werden wir erklären, was wir unter *strikt unbeschränkten* Kurven und Folgen verstehen.

Definition 4.1.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, weiter seien $\{\lambda_n\}$ eine Folge in G und $g : [0,1) \to G$ eine stetige Abbildung.*

(i) Falls zu jedem Kompaktum $K \subset G$ eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen existiert, so dass $\lambda_{n_k} \in G \setminus K$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, so nennen wir $\{\lambda_n\}$ eine (in G) unbeschränkte Folge.

(ii) *Falls zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein $n_K \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\lambda_n \in G \setminus K$ für jedes $n > n_K$ gilt, so nennen wir $\{\lambda_n\}$ eine (in G) strikt unbeschränkte Folge.*

(iii) *Falls zu jedem Kompaktum $K \subset G$ eine Folge $\{u_n\}$ in $[0,1)$ mit $u_n \to 1$ existiert, so dass $g(u_n) \in G \setminus K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so nennen wir $\gamma := \{z : z = g(u), u \in [0,1)\}$ eine (in G) unbeschränkte Kurve.*

(iv) *Falls zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein $u_K \in [0,1)$ existiert, so dass $g(u) \in G \setminus K$ für jedes $u \in [0,1)$ mit $u > u_K$ gilt, so nennen wir $\gamma := \{z : z = g(u), u \in [0,1)\}$ eine (in G) strikt unbeschränkte Kurve.*

Offenbar ist jede strikt unbeschränkte Folge (bzw. Kurve) auch unbeschränkt. Zudem beachte man, dass diese Definition im Fall $G = \mathbb{C}$ mit der in Kapitel 3 gegebenen Definition 3.2.9 einer unbeschränkten Kurve übereinstimmt. Bevor wir zu unserem ersten Ergebnis kommen, führen wir zur Vereinfachung noch folgende Menge ein, auf welche wir in den Beweisen dieses Kapitels zurückgreifen werden.

Definition 4.1.2. *Es sei $\{a_l\}$ eine Abzählung aller komplexen Zahlen, welche rationalen Real- und Imaginärteil haben. Für $l \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $p_{l,j}(z) := \frac{a_l}{j!} z^j$ und bezeichnen mit $\mathcal{Q}$ die Menge all dieser Funktionen.*

Offensichtlich ist die Menge $\mathcal{Q}$ abzählbar mit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Zudem sieht man leicht, dass bei festem l für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $p_{l,j}^{(j)}(z) = a_l$.

In unserem ersten Satz werden wir nun eine meromorphe Funktion konstruieren, welche in gewisser Weise „entlang jeder unbeschränkten Kurve kompakt in $\mathbb{C}$ gegen jede Konstante konvergiert".

Satz 4.1.3. *Es existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder unbeschränkten Kurve γ existiert eine strikt unbeschränkte Folge $\{z_n\}$ auf γ, so dass gilt:
Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, zu jedem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi^{(j)}(z + z_{n_k}) \to a \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Menge

$$D_n := \{z : n^2 \le |z| \le n^2 + 2n\}.$$

Weiter sei $\{q_n\}$ eine Abzählung der in Definition 4.1.2 eingeführten Menge $\mathcal{Q}$, in welcher jedes q_n unendlich oft vorkommt. Auf der in $\mathbb{C}$ abgeschlossenen Menge $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ definieren wir folgende Funktionen

$$\begin{aligned} g(z) &:= q_n(z) \quad \text{für } z \in D_n, \\ \epsilon(z) &:= \frac{1}{n} \quad \text{für } z \in D_n. \end{aligned}$$

Die Funktion g liegt dann in $H(E)$, weiter ist auch ϵ aus $H(E)$ mit $\epsilon(z) > 0$. Nach Lemma 1.2.10 existiert eine Funktion $\phi \in M(\mathbb{C}) \cap H(E)$ mit

$$|g(z) - \phi(z)| < \epsilon(z) \quad \text{für alle } z \in E.$$

Folglich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{D_n} |q_n(z) - \phi(z)| < \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Es sei nun eine beliebige unbeschränkte Kurve γ gegeben. Dann existiert ein $n_\gamma \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma \cap D_n \neq \emptyset$ für jedes $n \geq n_\gamma$ gilt. Zu jedem $n > n_\gamma$ wählen wir ein $z_n \in (\gamma \cap D_n)$, so dass gilt

$$H_n := \left\{ z : |z - z_n| \leq \frac{3n}{4} \right\} \subset D_n,$$

was etwa für $z_n \in \gamma$ mit $|z_n| = n^2 + n$ erfüllt ist, wobei $n > n_\gamma$ ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^{\infty}$ auf γ, welche wegen $z_n \in D_n$ für alle $n > n_\gamma$ offenbar strikt unbeschränkt ist. Es bleibt zu zeigen, dass zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, jedem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ eine Teilfolge von $\{z_n\}$ mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

Dazu betrachten wir für jedes $n > n_\gamma$ die folgende Menge

$$K_n := \left\{ z : |z - z_n| \leq \frac{n}{2} \right\},$$

welche offenbar $K_n \subset H_n^\circ$ mit $dist(\partial K_n, \partial H_n) = \frac{n}{4}$ erfüllt. Daher ist für jedes $\zeta \in K_n$ die Menge $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{n}{4}\}$ in H_n enthalten. Aus (4.1) folgt für alle $n > n_\gamma$

$$\max_{H_n} |q_n(z) - \phi(z)| < \frac{1}{n}. \tag{4.2}$$

Es sei nun $\{a_l\}$ eine Abzählung aller komplexen Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil, weiter sei $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Nach Definition der Menge $\mathcal{Q}$ existiert dann eine Folge $\{n_l\}$ natürlicher Zahlen mit $n_l \to \infty$, so dass $q_{n_l}^{(j)}(z) = a_l$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ gilt. Weiter gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_l > n_\gamma$ für jedes $l > l_0$ gilt. Aus (4.2) folgt für jedes solche l

$$\max_{H_{n_l}} |q_{n_l}(z) - \phi(z)| < \frac{1}{n_l}. \tag{4.3}$$

Es sei nun ein $l > l_0$ und $\zeta \in K_{n_l}$ ein beliebiger Punkt. Dann ist die Funktion $q_{n_l}(z) - \phi(z)$ holomorph in $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{n_l}{4}\}$ und wegen $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{n_l}{4}\} \subset H_{n_l}$ folgt aus (4.3)

$$\max_{\{z:|z-\zeta|\leq \frac{n_l}{4}\}} |q_{n_l}(z) - \phi(z)| < \frac{1}{n_l},$$

so dass wir schließlich mit der Cauchyschen Ungleichung erhalten

$$\left|q_{n_l}^{(j)}(\zeta) - \phi^{(j)}(\zeta)\right| = \left|a_l - \phi^{(j)}(\zeta)\right| \leq j! \left(\frac{4}{n_l}\right)^j \frac{1}{n_l} =: c(j)\, \frac{1}{n_l^{j+1}}.$$

Da dies für alle $\zeta \in K_{n_l}$ gilt, folgt insgesamt für $l > l_0$

$$\max_{K_{n_l}} \left|a_l - \phi^{(j)}(z)\right| \leq c(j)\, \frac{1}{n_l^{j+1}}.$$

Mit der Substitution $w = z - z_{n_l}$ ergibt sich somit für jedes $l > l_0$

$$\max_{\{w:|w|\leq \frac{n_l}{2}\}} \left|a_l - \phi^{(j)}(w + z_{n_l})\right| \leq c(j)\, \frac{1}{n_l^{j+1}}. \tag{4.4}$$

Ist nun ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$ gegeben, so existiert nach Definition der Folge $\{a_l\}$ eine Folge $\{l_k\}$ natürlicher Zahlen mit $l_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und

$$|a_{l_k} - a| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Dabei existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $l_k > l_0$ und somit $n_{l_k} > n_\gamma$ für jedes $k > k_0$ gilt. Folglich ist $\{z_{n_{l_k}}\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^{\infty}$.

Ist schließlich $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Kompaktum, so existiert ein $c_K \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset \{z : |z| \leq \frac{n_{l_k}}{2}\}$ für jedes $k > c_K$ gilt. Wegen (4.4) und (4.5) erhalten wir schließlich für jedes $k > \max\{k_0, c_K\}$

$$\begin{aligned}
\max_K \left|\phi^{(j)}(z + z_{n_{l_k}}) - a\right| &\leq \max_K \left|\phi^{(j)}(z + z_{n_{l_k}}) - a_{l_k}\right| + |a_{l_k} - a| \\
&< \max_{\left\{z:|z|\leq \frac{n_{l_k}}{2}\right\}} \left|\phi^{(j)}(z + z_{n_{l_k}}) - a_{l_k}\right| + \frac{1}{k} \\
&\leq c(j)\, \frac{1}{n_{l_k}^{j+1}} + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\max_K \left|\phi^{(j)}(z + z_{n_{l_k}}) - a\right| \to 0$ für $k \to \infty$, und somit die gleichmäßige Konvergenz auf K. Hierbei ist $\{z_{n_{l_k}}\}_{k=\max\{k_0,c_K\}+1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^{\infty}$, wobei $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^{\infty}$ nach Konstruktion eine Folge auf der Kurve γ ist. Da $j \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ und das Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ beliebig waren, ist der Satz bewiesen.

□

Die obige Funktion ϕ hat die Eigenschaft, dass zu jeder unbeschränkten Kurve eine Folge auf dieser Kurve existiert, bezüglich welcher ϕ eine gewisse Art von Translationsuniversalität besitzt, da jede Konstante auf jedem Kompaktum gleichmäßig durch geeignete Translationen bezüglich dieser Folge approximiert werden kann. Man kann fragen, ob auch stärkere Universalitätseigenschaften entlang beliebiger Kurven möglich sind, und ob auch nichtkonstante Funktionen auf gewissen Kompakta approximiert werden können. Wir werden zunächst leicht zeigen, dass dies zumindest im holomorphen Fall nicht möglich ist, später werden wir sehen, dass auch keine anderen Funktionen entlang jeder unbeschränkten Kurve translationsuniversell im Sinne von Satz 1.3.2 sein können. Zunächst einmal führen wir den Begriff des *asymptotischen Werts* einer Funktion ein, welchen wir auch im nächsten Abschnitt benötigen werden.

Definition 4.1.4. *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion. Ein Wert $a \in \widetilde{\mathbb{C}}$ heißt asymptotischer Wert von ϕ, falls eine strikt unbeschränkte Kurve γ existiert mit*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \gamma}} \phi(z) = a.$$

Weiterhin benötigen wir das folgende klassische Ergebnis, welches auf Iversen [26] zurückgeht, zum Beweis siehe etwa Goldberg und Ostrovskii [19], S. 171-172.

Satz 4.1.5 (Iversen, 1914). *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine transzendente meromorphe Funktion. Ist der Wert $a \in \widetilde{\mathbb{C}}$ ein Picardscher Ausnahmewert von ϕ, d.h. ist die Anzahl der a-Stellen von ϕ in $\mathbb{C}$ endlich, so ist a ein asymptotischer Wert von ϕ. Insbesondere besitzt jede nichtkonstante ganze Funktion den Wert ∞ als asymptotischen Wert.*

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass zumindest keine ganze Funktion entlang jeder unbeschränkten Kurve translationsuniversell sein kann.

Korollar 4.1.6. *Es gibt keine ganze Funktion φ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder strikt unbeschränkten Kurve γ, zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{z_n\}$ auf γ mit

$$\varphi(z + z_n) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (n \to \infty).$$

Beweis. Nach dem Satz von Iversen existiert zu jeder (nichtkonstanten) ganzen Funktion φ eine strikt unbeschränkte Kurve γ mit

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \gamma}} \varphi(z) = \infty.$$

Offenbar kann φ entlang dieser Kurve nicht die gewünschte Eigenschaft besitzen.

□

Bemerkung 4.1.7. *Obwohl das obige Korollar besagt, dass keine ganze Funktion entlang jeder (strikt) unbeschränkten Kurve translationsuniversell sein kann, konnten sowohl Tenthoff [55] als auch Costakis und Sambarino [10] zeigen, dass ganze Funktionen φ existieren, so dass zu jeder Geraden γ, zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ eine Folge $\{z_n\}$ auf γ existiert, so dass $\{\varphi(z+z_n)\}$ auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Mayenberger [44] zeigte ein entsprechendes Ergebnis für gewisse andere überabzählbare Familien unbeschränkter Kurven.*

Im folgenden Ergebnis werden wir Korollar 4.1.6 verschärfen und zeigen, dass keine Funktion mit der Eigenschaft existiert, entlang jeder unbeschränkten Kurve translationsuniversell zu sein.

Satz 4.1.8. *Es gibt keine Funktion $\phi : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder strikt unbeschränkten Kurve γ, zu jedem $K \in \mathcal{M}$ und zu jedem $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{z_n\}$ auf γ mit*

$$\phi(z+z_n) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (n \to \infty).$$

Beweis. Wir nehmen an, ϕ wäre eine solche Funktion und setzen

$$\gamma := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad K := \overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\} \quad \text{und} \quad f(z) := z.$$

Weiter sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Nach Voraussetzung gilt dann

$$M := \big\{x \in \gamma : \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |\phi(z+x) - z| < \frac{\varepsilon}{2}\big\} \neq \emptyset.$$

Wir betrachten nun die folgende Menge

$$\Gamma := \{z : z \in \gamma, \operatorname{dist}(z, M) \geq \varepsilon\} \cup \{z : \operatorname{dist}(z, M) = \varepsilon, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}.$$

Es folgt, dass Γ eine strikt unbeschränkte Kurve ist, welche $\Gamma \cap M = \emptyset$ erfüllt. Gemäß Voraussetzung existiert also eine Folge $\{\zeta_n\}$ auf Γ mit

$$\phi(z+\zeta_n) \to z \quad \text{gleichmäßig auf } \overline{\mathbb{D}} \quad (n \to \infty),$$

insbesondere existiert ein $\zeta_0 \in \Gamma$ mit

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}} |\phi(z+\zeta_0) - z| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Nach Konstruktion muss hierbei $\zeta_0 \notin \gamma$ gelten, da ansonsten $\zeta_0 \in M$ sein müsste, was einen Widerspruch zu $\Gamma \cap M = \emptyset$ darstellen würde, folglich gilt $\zeta_0 \in \Gamma \setminus \gamma$. Betrachten wir nun (4.6) speziell im Punkt $z = 0$, so erhalten wir

$$|\phi(\zeta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.7}$$

Aus $\zeta_0 \in \Gamma \setminus \gamma$ folgt $\operatorname{dist}(\zeta_0, M) = \varepsilon < 1$, und somit die Existenz eines Punktes $\rho_0 \in M$ mit $\varepsilon \leq |\zeta_0 - \rho_0| < 1$. Somit gilt $\zeta_0 - \rho_0 \in \mathbb{D}$, zudem muss wegen $\rho_0 \in M$ auch $\max_{\overline{\mathbb{D}}} |\phi(z + \rho_0) - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ gelten, und es folgt

$$|\phi(\zeta_0) - (\zeta_0 - \rho_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit gilt nun insgesamt

$$\begin{aligned} |\phi(\zeta_0)| &= |(\zeta_0 - \rho_0) + \phi(\zeta_0) - (\zeta_0 - \rho_0)| \\ &\geq |\zeta_0 - \rho_0| - |\phi(\zeta_0) - (\zeta_0 - \rho_0)| \\ &\geq \varepsilon - |\phi(\zeta_0) - (\zeta_0 - \rho_0)| \\ &> \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu (4.7).

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch zeigen, dass wir Satz 4.1.3 mittels einer ähnlichen Beweistechnik auf einfach zusammenhängende Gebiete übertragen können.

