Lexikalische Kodierung des Begriffssystems

**Dem Fachbereich Sprach-, Literatur-
und Medienwissenschaften der**

Universität Trier

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. phil.

eingereichte Dissertation

von
Herrn Dariusch Bagheri

Abschluss des Verfahrens: November 2017

1. Gutachter: Prof. Dr. Reinhard Köhler
2. Gutachter: Prof. Dr. Olaf Post

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung **5**
1.1. Begriffe . . . 8
1.2. Intension und Extension . . . 10
1.3. Die Beziehungen Art-Gattung-Differenz . . . 10
1.4. Ordnungsstruktur . . . 12
1.5. Stelligkeit von Begriffen . . . 13
1.6. Andere Beziehungen . . . 15
1.7. Zusammenfassung . . . 16

2. Ordnungstheoretische Grundlagen **17**
2.1. Grundlegende Beziehungen . . . 17
2.2. Diagramme . . . 18
2.3. Verbände . . . 21
2.3.1. Verbandsklassen . . . 26
2.4. Einbettung von Ordnungen in Verbände . . . 27
2.4.1. Hauptabschnitte . . . 29
2.4.2. Abschnitte . . . 31
2.4.3. Schnitte . . . 32
2.5. Zusammenfassung . . . 33

3. Begriffssystemtheorien **35**
3.1. Definitionstheorie . . . 36
3.2. Begriffssysteme nach Kauppi . . . 38
3.2.1. Begriffsoperatoren . . . 41
3.2.2. Besondere Begriffe . . . 49
3.2.3. Anwendung . . . 52
3.2.4. Relationsbegriffe . . . 56
3.2.5. Erweiterung der Enthält-Relation . . . 62
3.3. Formale Begriffsanalyse . . . 64
3.3.1. Berechnung des Begriffsverbandes . . . 70
3.3.2. Negierte formale Begriffe . . . 71
3.3.3. Mehrwertige Kontexte . . . 73
3.3.4. Relationen . . . 75

3.4. Freytag-Löringhoffs *Neue Logik* 77
3.5. Description Logic 84
3.6. Zusammenfassung 88

4. Lexikalisch-Semantische Netze 93
4.1. Semantische Relationen in der Lexik 94
4.2. WordNet 102
4.3. Zusammenfassung 110

5. Bedeutungen und Begriffe 117
5.1. Bedeutungsanalyse 118
5.2. Nomen 119
5.3. Verben 127
5.4. Adjektive 137
5.5. Adverbien, Partikel 143
5.6. Negierte Bedeutungsbestandteile 143
5.7. Zusammenfassung 144

6. Fazit und Ausblick 149
6.1. Quantitative Untersuchungen 151
6.2. Anwendungsgebiete 154
6.3. Anthropologie 156
6.4. Begriffs-Werkbank 157

A. Symbole 161

B. Verteilungen 165

C. Literatur 167

1. Einführung

Der Anlass zu dieser Arbeit reicht weit zurück in meine Studienzeit als ich gemeinsam mit Kommilitonen an einem Projekt zur Untersuchung von Begriffshierarchien in Bedeutungswörterbüchern arbeitete. Den Ausgangspunkt dieses Projektes bildete ein Artikel von Altmann und Kind über ein semantisches Gesetz ([AK83]), das die Verteilung von Lexemen in einer Begriffshierarchie beschreibt. Die Daten dazu stammten vom französischen Sprachforscher Robert Martin ([Mar74]), der aus einem französischen Bedeutungswörterbuch Definitionsketten ermittelt hatte. Eine Definitionskette beginnt mit einem Eintrag bzw. Wort im Lexikon. Dieses bildet das erste Wort der Kette. In der Bedeutung zu diesem Wort wird nach dem Oberbegriff gesucht, dem Hyperonym. Der Oberbegriff ist das zweite Glied der Kette. Mit diesem zweiten Wort wird ebenso verfahren wie mit dem ersten Wort. Das Ganze wird so lange wiederholt, bis ein Wort gefunden wird in dessen Bedeutungserklärung ein Begriff vorkommt, der keinen Eintrag im Lexikon hat. Dieses Wort ist das Schlussglied der Kette. Auf diese Weise erhält man z. B. diese Definitionsfolge