Satz 4.1.9. *Es sei $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\{b_m\}$ eine beliebige reelle Nullfolge mit $b_m > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(G)$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder in G unbeschränkten Kurve γ existiert eine in G strikt unbeschränkte Folge $\{z_n\}$ auf γ, so dass gilt:
Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, zu jedem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ existieren Folgen $\{m_k\}$ und $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi^{(j)}(b_{m_k} z + z_{n_k}) \to a \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Da $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine konforme Abbildung ψ von $\mathbb{D}$ auf G. Wir setzen für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{ z : |z| = \frac{n}{n+1} \right\}$$

und

$$d_n := \operatorname{dist}(A_n, A_{n+1}) = \min_{\substack{a \in A_n \\ b \in A_{n+1}}} |a - b| = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

Weiter betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$B_n := \left\{ z : \frac{n}{n+1} - \frac{d_n}{2} \leq |z| \leq \frac{n}{n+1} + \frac{d_n}{2} \right\},$$

diese sind folglich in $\mathbb{D}$ enthaltene Kreisringe mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Mit Hilfe der konformen Abbildung ψ definieren wir nun

$$D_n := \psi(B_n) = \{z \in G : z = \psi(w) \text{ für ein } w \in B_n\}.$$

Dann ist jedes D_n eine kompakte, in G enthaltene Menge und es ist $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Ferner besteht für jedes n der Rand von D_n aus zwei disjunkten Jordankurven, welche wir mit $\partial_1 D_n$ und $\partial_2 D_n$ bezeichnen. Hiermit definieren wir schließlich noch eine Folge reeller Zahlen $\{h_n\}$ durch

$$h_n := \min_{\substack{z_1 \in \partial_1 D_n \\ z_2 \in \partial_2 D_n}} |z_1 - z_2| \,.$$

Offenbar ist $h_n > 0$ für jedes n und wegen $G \neq \mathbb{C}$ gilt zudem $h_n \to 0$ für $n \to \infty$.
Es sei nun $\{q_n\}$ eine Abzählung der in Definition 4.1.2 eingeführten Menge $\mathcal{Q}$, in welcher jedes q_n unendlich oft vorkommt. Auf der in G abgeschlossenen Menge $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ definieren wir folgende Funktionen

$$\begin{aligned} g(z) &:= q_n(z) \quad \text{für } z \in D_n, \\ \epsilon(z) &:= h_n^n \quad \text{für } z \in D_n. \end{aligned}$$

Die Funktion g liegt dann in $H(E)$, weiter ist auch ϵ aus $H(E)$ mit $\epsilon(z) > 0$. Gemäß Lemma 1.2.10 existiert eine Funktion $\phi \in M(G) \cap H(E)$ mit

$$|g(z) - \phi(z)| < \epsilon(z) \quad \text{für alle } z \in E.$$

Folglich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{D_n} |q_n(z) - \phi(z)| < h_n^n. \tag{4.8}$$

Es sei nun eine beliebige in G unbeschränkte Kurve γ gegeben. Dann existiert ein $n_\gamma \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma \cap D_n \neq \emptyset$ für jedes $n \geq n_\gamma$ gilt. Zu jedem $n > n_\gamma$ wählen wir ein $z_n \in (\gamma \cap D_n)$, so dass gilt

$$H_n := \left\{ z : |z - z_n| \leq \frac{3h_n}{8} \right\} \subset D_n.$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^{\infty}$ auf γ, welche wegen $z_n \in D_n$ für alle $n > n_\gamma$ offenbar strikt unbeschränkt ist. Es bleibt zu zeigen, dass zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, jedem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ Teilfolgen von $\{b_m\}$ und $\{z_n\}$ mit den gewünschten Eigenschaften existieren.
Dazu betrachten wir für jedes $n > n_\gamma$ die folgende Menge

$$K_n := \left\{ z : |z - z_n| \leq \frac{h_n}{4} \right\},$$

welche offenbar $K_n \subset H_n^\circ$ mit $dist(\partial K_n, \partial H_n) = \frac{h_n}{8}$ erfüllt. Daher ist für jedes $\zeta \in K_n$ die Menge $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{h_n}{8}\}$ in H_n enthalten. Aus (4.8) folgt für alle $n > n_\gamma$

$$\max_{H_n} |q_n(z) - \phi(z)| < h_n^n. \tag{4.9}$$

Es sei nun $\{a_l\}$ eine Abzählung aller komplexen Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil, weiter sei $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Nach Definition der Menge $\mathfrak{Q}$ existiert dann eine Folge $\{n_l\}$ natürlicher Zahlen mit $n_l \to \infty$, so dass $q_{n_l}^{(j)}(z) = a_l$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ gilt. Weiter gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_l > n_\gamma$ für jedes $l > l_0$ gilt. Aus (4.9) folgt für jedes solche l

$$\max_{H_{n_l}} |q_{n_l}(z) - \phi(z)| < h_{n_l}^{n_l}. \tag{4.10}$$

Es sei nun ein $l > l_0$ und $\zeta \in K_{n_l}$ ein beliebiger Punkt. Dann ist die Funktion $q_{n_l}(z) - \phi(z)$ holomorph in $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{h_{n_l}}{8}\}$ und wegen $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{h_{n_l}}{8}\} \subset H_{n_l}$ folgt aus (4.10)

$$\max_{\left\{z:|z-\zeta|\leq \frac{h_{n_l}}{8}\right\}} |q_{n_l}(z) - \phi(z)| < h_{n_l}^{n_l},$$

so dass wir schließlich mit der Cauchyschen Ungleichung erhalten

$$\left|q_{n_l}^{(j)}(\zeta) - \phi^{(j)}(\zeta)\right| = \left|a_l - \phi^{(j)}(\zeta)\right| \leq j! \left(\frac{8}{h_{n_l}}\right)^j h_{n_l}^{n_l} =: c(j)\, h_{n_l}^{n_l - j}.$$

Da dies für alle $\zeta \in K_{n_l}$ gilt, folgt insgesamt für jedes $l > l_0$

$$\max_{K_{n_l}} \left|a_l - \phi^{(j)}(z)\right| \leq c(j)\, h_{n_l}^{n_l - j}. \tag{4.11}$$

Die Folge $\{b_m\}$ ist nach Voraussetzung eine Nullfolge, daher können wir eine Teilfolge $\{b_{m_l}\}$ so wählen, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_{m_l} < \frac{h_{n_l}}{4\,l} \qquad \text{und somit auch} \qquad l < \frac{h_{n_l}}{4\,b_{m_l}}.$$

Hieraus erhalten wir für jedes $l \in \mathbb{N}$, dass $\{w : |w| \leq l\} \subset \{w : |w| \leq \frac{h_{n_l}}{4\,b_{m_l}}\}$ ist, so dass sich aus (4.11) mit der Substitution $w = \frac{1}{b_{m_l}}(z - z_{n_l})$ für jedes $l > l_0$ ergibt

$$\max_{\{w:|w|\leq l\}} \left|a_l - \phi^{(j)}(b_{m_l}\, w + z_{n_l})\right| \leq \max_{\left\{w:|w|\leq \frac{h_{n_l}}{4b_{m_l}}\right\}} \left|a_l - \phi^{(j)}(b_{m_l}\, w + z_{n_l})\right| \leq c(j)\, h_{n_l}^{n_l - j}. \tag{4.12}$$

Ist nun ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$ gegeben, so existiert nach Definition der Folge $\{a_l\}$ eine Folge $\{l_k\}$ natürlicher Zahlen mit $l_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und

$$|a_{l_k} - a| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Dabei existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $l_k > l_0$ und somit $n_{l_k} > n_\gamma$ für jedes $k > k_0$ gilt. Folglich ist $\{z_{n_{l_k}}\}_{k=k_0+1}^\infty$ eine Teilfolge von $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^\infty$.

Ist schließlich $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Kompaktum, so existiert ein $c_K \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset \{z : |z| \leq l_k\}$ für jedes $k > c_K$ gilt. Wegen (4.12) und (4.13) erhalten wir schließlich für jedes $k > \max\{k_0, c_K\}$

$$\begin{aligned}
\max_K \left|\phi^{(j)}(b_{m_{l_k}}\, z + z_{n_{l_k}}) - a\right| &\leq \max_K \left|\phi^{(j)}(b_{m_{l_k}}\, z + z_{n_{l_k}}) - a_{l_k}\right| + |a_{l_k} - a| \\
&< \max_{\{z:|z|\leq l_k\}} \left|\phi^{(j)}(b_{m_{l_k}}\, z + z_{n_{l_k}}) - a_{l_k}\right| + \frac{1}{k} \\
&\leq c(j)\, h_{n_{l_k}}^{n_{l_k}-j} + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Gemäß Definition der Folge $\{h_n\}$ folgt hieraus $\max_K \left|\phi^{(j)}(b_{m_{l_k}}\, z + z_{n_{l_k}}) - a\right| \to 0$ für $k \to \infty$, und somit die gleichmäßige Konvergenz auf K. Dabei ist $\{b_{m_{l_k}}\}$ eine Teilfolge von $\{b_m\}$ und $\{z_{n_{l_k}}\}_{k=\max\{k_0,c_K\}+1}^\infty$ eine Teilfolge von $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^\infty$, wobei $\{z_n\}_{n=n_\gamma+1}^\infty$ nach Konstruktion eine Folge auf der Kurve γ ist. Da $j \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ und das Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ beliebig waren, ist der Satz bewiesen.

□

4.2 Maximale cluster sets entlang unbeschränkter Kurven und Folgen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit sogenannten *cluster sets* von Funktionen beschäftigen. Eine ausführliche Darstellung dieses umfangreichen Themas findet man etwa bei Collingwood und Lohwater [8], hier werden wir nur kurz auf *maximale cluster sets* entlang unbeschränkter Kurven und Folgen eingehen, wobei wir zunächst einmal definieren werden, was darunter zu verstehen ist.

Definition 4.2.1. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ eine in G unbeschränkte Kurve und $\{\lambda_n\}$ eine in G unbeschränkte Folge. Weiter sei $\phi \in M(G)$ eine meromorphe Funktion.*

(i) Wir sagen die Funktion ϕ hat maximales cluster set entlang der Kurve γ, wenn zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine in G strikt unbeschränkte Folge $\{z_n\}$ auf γ existiert, so dass $\phi(z_n) \to a$ für $n \to \infty$ gilt.

(ii) Wir sagen die Funktion ϕ hat maximales cluster set entlang der Folge $\{\lambda_n\}$, wenn zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine strikt unbeschränkte Teilfolge $\{\lambda_{n_k}\}$ von $\{\lambda_n\}$ existiert, so dass $\phi(\lambda_{n_k}) \to a$ für $k \to \infty$ gilt.

Wir wollen daran erinnern, dass wir bereits am Ende von Kapitel 3 ein Ergebnis über maximale cluster sets bewiesen haben, indem wir in Satz 3.2.10 gezeigt haben, dass $\mathcal{V}$-streckungsuniverselle Funktionen die Eigenschaft haben, auf jeder unbeschränkten Kurve jedem Wert beliebig nahe zu kommen. Da die Menge dieser Funktionen residual in $M_\infty(\mathbb{C})$ ist, können wir mit obiger Definition also zunächst einmal leicht das folgende Ergebnis formulieren, welches sich auch bei Kierst und Szpilrajn [30] findet.

Korollar 4.2.2. *Die Menge der meromorphen Funktionen, welche auf jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set besitzen, ist residual in* $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$.

Im Folgenden werden wir in erster Linie zeigen, dass die in vorigem Abschnitt konstruierten Funktionen über interessante Eigenschaften in Bezug auf maximale cluster sets verfügen. Anschließend werden wir einige allgemeine Eigenschaften solcher Funktionen zusammenstellen. Zunächst einmal gehen wir in Satz 4.1.3 auf den Sonderfall $K = \{0\}$ ein, welcher uns unmittelbar das folgende Ergebnis liefert.

Korollar 4.2.3. *Es existiert eine meromorphe Funktion* $\phi \in M(\mathbb{C})$ *mit der Eigenschaft, dass zu jeder unbeschränkten Kurve* γ *eine strikt unbeschränkte Folge* $\{z_n\}$ *auf* γ *existiert, entlang welcher die Funktion* $\phi^{(j)}$ *für jedes* $j \in \mathbb{N}_0$ *maximales cluster set hat. Somit hat* $\phi^{(j)}$ *entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set und das Bild jeder unbeschränkten Kurve unter* $\phi^{(j)}$ *liegt dicht in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 4.1.3, wenn wir dort $K = \{0\}$ setzen. □

Bemerkung 4.2.4.

(i) *Anders ausgedrückt hat die obige Funktion* ϕ *die Eigenschaft, dass zu jeder unbeschränkten Kurve* γ *eine Folge* $\{z_n\}$ *auf* γ *existiert, so dass für jedes* $j \in \mathbb{N}_0$ *die Menge* $\{\phi^{(j)}(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* $\mathbb{C}$ *liegt.*

(ii) *Neben dem bereits erwähnten Ergebnis von Kierst und Szpilrajn haben auch Gross [20] und MacLane [43] meromorphe Funktionen* ϕ *mit der Eigenschaft konstruiert, dass das Bild jeder unbeschränkten Kurve unter* ϕ *dicht in* $\mathbb{C}$ *liegt. Die dortigen Beweise unterscheiden sich jedoch grundlegend von dem obigen, zudem gelten diese Ergebnisse nicht für die Ableitungen von* ϕ.

Bevor wir zu allgemeineren Eigenschaften von Funktionen mit maximalen cluster sets entlang beliebiger Kurven kommen, wollen wir noch zeigen, dass für die Funktion aus Satz 4.1.3 auch die folgende Aussage gilt.

Korollar 4.2.5. *Es existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C})$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ hat die Funktion $\phi^{(j)}$ entlang jeder unbeschränkten Folge $\{z_n\}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - z_{n-1}| < \infty$ maximales cluster set.

Beweis. Es sei $\{z_n\}$ eine unbeschränkte Folge, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - z_{n-1}| =: \delta < \infty$ gilt. Wir werden zeigen, dass die Funktion ϕ aus Satz 4.1.3 die obige Aussage erfüllt.
Nach Voraussetzung existiert eine unbeschränkte Kurve γ, so dass für jedes $\zeta \in \gamma$ gilt

$$\{z : |z - \zeta| \leq \delta\} \cap \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset. \tag{4.14}$$

Ist nun $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $a \in \mathbb{C}$, so existiert zu $K := \{z : |z| \leq \delta\}$ eine strikt unbeschränkte Folge $\{\zeta_k\}$ auf γ, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\max_K \left|\phi^{(j)}(z + \zeta_k) - a\right| < \frac{1}{k}. \tag{4.15}$$

Gemäß unserer Wahl von γ existiert wegen (4.14) hierbei zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Punkt $z_{n_k} \in \{z : |z - \zeta_k| \leq \delta\} \cap \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, und somit $z_{n_k} \in K + \zeta_k$. Folglich existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\eta_k \in K$ mit $z_{n_k} = \eta_k + \zeta_k$, woraus wir unter Verwendung von (4.15) für jedes k erhalten

$$\left|\phi^{(j)}(z_{n_k}) - a\right| = \left|\phi^{(j)}(\eta_k + \zeta_k) - a\right| \leq \max_{z\in K} \left|\phi^{(j)}(z + \zeta_k) - a\right| < \frac{1}{k}.$$

Also gilt $\left|\phi^{(j)}(z_{n_k}) - a\right| \to 0$ für $k \to \infty$, und da hierbei $j \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{C}$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 4.2.6.

(i) *Es ist klar, dass zu jeder unbeschränkten Kurve γ eine Folge $\{z_n\}$ auf γ mit der in Korollar 4.2.5 geforderten Bedingung existiert. Eine Funktion mit der obigen Eigenschaft hat also insbesondere die Eigenschaft, entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set zu besitzen. Somit ist Korollar 4.2.3 in Korollar 4.2.5 enthalten.*

(ii) *Weiter beachte man, dass die obige Funktion die Eigenschaft hat, dass für jede unbeschränkte Folge $\{z_n\}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - z_{n-1}| < \infty$ die Menge $\{\phi^{(j)}(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.*

(iii) *Man könnte sich fragen, ob das Ergebnis dahingehend verschärft werden kann, dass die Funktion ϕ entlang jeder unbeschränkten Folge maximales cluster set hat, allerdings sieht man leicht, dass dies nicht möglich ist. Wäre nämlich $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine solche Funktion und $\{\lambda_n\}$ eine beliebige unbeschränkte Folge, so würde nach*

Voraussetzung zu $a \in \mathbb{C}$ *eine strikt unbeschränkte Teilfolge* $\{\lambda_{n_k}\}$ *mit* $\phi(\lambda_{n_k}) \to a$ *für* $k \to \infty$ *existieren. Betrachten wir dann die Folge* $\{\zeta_k\}$ *mit* $\zeta_k = \lambda_{n_k}$, *so ist diese ebenfalls unbeschränkt, so dass* ϕ *nach Voraussetzung maximales cluster set entlang* $\{\zeta_k\}$ *besitzt. Dies steht jedoch im Widerspruch zu* $\phi(\zeta_k) \to a$ *für* $k \to \infty$.

Wir werden nun einige Eigenschaften von Funktionen zusammenstellen, welche entlang unbeschränkter Kurven maximale cluster sets haben. Insbesondere gelten diese Eigenschaften dann natürlich für die Funktion aus Satz 4.1.3.

Lemma 4.2.7. *Es sei* $\phi \in M(\mathbb{C})$, *so dass* $\phi^{(j)}$ *für jedes* $j \in \mathbb{N}_0$ *entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set hat. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ *besitzt die Funktion* $\phi^{(j)}$ *keinen asymptotischen Wert.*

(ii) Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ *besitzt die Funktion* $\phi^{(j)}$ *keinen Picardschen Ausnahmewert, d.h.* $\phi^{(j)}$ *nimmt jeden Wert aus* $\widetilde{\mathbb{C}}$ *unendlich oft an.*

(iii) Die Funktion ϕ *hat unendlich viele Polstellen, insbesondere ist* ϕ *nicht aus* $H(\mathbb{C})$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage, dazu nehmen wir an, dass die Funktion $\phi^{(j)}$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ einen asymptotischen Wert $a \in \widetilde{\mathbb{C}}$ hat. Folglich existiert eine strikt unbeschränkte Kurve γ mit

$$\phi^{(j)}(z) \to a \quad \text{für } z \to \infty, z \in \gamma. \tag{4.16}$$

Nach Voraussetzung hat $\phi^{(j)}$ maximales cluster set entlang der Kurve γ, das heißt zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge $\{w_n\}$ auf γ mit $w_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und $\phi^{(j)}(w_n) \to w$. Für $w \neq a$ steht dies im Widerspruch zu (4.16).

Die zweite Aussage folgt nun unmittelbar aus Satz 4.1.5. Hätte $\phi^{(j)}$ nämlich einen Picardschen Wert a, so wäre a nach diesem Satz auch asymptotischer Wert. Wie eben gezeigt, ist dies nicht möglich. Die dritte Aussage ist offensichtlich eine unmittelbare Folgerung aus der zweiten.

□

Aus der Eigenschaft, dass eine meromorphe Funktion ϕ entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set besitzt, können also leicht weitere Aussagen gefolgert werden. So nimmt jede solche Funktion jeden Wert aus $\widetilde{\mathbb{C}}$ unendlich oft an, insbesondere kann keine ganze Funktion mit dieser Eigenschaft existieren. Es sei noch erwähnt, dass Hayman [25] das im vorigen Abschnitt erwähnte Ergebnis von Iversen verschärft hat, indem er zeigte, dass auch gewisse Klassen meromorpher Funktionen stets einen asymptotischen Wert besitzen. Auch für diese Funktionen können somit die Aussagen der obigen Korollare 4.2.3 und 4.2.5 nicht gelten.

Wir wollen nun auch in Satz 4.1.9 auf den Sonderfall $K = \{0\}$ eingehen, in welchem wir eine in einem Gebiet G meromorphe Funktion erhalten, welche entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set besitzt.

Korollar 4.2.8. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine meromorphe Funktion $\phi \in M(G)$ mit der Eigenschaft, dass zu jeder in G unbeschränkten Kurve γ eine in G strikt unbeschränkte Folge $\{z_n\}$ auf γ existiert, entlang welcher die Funktion $\phi^{(j)}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ maximales cluster set hat. Somit hat die Funktion $\phi^{(j)}$ entlang jeder unbeschränkten Kurve maximales cluster set und das Bild jeder unbeschränkten Kurve unter $\phi^{(j)}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{C}$ ist dies gerade die Aussage von Korollar 4.2.3. Im Fall $G \neq \mathbb{C}$ folgt die Aussage unmittelbar aus Satz 4.1.9, wenn wir dort $K = \{0\}$ setzen.

□

Bemerkung 4.2.9.

(i) Auch hier beachte man, dass die obige Funktion ϕ die Eigenschaft hat, dass zu jeder in G unbeschränkten Kurve γ eine Folge $\{z_n\}$ auf γ existiert, so dass die Menge $\{\phi^{(j)}(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

(ii) Weiter sei bemerkt, dass das obige Korollar 4.2.8 in gewisser Weise eine Erweiterung eines Ergebnisses von Bernal-González, Calderón-Moreno und Prado-Bassas [3] darstellt. Diese bewiesen im Jahr 2004 den folgenden Satz, hierbei ist

$$Osc(A) := \{t \in \partial G : \text{ es existiert eine Folge } \{z_n\} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = t\},$$

wobei A eine in einem Gebiet G abgeschlossene Menge ist.

Satz 4.2.10 (Bernal-González, Calderón-Moreno, Prado-Bassas, 2004). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Jordangebiet. Dann existiert ein dichter Unterraum D von $H(G)$, so dass jedes $f \in D \setminus \{0\}$ entlang jeder unbeschränkten Kurve γ mit $Osc(\gamma) \neq \partial G$ maximales cluster set besitzt.*

Im Gegensatz zu diesem Ergebnis gilt Korollar 4.2.8 auch für allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete, zudem bleibt die Aussage dort auch für jede Ableitung richtig, und die Einschränkung $Osc(\gamma) \neq \partial G$ entfällt. Allerdings ist die dortige Funktion aus der Klasse der in G meromorphen Funktionen, ferner enthält Korollar 4.2.8 keine Information über die Größe der Menge der Funktionen, für welche die Aussage gilt.

Kapitel 5

Über sukzessive Ableitungen meromorpher Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Ableitungen meromorpher Funktionen. Insbesondere wollen wir untersuchen, ob in Analogie zum Satz von MacLane (Satz 1.3.5) auch meromorphe Funktionen existieren, so dass die Folge ihrer sukzessiven Ableitungen über gewisse universelle Eigenschaften verfügt.

5.1 Der Satz von Pólya und die finale Menge einer meromorphen Funktion

Zur Motivation wollen wir nochmal kurz auf den Satz von MacLane eingehen, welcher die Existenz einer ableitungsuniversellen ganzen Funktion beweist, also einer ganzen Funktion φ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{\varphi^{(n)}(z) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht im Raum aller ganzen Funktionen liegt. Man kann sogar folgende Verschärfung dieses Satzes beweisen.

Lemma 5.1.1. *Es sei $\{n_k\}$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen. Dann existiert eine in $H(\mathbb{C})$ residuale Menge $\mathcal{U}$, so dass jedes $\varphi \in \mathcal{U}$ ableitungsuniversell bezüglich $\{n_k\}$ ist, das heißt zu jedem $\varphi \in \mathcal{U}$, zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und zu jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_{k_l}\}$ von $\{n_k\}$ mit*

$$\varphi^{(n_{k_l})}(z) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (l \to \infty).$$

Es stellt sich die Frage, ob dieses Ergebnis auf meromorphe Funktionen übertragbar ist und ob auch meromorphe ableitungsuniverselle Funktionen existieren. In Anbetracht der Tatsache, dass die Resultate über translations- und streckungsuniverselle holomorphe Funktionen auf den meromorphen Fall erweitert werden können, liegt die Vermutung nahe, dass auch die Existenz meromorpher Funktionen mit universellen Ableitungsfolgen bewiesen werden kann. Wir werden jedoch sehen, dass dies nicht der Fall ist, und dass die sukzessiven Ableitungen meromorpher Funktionen sich gänzlich anders als die Ableitungen holomorpher Funktionen verhalten. Von großer Wichtigkeit für das gesamte Kapitel wird hierbei ein bemerkenswerter Satz von Pólya [49] sein, welcher sich mit der in Definition 2.2.5 eingeführten Menge der Nullstellenhäufungspunkte der Ableitungsfolge einer meromorphen Funktion beschäftigt.

Definition 5.1.2. *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion. Dann nennen wir die Menge der Nullstellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ die finale Menge von ϕ und bezeichnen sie mit $\mathcal{F}(\phi)$.*

Bemerkung 5.1.3. *Den Ausdruck „finale Menge“ haben wir in Anlehnung an den englischen Begriff „final set“ gewählt. Dieser wurde 1943 von Pólya ([50], S. 179) zur Bezeichnung der Menge der Nullstellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ vorgeschlagen, da diese Menge in gewisser Weise die finale Position der Nullstellen von $\phi^{(n)}$ darstellt.*

Mit der in Definition 2.2.5 eingeführten Bezeichnung gilt also $\mathcal{F}(\phi) = H_0(\{\phi^{(n)}\})$ und gemäß dieser Definition liegt ein Punkt z_0 genau dann in $\mathcal{F}(\phi)$, wenn in jeder Umgebung $U(z_0)$ von z_0 unendlich viele Ableitungen von ϕ eine Nullstelle haben. Der Satz von Pólya besagt nun, dass die finale Menge einer meromorphen Funktion ϕ allein durch die Lage der Polstellen von ϕ bestimmt ist, zudem ist sie geometrisch charakterisierbar. Im Folgenden bezeichnen wir mit P_ϕ stets die Menge der Polstellen der Funktion ϕ.

Satz 5.1.4 (Pólya, 1922). *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion. Dann ist die finale Menge von ϕ allein durch die Lage der Polstellen von ϕ bestimmt. Weiter gilt $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$ genau dann, wenn auf dem Kreis $\{z : |z - z_0| = d_0\}$ mindestens zwei Polstellen liegen, wobei $d_0 := dist(z_0, P_\phi)$ ist. Besitzt die Funktion ϕ genau eine Polstelle, so gilt $\mathcal{F}(\phi) = \emptyset$.*

Bemerkung 5.1.5.

(i) Der Satz ist auch unter dem Namen „Pólya's Shire Theorem“ bekannt und wird üblicherweise in der obigen Fassung zitiert. Man beachte jedoch, dass Pólya in [49] noch zwei interessante Zusätze beweist. Erstens bleibt die Aussage richtig, wenn man anstatt der Menge der Nullstellenhäufungspunkte die Menge der w-Stellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n)}\}$ betrachtet, wobei $w \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Wert ist. Zudem beweist Pólya, dass sogar zu jedem $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$ und zu jeder Umgebung $U(z_0)$ von z_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\phi^{(n)}(z)$ für jedes $n > n_0$ eine Nullstelle (bzw. w-Stelle) in $U(z_0)$ hat. Hieraus folgt insbesondere, dass für jede Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ gilt $\mathcal{F}(\phi) = H_0(\{\phi^{(n)}\}) = H_0(\{\phi^{(n_k)}\})$, das heißt die Menge der Nullstellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n)}\}$ ist identisch mit der Menge der Nullstellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n_k)}\}$.

(ii) *Offenbar ist die finale Menge einer meromorphen Funktion mit mindestens zwei Polstellen stets eine in $\mathbb{C}$ abgeschlossene und unbeschränkte Menge, welche keine inneren Punkte besitzt und aus der Vereinigung von Geraden, Halbgeraden und Segmenten besteht. Weiter beachte man, dass zu jeder „geeigneten" Menge $F \subset \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen ϕ mit $\mathcal{F}(\phi) = F$ existieren, da bekanntlich zu jeder Folge $\{z_n\}$ in $\mathbb{C}$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ stets meromorphe Funktionen ϕ existieren, welche $P_\phi = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ erfüllen.*

(iii) *Es sei bemerkt, dass die finale Menge einer ganzen Funktion sich gänzlich anders verhält und dass in diesem Fall kein entsprechendes Ergebnis gilt. So konnten Edrei und MacLane [12] im Jahre 1957 etwa beweisen, dass zu jeder in $\mathbb{C}$ abgeschlossenen Menge F eine ganze Funktion φ mit $\mathcal{F}(\varphi) = F$ existiert.*

Eine leichte Folgerung aus Satz 5.1.4 ist nun, dass keine meromorphe Funktion ϕ existieren kann, welche im Sinne des Satzes von MacLane ableitungsuniversell ist, selbst dann nicht, wenn wir uns auf die Approximation auf Mergelian Mengen beschränken, welche außerhalb von P_ϕ liegen.

Korollar 5.1.6. *Es existiert keine meromorphe Funktion $\phi \in M(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C})$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jedem $K \in \mathcal{M}$ mit $K \subset \mathbb{C} \setminus P_\phi$ und zu jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen mit

$$\phi^{(n_k)}(z) \to f(z) \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Wir nehmen an, $\phi \in M(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C})$ wäre eine Funktion mit dieser Eigenschaft und betrachten einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (P_\phi \cup \mathcal{F}(\phi))$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist dann $K := \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ ein Mergelian Kompaktum mit $K \subset \mathbb{C} \setminus P_\phi$. Gemäß unserer Annahme existiert also eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ mit

$$\phi^{(n_k)}(z) \to f(z) := z - z_0 \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Da die Funktion f eine Nullstelle an z_0 hat, erhalten wir mit dem Satz von Hurwitz, dass $z_0 \in H_0(\{\phi^{(n_k)}\}) \subset \mathcal{F}(\phi)$ gilt, und somit einen Widerspruch.

□

Bemerkung 5.1.7. *Eine ähnliche Überlegung liefert, dass eine ganze ableitungsuniverselle Funktion φ stets $\mathcal{F}(\varphi) = \mathbb{C}$ erfüllen muss. Da die Menge dieser Funktionen residual in $H(\mathbb{C})$ ist, erhalten wir eine in $H(\mathbb{C})$ residuale Menge an Funktionen, deren finale Menge mit $\mathbb{C}$ übereinstimmt (siehe auch [18]). Nach dem Satz von Pólya kann keine nichtganze meromorphe Funktion mit dieser Eigenschaft existieren.*

Somit ist klar, dass die Ergebnisse über ableitungsuniverselle holomorphe Funktionen nicht auf den meromorphen Fall übertragbar sind. Insbesondere kann keine meromorphe Funktion ϕ existieren, so dass die Folge $\{\phi^{(n)}\}$ dicht in $(M_\infty(\mathbb{C}), \rho)$ ist. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Folge der Ableitungen einer meromorphen Funktion schwächere Universalitätseigenschaften besitzen kann. Hierzu geben wir zunächst folgende Variante des Satzes von Pólya an, welche auf Hayman [24] zurückgeht.

Satz 5.1.8. *Die Funktion ϕ sei meromorph in $\{z : |z - z_0| < R\}$ mit $0 < R \leq \infty$, und ϕ besitze mindestens zwei Polstellen. Es sei d_0 der Radius der größten Kreisscheibe um z_0, welche keine Polstellen von ϕ im Inneren enthält. Dann gilt:*

(i) Falls auf dem Kreis $\{z : |z - z_0| = d_0\}$ mindestens zwei Polstellen von ϕ liegen, so hat $\phi^{(l)}(z)$ für jedes $\delta > 0$ und alle hinreichend großen $l \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle in $\{z : |z - z_0| < \delta\}$.