pistolet – arme – instrument – outil – objet – chose

Für alle Daten des französischen Lexikons ergab sich eine Verteilung der Begriffe auf die verschiedenen Stufen der Hierarchie wie in Tabelle 1 dargestellt. Auf der Ebene der Ausgangswörter wie *pistolet* gab es 1723 Wörter, auf der nächsten Ebene 348 usw. Altmann und Kind nahmen an, dass diese Wörter, insbesondere die Nomen, zur Klassifikation des Gegenstandsbereiches dienen und dass diese Klassen nicht zu groß werden können aufgrund der limitierten Gedächtniskapazität der Sprecher. Deshalb vermuteten sie, dass sich die Anzahl der Begriffe einer Ebene proportional ändert zur Anzahl der Begriffe eine Ebene darunter:

$$\begin{aligned} y_{x+1} &\sim (x+1)y_x \\ y_{x+1} &= a(x+1)y_x \end{aligned}$$

Die Auflösung der Differenzengleichung führt schließlich zu

$$y_{x+1} = y_1 x! a^{x-1} \tag{1.1}$$

x	y_x	$\hat{y}_x$
1	1723	1723,00
2	348	292,41
3	108	74,44
4	39	25,27
5	13	10,72
6	3	5,46

Tabelle 1.1.: Verteilung Lexeme auf Begriffshierarchie, empirische und berechnete Werte.

Tabelle 1 zeigt die theoretischen Werte nach dieser Formel für $\hat{a} = 0,084856$.[1] In den folgenden Jahren wurde in weiteren quantitativen Untersuchungen versucht, diese Formel zu optimieren.[2]

Im Verlauf des Studienprojektes wurde jedoch immer deutlicher, dass es einige kritische Punkte gab, denen zu wenig Beachtung geschenkt wurde. Was bedeutet es, dass zwei Wörter oder Begriffe sich auf einer Ebene befinden, insbesondere wenn sie keinerlei gemeinsamen Inhalt teilen? Erfolgt die Bildung der Begriffe tatsächlich von den speziellen zu den allgemeinen Begriffen? Können Wörter eines Lexikons mit Begriffen identifiziert werden? Nicht jeder Begriff ist lexikalisiert. Warum spielen die Nomen im Zusammenhang mit begrifflichen Analysen eine so dominante Rolle? In einer Bedeutungserklärung befinden sich weitere Informationen neben dem Gattungsbegriff. In welcher Relation stehen diese zum durch das Wort repräsentierten Begriff? Wie kann man die Begriffe unabhängig vom sprachlichen Zeichen ermitteln und darstellen? Bevor diese Fragen nicht geklärt sind, ist es schwierig die quantitativen Ergebnisse zu bewerten.

Die Bedeutungserklärung eines Wortes stellt die Verbindung zum Begriff (oder evtl. den Begriffen) her. Sie ist die Brücke zwischen sprachlichem Zeichen und Begriff. Bedeutung und Begriff sind nicht dasselbe. Der Begriff ist ein *Ens Rationis*, ein ‚geistiges' Ding, die Bedeutung dagegen ist ein konkreter Text. Das Lexikon enthält die Vokabeln einer Sprache und für die meisten dieser Vokabeln liegt eine Bedeutungserklärung vor. Jeder Begriff benötigt eine

[1] Dies ist eine verkürzte Darstellung zur Illustration des Gedankens. Bei dieser Verteilung kommt es zu mehrfachen Zählungen gleicher Lexeme auf verschiedenen Ebenen, wenn sie in verschieden langen Definitionsketten vorkommen ([AK83], S. 12).

[2] Vor allem von Hammerl und Sambor ([Ham88], [SH91]). Eine Zusammenfassung der Untersuchungen findet sich auch in [Bag02].