(ii) Falls auf dem Kreis $\{z : |z - z_0| = d_0\}$ genau eine Polstelle von ϕ liegt, so gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\left|\phi^{(l)}(z)\right| \to \infty \quad \textit{gleichmäßig auf } \{z : |z - z_0| \leq \delta\} \quad (l \to \infty).$$

Bemerkung 5.1.9. *Offenbar beinhaltet dieser Satz auch die Aussage von Satz 5.1.4. Zusätzlich besagt er, dass die Punkte z_0, bei denen auf $\{z : |z - z_0| = d_0\}$ exakt eine Polstelle von ϕ liegt, nicht nur keine Nullstellenhäufungspunkte von $\{\phi^{(n)}\}$ sind, sondern dass $\phi^{(n)}(z)$ sogar für hinreichend kleines δ auf $\{z : |z - z_0| \leq \delta\}$ gleichmäßig gegen ∞ strebt.*

Im Hinblick auf universelles Verhalten der Ableitungen ist die zweite Aussage des obigen Satzes äußerst interessant. Es folgt nämlich unmittelbar, dass $\phi^{(n)}(z)$ für jedes $z \notin \mathcal{F}(\phi)$ punktweise gegen ∞ strebt, somit ist außerhalb der finalen Menge jede Form von Ableitungsuniversalität ausgeschlossen. Natürlich ist auch Korollar 5.1.6 eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.1.8.

5.2 Verhalten der Ableitungen auf der finalen Menge

Der vorige Abschnitt hat gezeigt, dass bei Folgen von Ableitungen meromorpher Funktionen nie universelles Verhalten außerhalb der finalen Menge auftreten kann. Insbesondere haben wir gesehen, dass $\phi^{(n)}(z)$ für jedes $z \notin \mathcal{F}(\phi)$ punktweise gegen ∞ strebt. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Ableitungen von ϕ in Punkten $z \in \mathcal{F}(\phi)$

verhalten. Insbesondere stellt sich die Frage, ob in solchen Punkten universelles Verhalten auftreten kann, das heißt, ob es meromorphe Funktionen ϕ und Punkte $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$ gibt, so dass $\{\phi^{(n)}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. In den ersten beiden Unterabschnitten werden wir sehen, dass im Allgemeinen auch auf der finalen Menge keine Universalität zu erwarten ist, später werden wir allerdings einen Sonderfall betrachten, in welchem wir positive Ergebnisse beweisen können.

5.2.1 Verhalten in gewissen Punkten der finalen Menge

Wir werden zunächst zeigen, dass die Ableitungen unter gewissen Voraussetzungen auch in Punkten der finalen Menge stets gegen ∞ streben, auch in diesen Punkten ist universelles Verhalten somit ausgeschlossen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst das folgende Lemma, welches gewissermaßen Auskunft über das Wachstum der Ableitungen von Hauptteilen gibt.

Lemma 5.2.1. *Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ und $g(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(z-\zeta)^j}$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Weiter sei $N \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt mit $z_0 \neq \zeta$. Dann existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l > l_0$ gilt:*

(i) $\left|g^{(l)}(z_0)\right| > (1 - \frac{1}{N}) \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!} \frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}$,

(ii) $\left|g^{(l)}(z_0)\right| < (1 + \frac{1}{N}) \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!} \frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}$.

Beweis. Im Fall $n = 1$ gilt offenbar $g(z) = \frac{a_1}{z-\zeta}$, und somit $\left|g^{(l)}(z_0)\right| = l! \frac{|a_1|}{|z_0-\zeta|^{l+1}}$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.
Es sei also $n \geq 2$. Für $l \in \mathbb{N}$ und jedes $j \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!} \frac{(n-1)!}{(n+l-1)!} \leq \frac{(n+l-2)!}{(n-2)!} \frac{(n-1)!}{(n+l-1)!} = \frac{n-1}{n+l-1}.$$

Somit folgt für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)!}{(n+l-1)!} \frac{|z_0-\zeta|^{n+l}}{|a_n|} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!} \frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}} \\
&= \frac{|z_0-\zeta|^{n+l}}{|a_n|} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!} \frac{(n-1)!}{(n+l-1)!} \frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}} \\
&\leq \frac{|z_0-\zeta|^{n}}{|a_n|} \left(\max_{j \in \{1,\dots,n-1\}} \frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j}} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-1}{n+l-1} \\
&= \frac{c(n)}{n+l-1},
\end{aligned}$$

wobei $c(n)$ eine von n abhängige Konstante ist. Also gilt

$$\frac{(n-1)!}{(n+l-1)!}\,\frac{|z_0-\zeta|^{n+l}}{|a_n|}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!}\,\frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}}\to 0 \quad \text{für } l\to\infty,$$

so dass ein $l_0\in\mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{(n-1)!}{(n+l-1)!}\,\frac{|z_0-\zeta|^{n+l}}{|a_n|}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!}\,\frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}}<\frac{1}{N} \quad \text{für alle } l>l_0.$$

Dann gilt aber auch

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!}\,\frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}}<\frac{1}{N}\,\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!}\,\frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}} \quad \text{für alle } l>l_0. \tag{5.1}$$

Nun beachten wir, dass für $l\in\mathbb{N}$ gilt

$$g^{(l)}(z_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^l j(j+1)\dots(j+l-1)\,a_j}{(z_0-\zeta)^{j+l}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^l(j+l-1)!\,a_j}{(j-1)!\,(z_0-\zeta)^{j+l}}.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und (5.1) folgt nun für jedes $l>l_0$

$$\begin{aligned}\left|g^{(l)}(z_0)\right| &\geq \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!}\,\frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!}\,\frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}}\\ &> \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!}\,\frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}.\end{aligned}$$

Andererseits folgt aber auch

$$\begin{aligned}\left|g^{(l)}(z_0)\right| &\leq \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!}\,\frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!}\,\frac{|a_j|}{|z_0-\zeta|^{j+l}}\\ &< \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!}\,\frac{|a_n|}{|z_0-\zeta|^{n+l}}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.2.2. *Es sei $\phi\in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion mit mindestens zwei Polstellen. Es sei $z_0\in\mathcal{F}(\phi)$ und $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ seien die Polstellen auf $\{z:|z-z_0|=d\}$, wobei $d:=\mathrm{dist}(z_0,P_\phi)$. Hierbei seien $\zeta_1,\dots,\zeta_m$ die Polstellen höchster Ordnung und $g_i(z)=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j^{(i)}}{(z-\zeta_i)^j}$ die zugehörigen Hauptteile für $i\in\{1,\dots,m\}$, wobei $1\leq m\leq n$ ist. Für ein $i\in\{1,\dots,m\}$ gelte ferner*

$$\left|a_k^{(i)}\right|>\sum_{p\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\}}\left|a_k^{(p)}\right|. \tag{5.2}$$

Dann gilt

$$\left|\phi^{(l)}(z_0)\right|\to\infty \quad \textit{für } l\to\infty.$$

Beweis. Es gelte zunächst $n > m$ und $z_0 = 0$. Für $u \in \{m+1, \ldots, n\}$ sei $G_u(z) = \sum_{j=1}^{k_u} \frac{a_j^{(u)}}{(z-\zeta_u)^j}$ der Hauptteil von ϕ an ζ_u, so dass nach Voraussetzung $k > k_u$ für alle $u \in \{m+1, \ldots, n\}$ ist. Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Funktion

$$\varphi(z) := \phi(z) - \sum_{i=1}^{m} g_i(z) - \sum_{u=m+1}^{n} G_u(z)$$

holomorph ist auf $\{z : |z| \leq d + \delta\}$. Es sei $M := \max_{\{z:|z|\leq d+\delta\}} |\varphi(z)|$, so dass wir mit der Cauchyschen Ungleichung für jedes $l \in \mathbb{N}$ erhalten

$$\left|\varphi^{(l)}(0)\right| \leq \frac{l!\, M}{(d+\delta)^l}. \tag{5.3}$$

Es gelte ohne Einschränkung $\left|a_k^{(1)}\right| > \sum_{p\in\{2,\ldots,m\}} \left|a_k^{(p)}\right|$, so dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$C := \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left|a_k^{(1)}\right| - \left(1 + \frac{1}{N}\right) \sum_{p=2}^{m} \left|a_k^{(p)}\right| > 0. \tag{5.4}$$

Mit Lemma 5.2.1 folgt nun, dass zu diesem N ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$, für jedes $u \in \{m+1, \ldots, n\}$ und für jedes $l > l_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left|g_i^{(l)}(0)\right| > \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!} \frac{\left|a_k^{(i)}\right|}{d^{k+l}}, \\
&\left|g_i^{(l)}(0)\right| < \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!} \frac{\left|a_k^{(i)}\right|}{d^{k+l}} \qquad \text{und} \\
&\left|G_u^{(l)}(0)\right| < \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{(k_u+l-1)!}{(k_u-1)!} \frac{\left|a_{k_u}^{(u)}\right|}{d^{k_u+l}} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{(k+l-2)!}{(k-2)!} \frac{\left|a_{k_u}^{(u)}\right|}{d^{k_u+l}}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der letzten Abschätzung verwendet, dass gemäß Voraussetzung für jedes $u \in \{m+1, \ldots, n\}$ gilt $k_u \leq k - 1$. Somit folgt für alle $l > l_0$ unter Verwendung von (5.3) und (5.4)

$$\begin{aligned}
\left|\phi^{(l)}(0)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m} g_i^{(l)}(0) + \sum_{u=m+1}^{n} G_u^{(l)}(0) + \varphi^{(l)}(0)\right| \\
&= \left|g_1^{(l)}(0) + \sum_{i=2}^{m} g_i^{(l)}(0) + \sum_{u=m+1}^{n} G_u^{(l)}(0) + \varphi^{(l)}(0)\right| \\
&\geq \left|g_1^{(l)}(0)\right| - \sum_{i=2}^{m} \left|g_i^{(l)}(0)\right| - \sum_{u=m+1}^{n} \left|G_u^{(l)}(0)\right| - \left|\varphi^{(l)}(0)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{(k+l-1)!}{(k-1)!}\frac{\left|a_k^{(1)}\right|}{d^{k+l}} - \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(k+l-1)!}{(k-1)!}\sum_{i=2}^{m}\frac{\left|a_k^{(i)}\right|}{d^{k+l}} \\
&\qquad - \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(k+l-2)!}{(k-2)!}\sum_{u=m+1}^{n}\frac{\left|a_{k_u}^{(u)}\right|}{d^{k_u+l}} - \frac{l!\,M}{(d+\delta)^l} \\
&\geq \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!}\frac{1}{d^{k+l}}\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)\left|a_k^{(1)}\right| - \left(1+\frac{1}{N}\right)\sum_{i=2}^{m}\left|a_k^{(i)}\right|\right) \\
&\qquad - \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(k+l-2)!}{(k-2)!}\sum_{u=m+1}^{n}\frac{\left|a_{k_u}^{(u)}\right|}{d^{k_u+l}} - \frac{l!\,M}{(d+\delta)^l} \\
&= \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!\,d^l}\frac{C}{d^k} - \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(k+l-2)!}{(k-2)!\,d^l}\sum_{u=m+1}^{n}\frac{\left|a_{k_u}^{(u)}\right|}{d^{k_u}} - \frac{l!\,M}{(d+\delta)^l}
\end{aligned}
$$

Da dieser Ausdruck für $l \to \infty$ gegen ∞ strebt, folgt schließlich

$$\left|\phi^{(l)}(0)\right| \to \infty \quad \text{für } l \to \infty.$$

Ist nun $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$ ein beliebiger Punkt, so betrachten wir die Funktion $\tilde{\phi}(z) := \phi(z+z_0)$. Wie eben gezeigt, gilt dann $\tilde{\phi}^{(l)}(0) \to \infty$ für $l \to \infty$, somit folgt $\phi^{(l)}(z_0) \to \infty$.

Falls alle Polstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ von höchster Ordnung sind, und somit $n = m$ gilt, so folgt die Behauptung auf analoge Weise, unter Beachtung dass dann keine Hauptteile G_u existieren.

□

Ist also $\phi \in M(\mathbb{C})$ und $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$, so dass unter den Polstellen, welche kleinsten Abstand zu z_0 haben, eine Polstelle höchster Ordnung ist, deren Hauptteil einen „dominierenden Leitkoeffizienten" im Sinne von (5.2) hat, so gilt $\phi^{(l)}(z_0) \to \infty$ für $l \to \infty$. Man beachte, dass diese Bedingung insbesondere dann erfüllt ist, wenn exakt eine Polstelle höchster Ordnung vorliegt, so dass wir leicht die folgenden Korollare erhalten, hierbei bezeichnet $\mathrm{ord}(\zeta)$ die Ordnung der Polstelle ζ.

Korollar 5.2.3. *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion mit mindestens zwei Polstellen. Es sei $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$ und $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ seien die Polstellen auf $\{z : |z - z_0| = d\}$, wobei $d := dist(z_0, P_\phi)$. Für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelte ferner $ord(\zeta_i) > ord(\zeta_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Dann gilt*

$$\left|\phi^{(l)}(z_0)\right| \to \infty \quad \textit{für } l \to \infty.$$

Unter Verwendung von Satz 5.1.8 folgt hieraus noch unmittelbar das folgende Ergebnis.

Korollar 5.2.4. *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion mit der Polstellenmenge $P_\phi = \{\zeta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es gelte ord($\zeta_i$) $\neq$ ord(ζ_j) für jedes $i \neq j$. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$*

$$\left|\phi^{(l)}(z)\right| \to \infty \quad \text{für } l \to \infty.$$

5.2.2 Verhalten in Punkten einer dichten Teilmenge der finalen Menge

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Ableitungen meromorpher Funktionen im Allgemeinen auch in gewissen Punkten der finalen Menge stets gegen ∞ streben. In diesem Abschnitt werden wir ähnliche Aussagen beweisen, wobei wir uns hierbei auf eine dichte Teilmenge der finalen Menge beschränken werden. Es sei dazu zunächst $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\zeta = |\zeta|\, e^{i\psi}$, wobei $\psi \in [0, 2\pi)$ ist. Mit G_ζ bezeichnen wir die Gerade durch den Nullpunkt, welche das Segment $[\zeta, -\zeta]$ in einem rechten Winkel schneidet, das heißt es gilt

$$G_\zeta = \{z : z = r\, e^{i\,(\psi + \frac{\pi}{2})}, r \in \mathbb{R}\}.$$

Weiter sei G'_ζ die Gerade, die durch Verschiebung von G_ζ um den Wert ζ hervorgeht, also $G'_\zeta := G_\zeta + \zeta = \{w : w = z + \zeta, z \in G_\zeta\}$. Auf dieser Geraden definieren wir folgende Punktmenge

$$M_\zeta := \bigcup_{l \in \mathbb{Q} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(\{z : z = r\, e^{i\,(\psi + l\,\pi)}, r \geq 0\} \cap G'_\zeta\right),$$

und setzen schließlich

$$\mathcal{A}_\zeta := M_\zeta - \zeta = \{w : w = z - \zeta, z \in M_\zeta\}. \tag{5.5}$$

Offensichtlich ist M_ζ eine abzählbare dichte Teilmenge der Geraden G'_ζ, folglich ist $\mathcal{A}_\zeta$ eine abzählbare dichte Teilmenge von G_ζ. Ist nun $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$ ein beliebiger Punkt, so ist zunächst einmal klar, dass stets $|z_0 + \zeta| = |z_0 - \zeta|$ gilt. Weiterhin beachte man, dass zu $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$ eindeutig bestimmte, teilerfremde natürliche Zahlen p, q mit $\frac{p}{q} < 1$ existieren, so dass gilt

$$z_0 + \zeta = |z_0 + \zeta|\; e^{i\left(\psi + \pi(\frac{1}{2} - \frac{p}{q})\right)} \quad \text{und} \quad z_0 - \zeta = |z_0 - \zeta|\; e^{i\left(\psi + \pi(\frac{1}{2} + \frac{p}{q})\right)}. \tag{5.6}$$

Da wir im weiteren Verlauf des Kapitels häufig auf diese Zahlen zurückgreifen werden, führen wir folgende Notation ein. Ist $z_i \in \mathcal{A}_\zeta$ ein beliebiger Punkt, so bezeichnen wir die eindeutig bestimmten natürlichen Zahlen, welche (5.6) erfüllen mit p_i und q_i.
Weiterhin führen wir noch folgende Definition ein.

Definition 5.2.5. *Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \neq 0$. Dann definieren wir folgende Möbius Transformation*

$$m_\zeta : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}} \quad mit \quad m_\zeta(z) := \frac{z-\zeta}{z+\zeta}.$$

Ist $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\zeta = |\zeta|\, e^{i\,\psi}$, so ist m_ζ bekanntlich die konforme Abbildung des Gebiets $\left\{w : w = e^{i\,(\psi-\frac{\pi}{2})}\, z, z \in \{\eta : \mathrm{Im}(\eta) > 0\}\right\}$ auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$. Die Menge $G_\zeta \cup \{\infty\}$ wird durch m_ζ auf $\partial\mathbb{D}$ abgebildet. Ist nun $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$ ein beliebiger Punkt, so folgt wegen $|z_0+\zeta| = |z_0-\zeta|$ mit (5.6) offenbar

$$m_\zeta(z_0) = \frac{z_0-\zeta}{z_0+\zeta} = e^{i\left(\psi+\pi(\frac{1}{2}+\frac{p_0}{q_0})\right)}\, e^{-i\left(\psi+\pi(\frac{1}{2}-\frac{p_0}{q_0})\right)} = e^{2\pi i\frac{p_0}{q_0}}, \tag{5.7}$$

das heißt ein Punkt $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$ wird durch m_ζ auf eine Einheitswurzel abgebildet.

Wir weisen noch darauf hin, dass die oben betrachtete Gerade G_ζ nach dem Satz von Pólya die finale Menge jeder meromorphen Funktion darstellt, welche exakt die beiden Polstellen ζ und $-\zeta$ hat. In diesem Fall ist die Menge $\mathcal{A}_\zeta$ also eine dichte Teilmenge der finalen Menge. Wir werden nun mit Hilfe der Menge $\mathcal{A}_\zeta$ zu jeder finalen Menge eine entsprechende dichte Teilmenge definieren. Es sei dazu ϕ eine beliebige meromorphe Funktion mit mindestens zwei Polstellen. Wir setzen zunächst

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\phi) := \{z_0 \in \mathcal{F}(\phi) : \text{Es gibt exakt zwei Polstellen } \zeta_1(z_0), \zeta_2(z_0) \text{ mit } |z_0-\zeta_i(z_0)| = d_0\},$$

wobei $d_0 := \mathrm{dist}(z_0, P_\phi)$. Folglich gilt $\widetilde{\mathcal{F}}(\phi) = \mathcal{F}(\phi) \setminus \{y_1, y_2, \dots\}$, wobei $\{y_1, y_2, \dots\}$ die (höchstens) abzählbare Teilmenge von $\mathcal{F}(\phi)$ ist, so dass zu jedem y_i mindestens drei Polstellen von ϕ existieren, welche kleinsten Abstand zu y_i haben. Ist nun $z_0 \in \widetilde{\mathcal{F}}(\phi)$ und sind $\zeta_1(z_0), \zeta_2(z_0)$ die beiden Pole auf $\{z : |z-z_0| = d_0\}$, so bezeichnen wir mit $\zeta_{12}(z_0)$ den Mittelpunkt des Segments $[\zeta_1(z_0), \zeta_2(z_0)]$, das heißt $\zeta_{12}(z_0) := \frac{1}{2}(\zeta_1(z_0)+\zeta_2(z_0))$. Hiermit definieren wir schließlich

$$\mathcal{F}'(\phi) := \{z_0 \in \widetilde{\mathcal{F}}(\phi) : z_0 - \zeta_{12}(z_0) \in \mathcal{A}_{\zeta_1(z_0)-\zeta_{12}(z_0)}\}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{F}'(\phi)$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{F}(\phi)$ ist. Ist nun $z_i \in \mathcal{F}'(\phi)$, so bezeichnen wir mit p_i und q_i die dem Punkt $z_i - \zeta_{12}(z_i) \in \mathcal{A}_{\zeta_1(z_i)-\zeta_{12}(z_i)}$ gemäß (5.6) zugeordneten ganzen Zahlen.

Wir werden im Folgenden Aussagen über das Verhalten der Ableitungen von ϕ in Punkten $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$ machen, wobei wir uns oftmals auf den Fall $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$ beschränken können. Zunächst benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.2.6. *Es sei $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$. Weiter sei $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $c = |c|\, e^{i\,\varphi\,\pi}$, wobei $\varphi \in [0,2)$ sei. Für eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ gelte*

$$c + m_\zeta^{n_k}(z_0) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Dann gilt für ein $b \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$ und alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$

$$c + m_\zeta^{n_k}(z_0) = c + e^{2\pi i \frac{b}{q_0}} = 0.$$

Insbesondere gilt $(-c)^{q_0} = 1$.

Beweis. Gemäß (5.7) gilt $m_\zeta^{n_k}(z_0) = e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n_k}$, so dass aus der Voraussetzung folgt

$$|c|\, e^{i\,\varphi\,\pi} + e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n_k} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Hieraus folgt $|c| = 1$, weiterhin beachte man, dass zu jedem k Zahlen $a_k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$ mit $n_k\, p_0 = a_k\, q_0 + b_k$ existieren. Folglich gilt

$$e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n_k} = e^{2\pi i (a_k + \frac{b_k}{q_0})} = e^{2\pi i a_k}\, e^{2\pi i \frac{b_k}{q_0}} = e^{2\pi i \frac{b_k}{q_0}},$$

so dass $e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Folglich existiert ein $b \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$, so dass für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$m_\zeta^{n_k}(z_0) = e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n_k} = e^{2\pi i \frac{b_k}{q_0}} = e^{2\pi i \frac{b}{q_0}} = -\,|c|\, e^{i\,\varphi\,\pi} = -c,$$

woraus die Behauptung folgt.

□

Satz 5.2.7. *Es sei $\phi \in M(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion mit mindestens zwei Polstellen und $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$. Es seien ζ_1 und ζ_2 die beiden Polstellen mit kleinstem Abstand zu z_0, sowie $g_1(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{(z-\zeta_1)^\nu}$ und $g_2(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{(z-\zeta_2)^\nu}$ die zugehörigen Hauptteile. Ferner existiere eine Teilfolge $\{l_k\}$ der natürlichen Zahlen und ein $M \in \mathbb{N}$, so dass gilt*

$$\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| < M \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $|a_\nu| = |b_\nu|$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ und $\left(-\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)^{q_0} = 1$ für $a_\nu, b_\nu \neq 0$, und es gilt

$$g_1^{(l_k)}(z_0) + g_2^{(l_k)}(z_0) = 0 \quad \textit{für alle } k \textit{ hinreichend groß.}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $\zeta_1 =: \zeta$ und $\zeta_2 = -\zeta$, das heißt $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta \cap \mathcal{F}'(\phi)$. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$a_\nu + b_\nu\, m_\zeta^{\nu + l_k}(z_0) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty. \tag{5.8}$$

Wir nehmen an, dass dies nicht gilt, und dass folglich mindestens ein $\nu \in \{1 \ldots, n\}$ existiert, für welches (5.8) nicht erfüllt ist. Wir bezeichnen das größte dieser Elemente mit ν_0. Dann existiert eine Teilfolge $\{l_{k_s}\}$ von $\{l_k\}$ und ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|a_{\nu_0} + b_{\nu_0} m_\zeta^{\nu_0 + l_{k_s}}(z_0)\right| \geq \gamma > 0.$$

Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Funktion

$$\varphi(z) := \phi(z) - g_1(z) - g_2(z)$$

holomorph ist auf $\{z : |z - z_0| \leq |z_0 - \zeta| + \delta\}$. Es sei $M := \max_{\{z:|z-z_0|\leq|z_0-\zeta|+\delta\}} |\varphi(z)|$, so dass wir mit der Cauchyschen Ungleichung für jedes $l \in \mathbb{N}$ erhalten

$$\left|\varphi^{(l)}(z_0)\right| \leq \frac{l!\, M}{(|z_0 - \zeta| + \delta)^l}. \tag{5.9}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\left|\phi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| &= \left|g_1^{(l_{k_s})}(z_0) + g_2^{(l_{k_s})}(z_0) + \varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{l_{k_s}} (\nu + l_{k_s} - 1)!\, a_\nu}{(\nu-1)!\, (z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{l_{k_s}} (\nu + l_{k_s} - 1)!\, b_\nu}{(\nu-1)!\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}}} + \varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&= \left|(-1)^{l_{k_s}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu + l_{k_s} - 1)!}{(\nu-1)!} \left(\frac{a_\nu\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}} + b_\nu\, (z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}{(z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}\right) + \varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&\geq \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu + l_{k_s} - 1)!}{(\nu-1)!} \left(\frac{a_\nu\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}} + b_\nu\, (z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}{(z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}\right)\right| - \left|\varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&\geq \frac{(\nu_0 + l_{k_s} - 1)!}{(\nu_0 - 1)!} \left|\frac{a_{\nu_0}\, (z_0 + \zeta)^{\nu_0 + l_{k_s}} + b_{\nu_0}\, (z_0 - \zeta)^{\nu_0 + l_{k_s}}}{(z_0 - \zeta)^{\nu_0 + l_{k_s}}\, (z_0 + \zeta)^{\nu_0 + l_{k_s}}}\right| \\
&\qquad - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^{n} \frac{(\nu + l_{k_s} - 1)!}{(\nu-1)!} \left|\frac{a_\nu\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}} + b_\nu\, (z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}{(z_0 - \zeta)^{\nu + l_{k_s}}\, (z_0 + \zeta)^{\nu + l_{k_s}}}\right| - \left|\varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&= \frac{(\nu_0 + l_{k_s} - 1)!}{(\nu_0 - 1)!} \frac{1}{|z_0 - \zeta|^{\nu_0 + l_{k_s}}} \left|a_{\nu_0} + b_{\nu_0} m_\zeta^{\nu_0 + l_{k_s}}(z_0)\right| \\
&\qquad - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^{n} \frac{(\nu + l_{k_s} - 1)!}{(\nu-1)!} \frac{1}{|z_0 - \zeta|^{\nu + l_{k_s}}} \left|a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu + l_{k_s}}(z_0)\right| - \left|\varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \\
&\geq \frac{(\nu_0 + l_{k_s} - 1)!}{(\nu_0 - 1)!} \frac{\gamma}{|z_0 - \zeta|^{\nu_0 + l_{k_s}}} \\
&\qquad - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^{n} \frac{(\nu + l_{k_s} - 1)!}{(\nu-1)!} \frac{1}{|z_0 - \zeta|^{\nu + l_{k_s}}} \left|a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu + l_{k_s}}(z_0)\right| - \left|\varphi^{(l_{k_s})}(z_0)\right|.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Gemäß unserer Annahme und der Wahl von ν_0 gilt für jedes $\nu \in \{\nu_0+1,\dots,n\}$

$$a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_{k_s}}(z_0) \to 0 \quad \text{für } s \to \infty,$$

folglich existiert nach Lemma 5.2.6 ein $s_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $\nu \in \{\nu_0+1,\dots,n\}$ und jedes $s > s_0$ gilt

$$a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_{k_s}}(z_0) = 0. \tag{5.11}$$

Weiter beachten wir, dass für $\nu \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$\left|a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_{k_s}}(z_0)\right| \leq |a_\nu| + |b_\nu|\,. \tag{5.12}$$

Aus (5.10) folgt nun unter Verwendung von (5.9), (5.11) und (5.12) für alle $s > s_0$

$$\begin{aligned}
\left|\phi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \geq\; & \frac{(\nu_0+l_{k_s}-1)!}{(\nu_0-1)!}\,\frac{\gamma}{|z_0-\zeta|^{\nu_0+l_{k_s}}} \\
& - \sum_{\nu<\nu_0} \frac{(\nu+l_{k_s}-1)!}{(\nu-1)!}\,\frac{1}{|z_0-\zeta|^{\nu+l_{k_s}}}\left|a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_{k_s}}(z_0)\right| - \frac{l_{k_s}!\,M}{(|z_0-\zeta|+\delta)^{l_{k_s}}} \\
\geq\; & \frac{(\nu_0+l_{k_s}-1)!}{(\nu_0-1)!}\,\frac{\gamma}{|z_0-\zeta|^{\nu_0+l_{k_s}}} \\
& - \sum_{\nu<\nu_0} \frac{(\nu+l_{k_s}-1)!}{(\nu-1)!}\,\frac{(|a_\nu|+|b_\nu|)}{|z_0-\zeta|^{\nu+l_{k_s}}} - \frac{l_{k_s}!\,M}{(|z_0-\zeta|+\delta)^{l_{k_s}}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\left|\phi^{(l_{k_s})}(z_0)\right| \to \infty$ für $s \to \infty$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung $\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| < M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ darstellt. Somit muss (5.8) für jedes $\nu \in \{1,\dots,n\}$ gelten, woraus wir unter Verwendung von Lemma 5.2.6 folgern können, dass $|a_\nu| = |b_\nu|$ für alle $\nu \in \{1,\dots,n\}$, und $\left(-\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)^{q_0} = 1$ für $a_\nu, b_\nu \neq 0$ gilt. Weiter erhalten wir für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ und alle $\nu \in \{1,\dots,n\}$

$$a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_k}(z_0) = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
g_1^{(l_k)}(z_0) + g_2^{(l_k)}(z_0) &= (-1)^{l_k} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu+l_k-1)!}{(\nu-1)!}\left(\frac{a_\nu\,(z_0+\zeta)^{\nu+l_k} + b_\nu\,(z_0-\zeta)^{\nu+l_k}}{(z_0-\zeta)^{\nu+l_k}\,(z_0+\zeta)^{\nu+l_k}}\right) \\
&= (-1)^{l_k} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu+l_k-1)!}{(\nu-1)!}\,\frac{1}{(z_0-\zeta)^{\nu+l_k}}\left(a_\nu + b_\nu m_\zeta^{\nu+l_k}(z_0)\right)
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung im Fall $\zeta_1 = -\zeta_2$.

Der Nachweis der Aussage im allgemeinen Fall folgt durch die Substitution $w = z + \zeta_{12}$, wobei ζ_{12} der Mittelpunkt des Segments $[\zeta_1, \zeta_2]$ ist.

□

Bemerkung 5.2.8. *Der obige Satz enthält in gewisser Weise eine Verschärfung von Satz 5.2.2, falls* $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$ *ist. Ist nämlich* $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$*, so dass exakt zwei Polstellen von* ϕ *kleinsten Abstand zu* z_0 *haben, so gilt nach Satz 5.2.2 offenbar, dass aus der Voraussetzung* $\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| < M$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *stets* $|a_n| = |b_n|$ *folgt, wobei* a_n *und* b_n *die Leitkoeffizienten der entsprechenden Hauptteile sind. Ist* $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$*, so muss nach Satz 5.2.7 sogar* $|a_\nu| = |b_\nu|$ *für alle* $\nu \in \{1, \dots, n\}$ *gelten.*

Aus diesem Satz können wir nun einige interessante Folgerungen ziehen.