Definition oder, weniger formal, eine Art von Beschreibung. Anhand der textuellen Beschreibung einer Vokabel muss es daher möglich sein, den zu dieser Vokabel gehörigen Begriff und seine Beziehungen zu ermitteln. Ausgehend von den Vokabeln des Lexikons lässt sich also zumindest der Teil der Begriffe bestimmen, die lexikalisiert sind. Es ist davon auszugehen, dass das Inventar des Begriffssystem größer ist als das Inventar des Lexikons.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren zu entwickeln, die Begriffe und ihre Beziehungen anhand der Bedeutungsdefinition zu bestimmen. Dabei sollen auch solche Begriffe bestimmbar sein, die nicht lexikalisiert sind. Es ist zu erwarten, dass die nicht-lexikalisierten Begriffe in den Bedeutungserklärungen zum Teil Verwendung finden. Die so ermittelte Struktur muss formal darstellbar sein, so dass ihr Aufbau und die Begriffsanalyse objektiv überprüfbar sind. Dabei sind Rückgriffe auf vordefinierte, d. h. von außen an das System angelegte, Relationen zu vermeiden – soweit das möglich ist. Ein Teil dieser Arbeit besteht daher auch darin, zu zeigen, wie sich das Begriffssystem durch seine eigene immanente Struktur selbst tragen kann. Erst wenn eine solche Darstellung des Begriffssystems vorliegt, können Begriffs- und Sprachsystem, im Speziellen die Lexik, quantitativ bewertet werden.

Die Einführung beschreibt im Folgenden, was ein Begriff ist, was Intension und Extension sind. Sie gibt einen kurzen Einstieg in den ordnungstheoretischen Aspekt von Begriffsbeziehungen und weist damit über die naive Vorstellung der Begriffshierarchie hinaus. Das ganze Kapitel durchzieht das, was den Begriff im Kern ausmacht: seine Definition.

Das nächste Kapitel ist eine Einführung in die Ordnungstheorie. Die Kenntnis ordnungstheoretischer Grundlagen kann bei Sprachwissenschaftlern und Logikern, die sich sozusagen hauptberuflich mit Bedeutungen auseinandersetzen, nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden. Eine spezielle Art von Ordnungen sind die Verbandsstrukturen. Diese spielen in den formal-logischen Ansätzen, die sich mit Begriffsstrukturen befassen, eine sehr wichtige Rolle. Das ist nicht ganz unproblematisch, wie später gezeigt wird.

Das dritte Kapitel befasst sich endlich mit den verschiedensten Ansätzen über Begriffssysteme. Beginnend mit einer kurzen Zusammenfassung über Definitionstheorie, geht es dann los mit einem von Leibniz stammenden Ansatz, den Kauppi weiterentwickelt hat. Die Formale Begriffsanalyse ist eine spezielle Anwendung der Verbandstheorie auf Begriffe. Sie gehört mittlerweile zum Kanon der Verbandstheorie und wird in vielen Bereichen zur Datenanalyse eingesetzt.[3] Die Neue Logik Freytag-Löringhoffs versteht sich als eine syllogistische Logik.

[3] Davey und Priestley widmen in ihrer Einführung in die Verbandstheorie der Formalen Begriffsanalyse ein eigenes Kapitel ([DP02], S. 65-84).

Sie ist weitab vom Mainstream der modernen mathematischen Logik. Sie besinnt sich zurück auf die Wurzeln der Logik als diese noch eingeteilt wurde in die drei Lehren vom Begriff, vom Urteil und vom Schluss. Der Abschnitt befasst sich hauptsächlich mit der begriffstheoretischen Seite. Besonders interessant sind hier die Ergebnisse über Individualbegriffe. Den Schluss dieses Kapitels bildet die Vorstellung der Description Logic. Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Entwicklung des Semantic Web und in der Theorie der Ontologien im Bereich der Informationstechnologien.[4]

Das vierte Kapitel stellt zwei Semantische Netze vor. Das von Skorochod'ko ist deshalb erwähnenswert, da es nicht nur Bedeutungen inhaltlich, sondern auch quantitativ untersucht. Skorochod'ko stellt dazu Maße auf, mit denen ein lexikalisches Netz charakterisiert werden kann. WordNet ist wohl das bekannteste Semantische Netz, und es gibt mittlerweile sehr viele Folgeprojekte, so dass es eine große Zahl von strukturell ähnlichen Lexika gibt.

Das Kapitel „Bedeutungen und Begriffe" versucht aus den verschiedenen Ansätzen eine Methode zu entwickeln, mit der sich nun Bedeutungen in Begriffe gewissermaßen übersetzen lassen. Dabei kommen verschiedene Darstellungsformate zum Einsatz.