Korollar 5.2.9. *Es sei* $\phi \in M(\mathbb{C})$ *eine meromorphe Funktion mit mindestens drei Polstellen. Weiter sei* $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$ *und* ζ_1, ζ_2 *seien die beiden Polstellen mit kleinstem Abstand zu* z_0*, sowie* g_1, g_2 *die zugehörigen Hauptteile. Es gelte ferner* $z_0 \notin \mathcal{F}(\phi - g_1 - g_2)$*. Dann gilt*

$$\left|\phi^{(l)}(z_0)\right| \to \infty \quad \textit{für } l \to \infty.$$

Ist $\phi \in M(\mathbb{C})$ *eine meromorphe Funktion mit exakt drei Polstellen, so gilt* $\left|\phi^{(l)}(z_0)\right| \to \infty$ *für jedes* $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$*.*

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage wäre falsch. Folglich existiert eine Folge $\{l_k\}$ in $\mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| < M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\varphi := \phi - g_1 - g_2$, dies ist gemäß Voraussetzung eine meromorphe Funktion mit mindestens einer Polstelle, zudem gilt $z_0 \notin \mathcal{F}(\varphi)$. Mit Satz 5.2.7 folgt, dass für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi^{(l_k)}(z_0) = \varphi^{(l_k)}(z_0) + g_1^{(l_k)}(z_0) + g_2^{(l_k)}(z_0) = \varphi^{(l_k)}(z_0).$$

Gemäß Satz 5.1.8 gilt $\left|\varphi^{(l_k)}(z_0)\right| \to \infty$ für $k \to \infty$, so dass wir einen Widerspruch erhalten.

□

Unter Verwendung von Satz 5.2.2 können wir auf ähnliche Weise das folgende Ergebnis beweisen.

Korollar 5.2.10. *Es sei* $\phi \in M(\mathbb{C})$ *eine meromorphe Funktion mit mindestens vier Polstellen. Weiter sei* $z_0 \in \mathcal{F}'(\phi)$ *und* ζ_1, ζ_2 *die beiden Polstellen mit kleinstem Abstand zu* z_0*, sowie* $g_1(z), g_2(z)$ *die zugehörigen Hauptteile. Es gelte* $z_0 \in \mathcal{F}(\phi - g_1 - g_2)$ *und es seien* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *die Polstellen höchster Ordnung von* $\phi - g_1 - g_2$ *auf* $\{z : |z - z_0| = d\}$*, wobei* $d := dist(z_0, P_{\phi - g_1 - g_2})$*. Für die Leitkoeffizienten der zugehörigen Hauptteile gelte ferner die Bedingung* (5.2) *aus Satz 5.2.2. Dann gilt*

$$\left|\phi^{(l)}(z_0)\right| \to \infty \quad \textit{für } l \to \infty.$$

Beweis. Analog wie im Beweis zu Korollar 5.2.9 nehmen wir an, die Aussage wäre falsch und erhalten eine Folge $\{l_k\}$ in $\mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| < M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Unter Verwendung von Satz 5.2.7 folgt, dass für hinreichend großes k gilt

$$\left|\phi^{(l_k)}(z_0)\right| = \left|(\phi - g_1 - g_2)^{(l_k)}(z_0)\right|.$$

Aus der Voraussetzung folgt mit Satz 5.2.2, dass $\left|(\phi - g_1 - g_2)^{(l_k)}(z_0)\right| \to \infty$ gilt, woraus wir wie im obigen Beweis einen Widerspruch erhalten.

□

5.2.3 Ableitungsuniversalität in einem Spezialfall

Die vorigen Abschnitte haben gezeigt, dass die Ableitungen meromorpher Funktionen auch in Punkten der finalen Menge im Allgemeinen kein universelles Verhalten aufweisen. Im Folgenden werden wir jedoch einen Sonderfall behandeln, in welchem wir Universalität nachweisen können. Als Ausgangspunkt hierfür betrachten wir ein Beispiel. Es sei

$$r(z) := \frac{1}{1 - z^2},$$

diese Funktion ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit den beiden Polstellen 1 und -1. Nach dem Satz von Pólya gilt $\mathcal{F}(r) = \{z : z = ix, x \in \mathbb{R}\}$, insbesondere ist also $0 \in \mathcal{F}(r)$. Da r in $\mathbb{D}$ holomorph ist, gilt einerseits die Taylor Entwicklung

$$r(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, z^\nu,$$

andererseits gilt für $|z| < 1$

$$r(z) = \frac{1}{1 - z^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2\,\nu},$$

so dass wir durch Koeffizientenvergleich schließlich erhalten

$$r^{(\nu)}(0) = \begin{cases} \nu! & \text{für gerades } \nu \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für ungerades } \nu \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass die Ableitungen meromorpher Funktionen in Punkten der finalen Menge nicht zwangsweise gegen ∞ streben, da offenbar nicht $r^{(\nu)}(0) \to \infty$ gilt. Weiter beachte man, dass gemäß Lemma 5.1.1 eine ganze Funktion h existiert, welche bezüglich der ungeraden natürlichen Zahlen ableitungsuniversell ist, und für welche somit insbesondere die Menge $\{h^{(n)}(0) : n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}$ dicht ist in $\mathbb{C}$. Setzen wir nun $\phi(z) := r(z) + h(z)$, so gilt $\phi^{(n)}(0) = r^{(n)}(0) + h^{(n)}(0) = h^{(n)}(0)$ für jedes ungerade

$n \in \mathbb{N}$, so dass auch die Menge $\{\phi^{(n)}(0) : n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}$ dicht ist in $\mathbb{C}$. Folglich existieren meromorphe Funktionen ϕ und Punkte $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$, in denen sich die Folge der sukzessiven Ableitungen von ϕ universell verhält. Ausgehend von diesem Beispiel werden wir im Folgenden eine spezielle Klasse meromorpher Funktionen betrachten und zeigen, dass „viele“ Funktionen aus dieser Klasse die Eigenschaft haben, auf „vielen“ Teilmengen der finalen Menge eine Art Ableitungsuniversalität zu besitzen.

Lemma 5.2.11. *Es sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(z_0 - \zeta)^n = (z_0 + \zeta)^n \quad \text{genau dann, wenn } n = l\, q_0 \text{ für ein } l \in \mathbb{N} \text{ ist,}$$

wobei q_0 die gemäß (5.6) bestimmte natürliche Zahl ist.

Beweis. Nach (5.7) sind folgende Aussagen äquivalent

$$\begin{aligned} (z_0 - \zeta)^n &= (z_0 + \zeta)^n \\ m_\zeta^n(z_0) &= 1 \\ e^{2\pi i \frac{p_0}{q_0} n} &= 1. \end{aligned}$$

Da n, p_0 und q_0 aus $\mathbb{N}$ sind, und p_0 und q_0 zudem teilerfremd sind, ist dies genau dann erfüllt, wenn $n = l\, q_0$ für ein $l \in \mathbb{N}$ gilt.

□

Lemma 5.2.12. *Es seien ζ und c aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion R sei definiert durch*

$$R(z) := \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n}.$$

Schließlich sei $E := \{z_1, \ldots, z_m\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}_\zeta$. Dann existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$R^{(n_k)}(z_i) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Beweis. Es sei $\nu \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\begin{aligned} R^{(\nu)}(z) &= (-1)^\nu \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)\, c}{(z+\zeta)^{n+\nu}} + (-1)^\nu \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)(-c)}{(z-\zeta)^{n+\nu}} \\ &= (-1)^\nu c \frac{(n+\nu-1)!}{(n-1)!} \left(\frac{1}{(z+\zeta)^{n+\nu}} - \frac{1}{(z-\zeta)^{n+\nu}} \right) \\ &= (-1)^\nu c \frac{(n+\nu-1)!}{(n-1)!} \frac{(z-\zeta)^{n+\nu} - (z+\zeta)^{n+\nu}}{(z^2-\zeta^2)^{n+\nu}}. \end{aligned}$$

Bei festem $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt folglich $R^{(\nu)}(z_i) = 0$ genau dann, wenn $(z_i - \zeta)^{n+\nu} = (z_i + \zeta)^{n+\nu}$ ist. Nach Lemma 5.2.11 ist dies genau dann erfüllt, wenn $n + \nu = k\, q_i$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wählen wir nun k_i so groß, dass $k\, q_i - n > 0$ für jedes $k > k_i$ gilt, so folgt für jedes $\nu_k^{(i)} := k\, q_i - n$

$$R^{(\nu_k^{(i)})}(z_i) = 0.$$

Folglich existiert zu jedem $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $k_i \in \mathbb{N}$, so dass $R^{(\nu_k^{(i)})}(z_i) = 0$ für jedes $k > k_i$ gilt. Setzen wir nun

$$k_E := \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} k_i, \qquad K := \prod_{i=1}^{m} q_i \qquad \text{und} \qquad \nu_k := k\, K - n,$$

so folgt für jedes $k > k_E$

$$R^{(\nu_k)}(z_i) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Für die Folge $\{n_k\}$ mit $n_k := \nu_{k_E + k}$ erhalten wir nun die Behauptung.

□

Bemerkung 5.2.13. *Die Aussage des obigen Lemmas wird für jede andere Wahl der Koeffizienten der Hauptteile der Funktion R falsch. Wir betrachten etwa die Funktion*

$$R_1(z) := \frac{c_1}{(z + \zeta)^n} + \frac{c_2}{(z - \zeta)^n},$$

wobei c_1 und c_2 aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind mit $c_1 \neq -c_2$, und nehmen an, die Aussage des Lemmas würde gelten. Wir wählen eine endliche Menge $\{z_1, z_2\} \subset \mathcal{A}_\zeta$, so dass die gemäß (5.6) bestimmten natürlichen Zahlen q_1 und q_2 teilerfremd sind. Nach unserer Annahme existiert dann eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$R_1^{(n_k)}(z_j) = 0 \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Wegen

$$R_1^{(n_k)}(z_j) = (-1)^{n_k} \frac{(n + n_k - 1)!}{(n-1)!} \frac{c_1\, (z_j - \zeta)^{n+n_k} + c_2\, (z_j + \zeta)^{n+n_k}}{(z_j - \zeta)^{n+n_k}\, (z_j + \zeta)^{n+n_k}}$$

$$= (-1)^{n_k} \frac{(n + n_k - 1)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z_j - \zeta)^{n+n_k}} \left(c_1\, m_\zeta^{n+n_k}(z_j) + c_2\right)$$

erhalten wir $c_1\, m_\zeta^{n+n_k}(z_j) + c_2 = 0$, und somit $m_\zeta^{n+n_k}(z_j) + \frac{c_2}{c_1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für $j = 1, 2$. Nach Lemma 5.2.6 gilt dann $\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{q_1} = 1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{q_2}$. Da q_1 und q_2 teilerfremd sind, folgt $-\frac{c_2}{c_1} = 1$, was jedoch im Widerspruch zu $c_1 \neq -c_2$ steht.

Ausgehend von den obigen Überlegungen führen wir den folgenden Raum meromorpher Funktionen ein.

Definition 5.2.14. *Es seien ζ und c aus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, weiter sei $n\in\mathbb{N}$. Dann setzen wir*

$$M^n_{\zeta,c} := \left\{\phi\in M(\mathbb{C}) : \phi(z) = \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n} + h(z), h\in H(\mathbb{C})\right\}.$$

Für $\phi_1 = R + h_1 \in M^n_{\zeta,c}$ und $\phi_2 = R + h_2 \in M^n_{\zeta,c}$ mit $R(z) := \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n}$ und $h_1, h_2 \in H(\mathbb{C})$ setzen wir

$$\Delta(\phi_1,\phi_2) := \delta(h_1,h_2),$$

wobei δ die Metrik der kompakten Konvergenz auf dem Raum $H(\mathbb{C})$ ist, siehe auch Bemerkung 1.2.23.

Man sieht leicht, dass $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ ein metrischer Raum ist. Offenbar haben alle Funktionen aus der Menge $M^n_{\zeta,c}$ exakt die beiden Polstellen ζ und $-\zeta$. Nach dem Satz von Pólya ist die finale Menge einer jeden solchen Funktion genau die Gerade, welche durch den Nullpunkt geht und das Segment $[-\zeta,\zeta]$ in einem rechten Winkel schneidet. Die in (5.5) definierte Menge $\mathcal{A}_\zeta$ ist also eine dichte Teilmenge der finalen Menge der Funktionen aus $M^n_{\zeta,c}$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Folge der sukzessiven Ableitungen solcher Funktionen durchaus gewisse universelle Eigenschaften besitzen kann. Zunächst aber zeigen wir, dass $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Lemma 5.2.15. *Der Raum $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ ist vollständig.*

Beweis. Es sei $\{\phi_k\}$ eine Cauchy-Folge in $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ mit $\phi_k = R + h_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$, wobei $R(z) = \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n}$ und $h_k\in H(\mathbb{C})$ ist. Dann existiert zu $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n,m>N$ gilt $\Delta(\phi_n,\phi_m)<\varepsilon$. Wegen $\Delta(\phi_n,\phi_m)=\delta(h_n,h_m)$ folgt, dass $\{h_k\}$ eine Cauchy-Folge in $H(\mathbb{C})$ ist. Da $(H(\mathbb{C}),\delta)$ vollständig ist, existiert ein $h\in H(\mathbb{C})$ mit $\delta(h_k,h)\to 0$ für $k\to\infty$. Setzen wir $\phi(z) := R(z)+h(z)$, so folgt

$$\Delta(\phi_k,\phi) = \delta(h_k,h)\to 0 \quad (k\to\infty),$$

das heißt die Folge $\{\phi_k\}$ konvergiert in $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ gegen $\phi\in M^n_{\zeta,c}$.

□

Satz 5.2.16. *Es seien ζ und c aus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, sowie $n\in\mathbb{N}$. Dann existiert zu jeder endlichen Menge $E=\{z_1,\ldots,z_m\}\subset\mathcal{A}_\zeta$ eine in $(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ residuale Menge $\mathfrak{U}_E$, so dass die Menge $\{\phi^{(n)}(z)|_E : n\in\mathbb{N}\}$ für jedes $\phi\in\mathfrak{U}_E$ dicht in $C(E)$ ist.*

Beweis. Wir werden zum Beweis das Universalitätskriterium (Satz 2.1.6) verwenden. Dazu setzen wir $X=(M^n_{\zeta,c},\Delta)$ und $Y=(\mathbb{C}^m,d_e)$, wobei wir mit d_e die euklidische Metrik bezeichnen. Dann ist X ein vollständiger metrischer Raum und Y ist separabel. Wir betrachten für jedes $j\in\mathbb{N}$ die Abbildung $T_j : X\to Y$ mit $T_jf := (f^{(j)}(z_1),\ldots,f^{(j)}(z_m))$. Man beachte, dass wir wegen der Endlichkeit von $E=\{z_1,\ldots,z_m\}$ den Raum $\mathbb{C}^m$ mit

dem Raum $C(E)$ identifizieren können, und dass die Dichtheit einer Menge in $(\mathbb{C}^m, d_e)$ äquivalent zur Dichtheit in $(C(E), d_E)$ ist, wobei $d_E(f,g) := \max_E |f(z) - g(z)|$ ist.
Wir zeigen zunächst, dass T_j für jedes j stetig ist. Es sei dazu $j \in \mathbb{N}$ fest, und $\{f_k\}$ eine Folge in $M^n_{\zeta,c}$ mit $f_k = R + h_k$, so dass $\Delta(f_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$ und für ein $f \in M^n_{\zeta,c}$ mit $f = R + h$ gilt, wobei $R(z) = \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n}$ und $h_k, h \in H(\mathbb{C})$ seien. Dann folgt $\delta(h_k, h) \to 0$, und somit die kompakte Konvergenz von $\{h_k\}$ gegen h auf $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Weierstrass überträgt sich die Konvergenz auf die Ableitungen, so dass wir insbesondere erhalten

$$\max_E \left| h_k^{(j)}(z) - h^{(j)}(z) \right| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

und somit wegen $f_k^{(j)} - f^{(j)} = R^{(j)} + h_k^{(j)} - R^{(j)} - h^{(j)} = h_k^{(j)} - h^{(j)}$ auch

$$\max_E \left| f_k^{(j)}(z) - f^{(j)}(z) \right| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

woraus die Stetigkeit von T_j folgt.
Es bleibt die Transitivität der Folge $\{T_j\}$ zu zeigen. Es seien dazu eine offene, nichtleere Teilmenge U von $(M^n_{\zeta,c}, \Delta)$, und eine offene, nichtleere Teilmenge V von $(\mathbb{C}^m, d_e)$ gegeben. Weiter seien $g \in U$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in V$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(g) \subset U$ und $V_\varepsilon(\alpha) \subset V$ gilt, wobei $U_\varepsilon(g)$ und $V_\varepsilon(\alpha)$ die ε-Umgebungen von g und α sind. Es bleibt zu zeigen, dass ein $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$\phi \in U_\varepsilon(g) \subset U \quad \text{und} \quad \left|\phi^{(N)}(z_i) - \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{für jedes } i = 1, \ldots, m.$$

Dann folgt $d_e(T_N\phi, \alpha) < \varepsilon$, das heißt $T_N\phi \in V_\varepsilon(\alpha) \subset V$, und somit mit dem Universalitätskriterium die Behauptung.
Nach Voraussetzung gilt $g(z) = \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n} + j(z) = R(z) + j(z)$, wobei j eine ganze Funktion ist. Gemäß Lemma 5.2.12 existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$R^{(n_k)}(z_i) = 0 \quad \text{für jedes } i = 1, \ldots, m.$$

Nach Lemma 5.1.1 existiert eine ganze Funktion φ, welche ableitungsuniversell bezüglich der Folge $\{n_k\}$ ist, und welche $\delta(\varphi, j) < \varepsilon$ erfüllt, so dass wir schließlich für die Funktion $\phi(z) := R(z) + \varphi(z) \in M^n_{\zeta,c}$ erhalten

$$\Delta(\phi, g) = \delta(\varphi, j) < \varepsilon,$$

und somit $\phi \in U_\varepsilon(g)$. Wir betrachten nun die kompakte Menge $E = \{z_1, \ldots, z_m\}$ und die Funktion $u : E \to \mathbb{C}$ mit $u(z_i) = \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, m$, welche offenbar aus $A(E) = C(E)$ ist. Da φ ableitungsuniversell bezüglich $\{n_k\}$ ist, existiert eine Teilfolge $\{n_{k_l}\}$ mit

$$\varphi^{(n_{k_l})}(z) \to u(z) \quad \text{gleichmäßig auf } E \quad (l \to \infty),$$

das heißt

$$\varphi^{(n_{k_l})}(z_i) \to u(z_i) = \alpha_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, m \quad (l \to \infty).$$

Insbesondere existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l > l_0$ gilt

$$\left|\varphi^{(n_{k_l})}(z_i) - \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, m.$$

Wählen wir ein festes $\tilde{l} > l_0$ und setzen $N := n_{k_{\tilde{l}}}$, so erhalten wir insgesamt für jedes $i = 1, \dots, m$

$$\left|\phi^{(N)}(z_i) - \alpha_i\right| = \left|R^{(N)}(z_i) + \varphi^{(N)}(z_i) - \alpha_i\right| = \left|\varphi^{(N)}(z_i) - \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{m},$$

und somit wegen $\phi \in U_\varepsilon(g)$ die Behauptung.

□

Ist also eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}_\zeta$ vorgegeben, so haben „viele" Funktionen aus $M^n_{\zeta,c}$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Ableitungen sich universell auf dieser endlichen Menge verhält. Im Folgenden werden wir dieses Ergebnis noch erheblich erweitern. Zunächst einmal bemerken wir, dass der obige Satz auch für Funktionen gilt, bei denen die Polstellen nicht symmetrisch zum Nullpunkt sind.

Bemerkung 5.2.17. *Es seien ζ_1 und ζ_2 aus $\mathbb{C}$ mit $\zeta_1 \neq \zeta_2$, weiter seien c aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Menge*

$$M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c} := \left\{\phi \in M(\mathbb{C}) : \phi(z) = \frac{c}{(z-\zeta_1)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta_2)^n} + h(z), h \in H(\mathbb{C})\right\}.$$

Wir bezeichnen mit ζ_{12} den Mittelpunkt des Segments $[\zeta_1, \zeta_2]$, das heißt $\zeta_{12} := \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$, und setzen $\zeta := \zeta_{12} - \zeta_1$. Weiter betrachten wir die Abbildung

$$T_{\zeta_{12}} : (M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}, \Delta) \to (M^n_{\zeta,c}, \Delta) \quad \text{mit} \quad T_{\zeta_{12}}\phi(z) := \phi(z + \zeta_{12}).$$

Man zeigt leicht, dass diese Abbildung bijektiv und stetig ist, das gleiche gilt für die Umkehrabbildung $T^{-1}_{\zeta_{12}} : M^n_{\zeta,c} \to M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}$ mit $T^{-1}_{\zeta_{12}}\phi(z) := \phi(z - \zeta_{12})$. Nach Lemma 5.2.15 ist also auch $(M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}, \Delta)$ ein vollständiger metrischer Raum.
Ist nun $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ und $z_0 \in \mathcal{F}(\phi)$, so dass die Menge $\{\phi^{(n)}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist, so besitzt die Funktion $\varphi(z) := T^{-1}_{\zeta_{12}}\phi(z) = \phi(z - \zeta_{12}) \in M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}$ diese Eigenschaft offenbar im Punkt $z_0 + \zeta_{12} \in \mathcal{F}(\varphi)$.
Schließlich beachte man noch, dass für eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge $\mathcal{U}$, die Menge $T^{-1}_{\zeta_{12}}(\mathcal{U})$ residual in $M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}$ ist. Da in diesem Fall nämlich eine dichte G_δ-Menge $O = \bigcap_{n=1}^\infty O_n$ mit $O \subset \mathcal{U}$ existiert, folgt dies aus

$$T^{-1}_{\zeta_{12}}(\mathcal{U}) \supset T^{-1}_{\zeta_{12}}(O) = T^{-1}_{\zeta_{12}}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-1}_{\zeta_{12}}(O_n),$$

und den Eigenschaften der Abbildung $T_{\zeta_{12}}^{-1}$.
Somit folgt insgesamt, dass ein entsprechendes Ergebnis zu Satz 5.2.16 auch für die Menge $M^n_{\zeta_1,\zeta_2,c}$ *formuliert werden kann, dasselbe gilt für die folgenden Resultate, auch wenn wir uns hierbei auf den Fall* $M^n_{\zeta,c}$ *beschränken werden.*

Mit Hilfe des Satzes von Baire können wir den obigen Satz 5.2.16 unmittelbar erweitern.

Korollar 5.2.18. *Es seien* ζ *und* c *aus* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *weiter sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(i) Es gibt eine in $M^n_{\zeta,c}$ *residuale Menge* $\mathcal{U}_1$, *so dass die Menge* $\{\phi^{(n)}(z)|_E : n \in \mathbb{N}\}$ *für jedes* $\phi \in \mathcal{U}_1$ *und jede endliche Menge* $E \subset \mathcal{A}_\zeta$ *dicht in* $C(E)$ *ist.*

(ii) Es gibt eine in $M^n_{\zeta,c}$ *residuale Menge* $\mathcal{U}_2$, *so dass zu jedem* $\phi \in \mathcal{U}_2$ *und zu jeder Funktion* $h : \mathcal{A}_\zeta \to \mathbb{C}$ *eine Teilfolge* $\{n_k\}$ *der natürlichen Zahlen existiert mit*

$$\phi^{(n_k)}(z) \to h(z) \quad \textit{punktweise auf } \mathcal{A}_\zeta.$$

Beweis. Es sei $\{I_k\}$ eine Abzählung aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}_\zeta$. Nach Satz 5.2.16 existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge $\mathcal{U}_{I_k}$, so dass $\{\phi^{(n)}(z)|_{I_k} : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $\phi \in \mathcal{U}_{I_k}$ dicht in $C(I_k)$ ist. Die Menge

$$\mathcal{U}_1 := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_{I_k}$$

ist nach dem Satz von Baire residual in $M^n_{\zeta,c}$ und jedes $\phi \in \mathcal{U}_1$ erfüllt offenbar die erste Aussage.

Zum Nachweis der zweiten Aussage betrachten wir eine Folge $\{E_k\}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{A}_\zeta$ mit $E_k \subset E_{k+1}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathcal{A}_\zeta$. Wieder existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge $\mathcal{U}_{E_k}$, so dass $\{\phi^{(n)}(z)|_{E_k} : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $\phi \in \mathcal{U}_{E_k}$ dicht in $C(E_k)$ ist. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U}_2 := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_{E_k},$$

welche nach dem Satz von Baire residual ist. Ist nun ein $\phi \in \mathcal{U}_2$ und eine Funktion $h : \mathcal{A}_\zeta \to \mathbb{C}$ gegeben, so existiert zu jedem k ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ so dass gilt

$$\max_{E_k} \left|\phi^{(n_k)}(z) - h(z)\right| < \frac{1}{k}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Somit ist gezeigt, dass die Ableitungen meromorpher Funktionen in Punkten der finalen Menge durchaus über gewisse universelle Eigenschaften verfügen können. Man beachte jedoch, dass die obigen Ergebnisse sich stets auf Punkte aus der von uns definierten abzählbaren dichten Teilmenge $\mathcal{A}_\zeta$ der finalen Menge beschränken. Mit Hilfe einer Technik, welche auch bei Müller [46] verwendet wird, werden wir nun zeigen, dass diese Einschränkung aufgehoben werden kann. Dazu führen wir zunächst die sogenannte Hausdorff Metrik ein.

Definition 5.2.19. *Es seien $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$. Dann ist der Hausdorff Abstand zwischen A und B definiert durch*

$$d_H(A,B) := \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|\,,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\}.$$

Für eine abgeschlossene Teilmenge $E \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(E)$ den Raum aller nichtleeren kompakten Teilmengen von E. Versehen mit der Hausdorff Metrik, wird $(\mathcal{K}(E), d_H)$ zu einem vollständigen metrischen Raum.

Mit dieser Definition können wir nun das folgende Ergebnis formulieren.

Satz 5.2.20. *Es seien ζ und c aus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathcal{F}_\zeta$ die finale Menge der Funktionen aus $M^n_{\zeta,c}$. Dann existiert eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge $\mathcal{U}$, so dass für jedes $\phi \in \mathcal{U}$ gilt:*
Es gibt eine in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$ residuale Menge $\mathcal{I}$, so dass $\{\phi^{(n)}(z)|_I : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $I \in \mathcal{I}$ dicht in $C(I)$ ist.

Beweis. Es sei $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ fest. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U}_\phi := \big\{I \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta) : \{\phi^{(n)}(z)|_I : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist dicht in } C(I)\big\},$$

und zeigen dass dies eine G_δ-Menge ist. Dazu sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome, deren Koeffizienten rationale Real- und Imaginärteile haben. Diese Menge ist abzählbar und nach dem Satz von Mergelian dicht in $C(I)$ für jedes $I \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$. Nun gilt

$$\mathcal{U}_\phi = \bigcap_{p\in\mathcal{P}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{I \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta) : \max_I\left|\phi^{(n)}(z) - p(z)\right| < \frac{1}{j}\right\}.$$

Da die Funktionen $\phi^{(n)}$ und p auf jedem $I \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$ gleichmäßig stetig sind, folgt dass die Menge

$$\left\{I \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta) : \max_I\left|\phi^{(n)}(z) - p(z)\right| < \frac{1}{j}\right\}$$

offen ist. Folglich ist $\mathcal{U}_\phi$ eine G_δ-Menge.

Es sei nun $\mathcal{A}_\zeta$ die gemäß (5.5) definierte abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{F}_\zeta$ und $\{E_k\}$ eine Abzählung aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}_\zeta$. Nach Definition der Hausdorff Metrik ist $\{E_k\}$ dicht in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$, und nach Satz 5.2.16 ist die Menge

$$\mathcal{U}_{E_k} := \left\{\phi \in M^n_{\zeta,c} : \{\phi^{(n)}(z)|_{E_k} : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist dicht in } C(E_k)\right\}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ residual in $M^n_{\zeta,c}$, so dass die Menge

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{E_k} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left\{\phi \in M^n_{\zeta,c} : \{\phi^{(n)}(z)|_{E_k} : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist dicht in } C(E_k)\right\}$$

nach dem Satz von Baire ebenfalls residual ist. Für jede Funktion ϕ aus dieser Menge gilt offenbar $\{E_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}_\phi$, so dass $\mathcal{U}_\phi$ eine dichte G_δ-Menge ist. Folglich gibt es eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge an Funktionen ϕ, für welche die Menge $\mathcal{U}_\phi$ residual in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$ ist. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Dieses Ergebnis ist offenbar eine erhebliche Verschärfung von Satz 5.2.16. Es besagt in gewisser Weise, dass „viele“ Funktionen aus der Menge $M^n_{\zeta,c}$ die Eigenschaft haben, auf „vielen“ kompakten Teilmengen der finalen Menge eine Art Ableitungsuniversalität zu besitzen, allerdings macht es keine Aussage darüber, wie diese Mengen konkret aussehen. Da man jedoch mit einer Technik von Körner [31] leicht zeigen kann, dass der Raum $\mathcal{K}(E)$, wobei $E \subset \mathbb{C}$ nicht einpunktig, zusammenhängend und abgeschlossen ist, eine residuale Menge an überabzählbaren Mengen enthält, können wir leicht den folgenden interessanten Zusatz beweisen.

Korollar 5.2.21. *Es sei $\mathcal{U}$ die Menge aus Satz 5.2.20 und $\phi \in \mathcal{U}$. Dann gibt es eine in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$ residuale Menge $\mathcal{I}$, so dass jedes $I \in \mathcal{I}$ überabzählbar ist und $\{\phi^{(n)}(z)|_I : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $I \in \mathcal{I}$ dicht in $C(I)$ ist.*

Beweis. Aus Satz 5.2.20 folgt die Existenz einer in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$ residualen Menge $\mathcal{I}_1$, so dass $\{\phi^{(n)}(z)|_I : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $I \in \mathcal{I}_1$ dicht in $C(I)$ ist. Es sei nun

$$\mathcal{I}_2 := \{M \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta) : M \text{ ist überabzählbar}\}.$$

Dann ist $\mathcal{I}_2$ residual in $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\zeta)$, so dass die Menge $\mathcal{I} := \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ nach dem Satz von Baire ebenfalls residual ist.