Das letzte Kapitel fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Aufgaben und Anwendungen für Begriffssysteme, die anhand von konkreten Definitionen aufgebaut wurden.

1.1. Begriffe

Unter einem Begriff versteht man vor allem einen Allgemeinbegriff. *Mensch*, *Quadrat*, *Blaues*, *Eckiges* sind Begriffe, die von einer Vielzahl von Dingen ausgesagt werden. In der Logik wird dem Allgemeinbegriff, der auch Prädikat genannt wird, der Eigenname gegenübergestellt. *Berlin*, *Angela Merkel*, *Mosel* sind solche Eigennamen. Auch die Kennzeichnungen, wie *der amtierende Fußballweltmeister* oder *der erste Mensch im Weltall*, werden logisch wie die Eigennamen behandelt, d. h. sie dienen nur dazu etwas zu bezeichnen. Es gibt aber Gründe auch diese beiden als besondere Begriffe, Individualbegriffe, aufzufassen. Das Besondere an ihnen ist, dass sie nur genau einem Individuum zukommen können. Gegenüber dem Eigennamen hat der Individualbegriff den Vorteil, dass er einen Inhalt hat, die unterschiedliche Individuen bzw. Dinge

[4] In der Philosophie ist die Ontologie die Lehre vom Sein und Wesen der Dinge. In den Informationstechnologien hat dieser Begriff die Bedeutung von Wissensrepräsentation einer Domäne. Nach Gruber ist eine Ontologie hier eine „explicit specification of a conceptualization" (zitiert nach [SS09], S. 6).

miteinander teilen, und nicht nur ein Zeichen, ein Etikett für etwas ist.[5] Eine dritte Art von Begriff ist der Relationsbegriff, kurz die Relation. Ein Begriff wie *Mensch* hat ein Argument, kommt daher in jeder konkreten Anwendung einem Individuum zu. So wie man sagt, Sokrates ist ein Mensch. Die Relation dagegen kommt gleichzeitig mehreren Individuen zu. Der Begriff *Liegt-zwischen* kommt z. B. den drei Individuen Konz, Saarburg und Trier zu: Konz liegt zwischen Saarburg und Trier. Um die Strukturen dieser drei Arten von Begriffen wird es im Folgenden gehen.

Bei dieser Auffassung von Begriff ist es notwendig eine weitere Unterscheidung einzuführen, die es so in der Prädikatenlogik nicht gibt. Unter einem *eigentlichen Begriff* wird ein Begriff verstanden, der einem Individuum zukommen kann, so wie man sagt, dies sei ein Haus, ein Baum oder dergleichen. Dagegen soll ein *uneigentlicher Begriff* ein Begriff sein, bei dem das grundsätzlich nicht möglich ist. Typische Beispiele für letzteren sind das *runde Quadrat*, die *lebende Leiche* oder das *hölzerne Eisen*. Es gibt keinen Gegenstand, den man korrekterweise als „rundes Quadrat“ oder „hölzernes Eisen“ bezeichnen könnte. Diese Begriffe werden auch als widersprüchlich bezeichnet. Ihnen zur Seite gestellt werden muss auch der inhaltsleere Begriff. Denn durch den leeren Begriff wird über einen Gegenstand *nichts* ausgesagt. Aber er kommt jedem Gegenstand zu, darin unterscheidet er sich von den Widersprüchen. Während also der Widerspruch nichts über einen Gegenstand aussagt, weil er keinem zukommen kann, sagt der leere Begriff nichts über einen Gegenstand aus, weil er inhaltsleer ist. Der leere Begriff ist also zumindest ein Grenzfall.[6]

Aufgrund der Unterscheidung von eigentlichen und uneigentlichen Begriffen ist es notwendig zwischen zwei verschiedenen Begriffsstrukturen zu unterscheiden, nämlich einem System, dass keine Widersprüche zulässt, und einem, dass mit Widersprüchen operieren kann. Das soll nicht heißen, dass ein widersprüchliches formales System zulässig ist, es heißt nur, dass als widersprüchlich gekennzeichnete Begriffe zulässig sind. In dieser Arbeit spielen die uneigentlichen Begriffe keine Rolle; es soll aber nicht unerwähnt bleiben, dass es möglich ist, widersprüchliche Begriffsmodelle zu entwickeln und auch formal zu behandeln. Bei der Entwicklung neuer Begriffe ist von vornherein nicht klar, ob diese widersprüchlich sind oder nicht. Um herauszufinden, dass es keine größte natürliche Zahl geben kann, muss man erst den Begriff dazu gebildet haben. Uneigentliche Begriffe sind also eine Voraussetzung für Erkenntnisfortschritt.