□

Bemerkung 5.2.22. *Ist $\phi(z) = R(z) + h(z) \in M^n_{\zeta,c}$ eine Funktion und $z_0 \in \mathcal{A}_\zeta \subset \mathcal{F}(\phi)$, so dass ein $M \in \mathbb{N}$ und eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ mit $\left|\phi^{(n_k)}(z_0)\right| < M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, so folgt aus Satz 5.2.7, dass $R^{(n_k)}(z_0) = 0$ für alle hinreichend großen k gilt. Aus obigem Korollar lässt sich folgern, dass diese Bedingung im Allgemeinen jedoch nicht* *notwendig dafür ist, dass $\left|\phi^{(n_k)}(z_0)\right| < M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Nach diesem Korollar gibt es nämlich Funktionen $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ und (überabzählbar viele) Punkte $z_0 \in \mathcal{F}(\phi) \setminus \mathcal{A}_\zeta$, so dass $\{\phi^{(n)}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. Insbesondere existiert dann ein $M \in \mathbb{N}$ und eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$, so dass $\left|\phi^{(n_k)}(z_0)\right| < M$ für alle k gilt, da hierbei aber $z_0 \notin \mathcal{A}_\zeta$ ist, gilt nicht $R^{(n_k)}(z_0) = 0$ für alle hinreichend großen k, wie man leicht aus den Beweisen zu Lemma 5.2.11 und 5.2.12 folgern kann.*

Wir werden nun noch zeigen, dass die obigen Ergebnisse scharf sind, indem wir beweisen, dass Funktionen $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ nie auf zusammenhängenden Kompakta $K \subset \mathcal{F}(\phi)$ ableitungsuniversell sein können. Dazu führen wir zunächst den Begriff der *Dirichlet Menge* ein.

Definition 5.2.23. *Es sei $E \subset \partial\mathbb{D}$ eine abgeschlossene Menge. Dann nennen wir E eine Dirichlet Menge, wenn eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen existiert mit*

$$\max_E |z^{n_k} - 1| \to 0 \quad \textit{für } k \to \infty.$$

Ein klassisches Ergebnis von Dirichlet besagt, dass jede endliche Menge $E \subset \partial\mathbb{D}$ eine Dirichlet Menge ist, siehe etwa [27]. Der folgende Satz stellt nun einen interessanten Zusammenhang zwischen den Ableitungen meromorpher Funktionen $\phi \in M^n_{\zeta,c}$, der Möbius Transformation m_ζ und Dirichlet Mengen her.

Satz 5.2.24. *Es sei $\phi \in M^n_{\zeta,c}$. Weiter sei $K \subset \mathcal{F}(\phi)$ ein Kompaktum und es existiere eine Teilfolge der natürlichen Zahlen $\{n_k\}$ und ein $M \in \mathbb{N}$, so dass gilt*

$$\max_K \left|\phi^{(n_k)}(z)\right| < M \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für die Folge $\{\nu_k\}$ mit $\nu_k := n + n_k$

$$\max_K \left| \frac{(z-\zeta)^{\nu_k} - (z+\zeta)^{\nu_k}}{(z+\zeta)^{\nu_k}} \right| = \max_K \left|m_\zeta^{\nu_k}(z) - 1\right| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

das heißt die Menge $m_\zeta(K) \subset \partial\mathbb{D}$ ist eine Dirichlet Menge.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie im ersten Teil des Beweises zu Satz 5.2.7 und nehmen an, die Aussage wäre falsch. Dann existiert eine Teilfolge $\{n_{k_l}\}$ von $\{n_k\}$ und ein $\gamma > 0$, so dass gilt

$$\max_K \left|m_\zeta^{n+n_{k_l}}(z) - 1\right| \geq \gamma > 0 \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}. \tag{5.13}$$

Nach Voraussetzung gilt $\phi(z) = \frac{c}{(z+\zeta)^n} + \frac{-c}{(z-\zeta)^n} + h(z) = R(z) + h(z)$, wobei h eine ganze Funktion ist. Wir wählen ein festes $\delta > 0$ und setzen

$$m_K := \max_K |z - \zeta| \qquad \text{und} \qquad M_K := \max_K |z - \zeta| + \max_K |z| + \delta.$$

Dann ist h für jedes $z_0 \in K$ holomorph in $\{z : |z - z_0| \leq m_k + \delta\}$, so dass wir mit der Cauchyschen Ungleichung für $z_0 \in K$ und alle $l \in \mathbb{N}$ erhalten

$$\left|h^{(n_{k_l})}(z_0)\right| \leq \frac{n_{k_l}!\, c(z_0)}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}},$$

wobei $c(z_0) := \max_{\{z:|z-z_0|=m_K+\delta\}} |h(z)|$ ist. Setzen wir $C := \max_{\{z:|z|=M_K\}} |h(z)|$, so folgt für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\max_K \left|h^{(n_{k_l})}(z)\right| \leq \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}}.$$

Weiter gilt für $z_0 \in K$

$$\begin{aligned}
&\left|\phi^{(n_{k_l})}(z_0)\right| \\
&\quad = \left|R^{(n_{k_l})}(z_0) + h^{(n_{k_l})}(z_0)\right| \\
&\quad \geq \left|R^{(n_{k_l})}(z_0)\right| - \left|h^{(n_{k_l})}(z_0)\right| \\
&\quad \geq \left|(-1)^{n_{k_l}} c\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{(z_0 - \zeta)^{n+n_{k_l}} - (z_0 + \zeta)^{n+n_{k_l}}}{(z_0 - \zeta)^{n+n_{k_l}} (z_0 + \zeta)^{n+n_{k_l}}}\right| - \max_K \left|h^{(n_{k_l})}(z)\right| \\
&\quad \geq |c|\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{1}{|z_0 - \zeta|^{n+n_{k_l}}} \left|m_\zeta^{n+n_{k_l}}(z_0) - 1\right| - \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}} \\
&\quad \geq |c|\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{1}{m_K^{n+n_{k_l}}} \left|m_\zeta^{n+n_{k_l}}(z_0) - 1\right| - \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}}.
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $z_0 \in K$ gilt, folgt unter Verwendung von (5.13)

$$\begin{aligned}
&\max_K \left|\phi^{(n_{k_l})}(z)\right| \\
&\quad \geq \max_K \left(|c|\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{1}{m_K^{n+n_{k_l}}} \left|m_\zeta^{n+n_{k_l}}(z) - 1\right| - \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}}\right) \\
&\quad = |c|\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{1}{m_K^{n+n_{k_l}}} \max_K \left|m_\zeta^{n+n_{k_l}}(z) - 1\right| - \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}} \\
&\quad \geq |c|\, \frac{(n + n_{k_l} - 1)!}{(n-1)!} \frac{\gamma}{m_K^{n+n_{k_l}}} - \frac{n_{k_l}!\, C}{(m_K + \delta)^{n_{k_l}}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt jedoch $\max_K \left|\phi^{(n_{k_l})}(z)\right| \to \infty$ für $l \to \infty$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung $\max_K \left|\phi^{(n_k)}(z)\right| < M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ darstellt.

□

Dieser Satz liefert somit eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Menge eine Dirichlet Menge ist. Eine leichte Folgerung hieraus ist das folgende Ergebnis, welches man auch aus einem Resultat von Körner [31] erhält.

Korollar 5.2.25. *Es existiert eine in $\mathcal{K}(\partial\mathbb{D})$ residuale Menge an überabzählbaren Dirichlet Mengen.*

Beweis. Nach Korollar 5.2.21 existiert eine Funktion $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ und eine in $\mathcal{K}(\mathcal{F}(\phi))$ residuale Menge $\mathcal{I}$ an überabzählbaren Mengen, so dass $\{\phi^{(n)}(z)|_I : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $I \in \mathcal{I}$ dicht in $C(I)$ ist. Aufgrund der Eigenschaften der Abbildung m_ζ ist die Menge $\{m_\zeta(I) : I \in \mathcal{I}\}$ eine residuale Teilmenge von $\mathcal{K}(\partial\mathbb{D})$, zudem ist $m_\zeta(I)$ für jedes $I \in \mathcal{I}$ überabzählbar. Weiter beachte man, dass zu jedem $I \in \mathcal{I}$ eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\max_I \left|\phi^{(n_k)}(z)\right| < M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aus Satz 5.2.24 folgt, dass die Menge $m_\zeta(I) \subset \partial\mathbb{D}$ für jedes $I \in \mathcal{I}$ eine Dirichlet Menge ist, und somit die Behauptung.

□

Schließlich zeigen wir noch das folgende Ergebnis, hierbei bezeichnen wir ein nicht einpunktiges, zusammenhängendes Kompaktum als Kontinuum.

Korollar 5.2.26. *Es sei $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ und $K \subset \mathcal{F}(\phi)$ ein Kontinuum. Dann gibt es keine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen, so dass ein $M \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\max_K \left|\phi^{(n_k)}(z)\right| < M \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere kann die Menge $\{\phi^{(n)}(z)|_K : n \in \mathbb{N}\}$ nicht dicht in $C(K)$ sein.

Beweis. Wir nehmen an, dass eine Folge $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für ein $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ gilt

$$\max_K \left|\phi^{(n_k)}(z)\right| < M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei $K \subset \mathcal{F}(\phi)$ ein Kontinuum ist. Aus Satz 5.2.24 folgt, dass die Menge $m_\zeta(K) \subset \partial\mathbb{D}$, welche aufgrund der Eigenschaften von m_ζ ebenfalls ein Kontinuum ist, eine Dirichlet Menge ist. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

□

Bemerkung 5.2.27. *Dieses Korollar besagt gewissermaßen, dass die obigen Ergebnisse bestmöglich sind. So gibt es eine in $M^n_{\zeta,c}$ residuale Menge $\mathcal{U}$, so dass zu jedem $\phi \in \mathcal{U}$ eine in $\mathcal{K}(\mathcal{F}(\phi))$ residuale Menge $\mathcal{I}$ an (überabzählbaren) Kompakta existiert, so dass ϕ auf jedem $I \in \mathcal{I}$ ableitungsuniversell ist. Es kann jedoch keine Funktion $\phi \in M^n_{\zeta,c}$ geben, welche auf einem Kontinuum $K \subset \mathcal{F}(\phi)$ ableitungsuniversell ist.*

Literaturverzeichnis

[1] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 5083-5117.

[2] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, 2009.

[3] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno, J. A. Prado-Bassas, *Maximal cluster sets along arbitrary curves*, J. Approx. Theory 129 (2004), 207-216.

[4] J. P. Bès, A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. 167 (1999), 94-112.

[5] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[6] C. Blair, L. A. Rubel, *A triply universal entire function*, Enseign. Math. 2 (1984), 269-274.

[7] K. C. Chan, *Universal meromorphic functions*, Complex Variables 46 (2001), 307-314.

[8] E. F. Collingwood, A. J. Lohwater, *The theory of cluster sets*, Cambridge University Press, 1966.

[9] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Springer Verlag, 1973.

[10] G. Costakis, M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*, Adv. Math. 182 (2004), 278-306.

[11] S. M. Duyos-Ruiz, *Universal functions of the structure of the space of entire functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 279 (1984), 792-795 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Soviet Math. Dokl. 30 (1984), 713-716.

[12] A. Edrei, G. R. MacLane, *On the zeros of the derivatives of an entire function*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 702-706.

[13] D. Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser, 1980.

[14] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.

[15] P. M. Gauthier, W. Hengartner, *Approximation uniforme qualitative sur des ensembles non bornés*, Sém. Math. Sup., Les Presses de l'université de Montréal, 1982.

[16] W. Gehlen, *Note on the sharpness of Jentzsch's theorem*, Complex Variables 29 (1996), 379-382.

[17] W. Gehlen, W. Luh, *On the sharpness of Jentzsch-Szegö-type theorems*, Arch. Math. 63 (1994), 33-38.

[18] R. M. Gethner, J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281-288.

[19] A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 236, American Mathematical Society, 2008.

[20] W. Gross, *Über die Singularitäten analytischer Funktionen*, Monatshefte für Math. und Phys. 29 (1918), 3-47.

[21] K.-G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen 176, 1987.

[22] K.-G. Grosse-Erdmann, *On the universal functions of G. R. MacLane*, Complex Variables 15 (1990), 193-196.

[23] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 345-381.

[24] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[25] W. K. Hayman, *On Iversen's theorem for meromorphic functions with few poles*, Acta Math. 141 (1978), 115-145.

[26] F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Thèse de Helsingfors, 1914.

[27] J.-P. Kahane, *Baire's category theorem and trigonometric series*, J. Anal. Math. 80 (2000), 143-182.

[28] A. N. Kanatnikov, *Cluster sets with respect to sequences of compacta*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 253 (1980), 14-17 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 5-9.

[29] A. N. Kanatnikov, *Cluster sets of meromorphic functions relative to sequences of compact sets*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48 (1984), 1196-1213 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Math. USSR-Izv. 25 (1985), 501-517.

[30] S. Kierst, E. Szpilrajn, *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes*, Fund. Math. 21 (1933), 276-294.

[31] T. W. Körner, *Kahane's Helson curve*, J. Fourier Anal. Appl. Special Issue Orsay 1993 (1995), 325-346.

[32] W. Luh, *On universal functions*, Fourier Analysis and Approximation Theory (Proc. Colloq., Budapest 1976), Vol. II, 503-511, North Holland, Amsterdam, 1978.

[33] W. Luh, *Über cluster sets analytischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 33 (1979), 137-142.

[34] W. Luh, *Approximation by antiderivatives*, Constr. Approx. 2 (1986), 179-187.

[35] W. Luh, *On the „universality“ of any holomorphic function*, Results in Math. 10 (1986), 130-136.

[36] W. Luh, *Holomorphic monsters*, J. Approx. Theory 53 (1988), 128-144.

[37] W. Luh, *Entire functions with various universal properties*, Complex Variables Theory Appl. 31 (1996), 87-96.

[38] W. Luh, V. Martirosian, *On the growth of universal meromorphic functions*, Analysis 20 (2000), 137-147.

[39] W. Luh, V. Martirosian, *The growth of universal meromorphic functions in a disk*, J. Contemp. Math. Anal. 37 (2002), 23-35.

[40] W. Luh, V. Martirosian, J. Müller, *Restricted T-universal functions on multiply connected domains*, Acta Math. Hungar. 97 (2002), 173-181.

[41] W. Luh, T. Meyrath, M. Niess, *Universal meromorphic approximation on Vitushkin sets*, J. Contemp. Math. Anal. 43 (2008), 365-371.

[42] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. 2 (1952), 72-87.

[43] G. R. MacLane, *Meromorphic functions with small characteristic and no asymptotic values*, Mich. Math. J. 8 (1961), 177-185.

[44] D. Mayenberger, *Konstruktive und generische Gewinnung universeller Funktionen*, Dissertation, Universität Trier, 2005.

[45] S. N. Mergelian, *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Uspehi Mat. Nauk 7, no.2(48) (1952), 31-122 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Amer. Math. Soc. Transl. 3 (1962), 294-391.

[46] J. Müller, *Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris 348 (2010), 1155-1158.

[47] A. A. Nersesian, *On Carleman sets*, Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat. 6 (1971), 465-471 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Amer. Math. Soc. Transl. 122 (1984), 99-104.

[48] M. Niess, *Konstruktion universeller Funktionen mit zusätzlichen Eigenschaften*, Dissertation, Universität Trier, 2006.

[49] G. Pólya, *Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten*, Math. Zeit. 12 (1922), 36-60.

[50] G. Pólya, *On the zeros of the derivatives of a function and its analytic character*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 178-191.

[51] A. Roth, *Uniform and tangential approximations by meromorphic functions on closed sets*, Canad. J. Math. 28 (1976), 104-111.

[52] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[53] C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta Math. 6 (1885), 228-244.

[54] J. L. Schiff, *Normal families*, Springer, 1993.

[55] R. Tenthoff, *Universelle holomorphe Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen*, Dissertation, Universität Trier, 2000.

[56] A. G. Vitushkin, *The analytic capacity of sets in problems of approximation theory*, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967), 141-199 [Russisch]. Engl. Übersetzung: Russian Math. Surveys 22 (1967), 139-200.

[57] A. Vogt, *Marcinkiewicz-Funktionen in der komplexen Ebene und universelle Approximationsoperatoren*, Dissertation, Universität Trier, 2008.

[58] L. Zalcman, *Analytic capacity and rational approximation*, Lecture Notes in Math. No. 50, Springer, 1968.

[59] P. Zappa, *On universal holomorphic functions*, Bolletino U.M.I. 2-A, 7 (1988), 345-352.