[5] Zum kategorialen Unterschied zwischen Subjekt- und Prädikattermini s. [Wes98], S. 311.
[6] [Kau67], S. 12.

1.2. Intension und Extension

Begriffe oder Prädikate werden von Gegenständen oder Individuen ausgesagt. Es liegt daher nahe, sie mit Hilfe dieser Beziehung zu bestimmen. Der Begriff *Mensch* kommt eben allen Menschen zu, die gelebt haben, die jetzt leben und die leben werden. Die Relation *Liegt-Zwischen* kommt allen Orten zu, die in der besagten Relation zueinander stehen. Diese Art der Begriffsbestimmung ist extensional. Meistens bedient man sich ihrer unter Zuhilfenahme der Mengentheorie. Das setzt aber voraus, dass die Mengen und ihre Elemente exakt angegeben werden können und unveränderlich sind. Die Angabe aller Individuen eines Begriffes ist meistens praktisch unmöglich, und die Zuordnung ist oft dynamisch wie die Beispiele *Mensch* und *Liegt-Zwischen* zeigen. In der Mathematik hat sich die Mengenlehre deshalb bewährt, weil die Mengen, der Zahlen z. B., genau diese Bedingungen erfüllen. Unter der Extension, oder dem Begriffsumfang, versteht man also alle die Individuen, denen der Begriff zukommt. Im Folgenden wird von der Mengentheorie Gebrauch gemacht, wenn die extensionale Seite der Begriffe untersucht wird.

Im Gegensatz dazu richtet sich die Intension eines Begriffes auf seinen Inhalt. Der Begriffsinhalt ist durch seine Definition bestimmt. Hier ein Beispiel einer ganz einfachen Definition:

Blech – dünn ausgewalztes Metall. ([Kla])

Die Merkmale des Begriffes *Blech* sind danach *Dünn*, *Ausgewalzt* und *Metall*. Auch die Intension setzt voraus, dass der Inhalt bestimmt ist. Da der Inhalt wiederum aus Begriffen besteht, ist die Existenz eines Systems von Begriffen eine weitere Voraussetzung. Im Beispiel hat man durch die Definition schon drei weitere Begriffe, die ihrerseits Definitionen mit Begriffen haben. Im Folgenden wird zur Bestimmung der Intension von Begriffen meist von einer Bedeutungsdefinition ausgegangen, wie man sie in Bedeutungswörterbüchern findet.

1.3. Die Beziehungen Art-Gattung-Differenz

Die bekannteste Beziehung zwischen Begriffen ist das Verhältnis von Art und Gattung oder von Unter- zu Oberbegriff, wie es auch genannt wird: Blech (Art, Unterbegriff) ist ein *Metall* (Gattung, Oberbegriff). Die zusätzlichen Komponenten der Definition sind die so genannten artbildenden Unterschiede, die spezifischen Differenzen. In der eben angegebenen Definition sind das die Begriffe *Dünn* und *Ausgewalzt*. Ist eine Bedeutung gemäß des Schemas Art, Gattung und spezifische Differenz formuliert, ist der zu definierende Begriff, das Definiendum, die Art. Gattungs- und Differenzbegriffe müssen dann ermittelt werden.

Das lässt sich zwar oft an der sprachlichen Form festmachen (Subjekt = Art, Prädikat = Gattung, Ergänzungen = Differenzen), das Grundmotiv ist jedoch oft ontologischer oder systematischer Natur, so dass eine Orientierung an der sprachlichen Struktur nur eine Heuristik sein kann.

Vor allem extensionale Ansätze unterscheiden oft nicht mehr zwischen Gattungs- und Differenzbegriffen. Die definierenden Begriffe werden in gewisser Weise gleich behandelt.[7] Mengentheoretisch ist die Extension der Art eine Teilmenge der Extension der Gattung. Auf die ganze Definition bezogen ist die Art die Schnittmenge der Extensionen von Gattung und Differenzen.

$$A \subseteq G \qquad A = \text{Art},\ G = \text{Gattung} \tag{1.2}$$

$$A \subseteq D_i \qquad D_i = \text{beliebiger Differenzbegriff} \tag{1.3}$$

$$A = (G \cap D_1 \cap \ldots \cap D_n) \qquad \ldots D_1, D_n = \text{Differenzbegriffe} \tag{1.4}$$

Untersuchungen über diese Relation beschränken sich häufig auf einstellige Allgemeinbegriffe. Die Individualbegriffe werden oft explizit ausgenommen, da sie, wie es oft heißt, nicht als logisches Prädikat verwendet werden können. Anders formuliert: ein Individualbegriff kann nie Gattungsbegriff sein. Mengentheoretisch sind sie die Elemente der Mengen, und damit, analog zur Unterscheidung in der Prädikatenlogik, eine eigene Kategorie (ein Element kann nie Menge sein, eine Menge aber Element einer anderen Menge). Die Relation, bzw. die Stelligkeit der Begriffe, wird innerhalb dieser Relation so gut wie nie in Betracht gezogen. So werden Eigenschaftsbegriffe wie *Grün*, *Flach*, *Blond* u. ä. in der Prädikatenlogik wie auch der Mengentheorie gleich behandelt. So lässt sich leicht aus der Menge der blonden Dinge und der Menge der Menschen, die Menge der blonden Menschen bilden. Es ist allerdings fraglich, ob das berechtigt ist.[8] Die Begriffe *Dünn* und *Ausgewalzt* stehen in einer anderen Relation zu *Blech* als *Metall*. Aristoteles charakterisiert den Unterschied, dass Eigenschaften (Akzidenzen) wie Dünn an einem Ding (Substanz) vorkommen, während Begriffe wie *Blech* und *Metall*[9] hier die Dinge kennzeichnen, die für sich selbst existieren können.[10] Keine Frage, diese Antwort ist ontologisch begründet. Eine rein sprachliche Unterscheidung muss mindestens auf die Bedeutung zurückgreifen, wodurch schließlich ein ontologischer Aspekt unweigerlich ins Spiel kommt. Man kann allerdings nach der Unterscheidung rein semantisch fortfahren.

[7] In der aristotelischen Tradition besteht zwischen dem Gattungsbegriff und den Differenzbegriffen ein kategorialer Unterschied: Ersterer kennzeichnet die Substanz, letztere die Akzidenzen ([Ari98], Kategorien, 2a 11.). S. a. weiter unten.

[8] S. Kap. 1.5.

[9] *Metall* ist hier in der Bedeutung Gegenstand zu verstehen, nicht als Stoff aus dem ein Gegenstand ist.

[10] [Ari98], Kategorien, 1a 20 - 1b 10.

Sicherlich ist das Art-Gattungsverhältnis die wichtigste Relation zwischen Begriffen. Aber sie reicht ebenso sicher nicht aus, um Begriffe adäquat definieren zu können. Oft werden Begriffe vor allem in Relation zu anderen Begriffen gestellt, zu denen sie nicht in diesem Verhältnis bestehen. Hier Definitionen von *Blatt* aus einem allgemeinen Bedeutungswörterbuch und aus einem Fachbuch zur Pflanzenbestimmung.

Blatt – an einem Stiel wachsender, flächiger meist grüner Teil einer Pflanze. ([Dud])

Blätter – sind in der Regel grüne, flächig entwickelte Organe, die im Dienste der organischen Stoffversorgung der Pflanze stehen. ([SF96], S. 9)

Die Definition des Duden verwendet zur Definition nicht die Art-Gattungsbeziehung, sondern wählt eine andere Relation, die Teil-Ganzes-Relation, zur Erläuterung des Begriffes. Das Fachbuch dagegen bleibt im Paradigma der traditionellen Definitionstheorie. Für Nicht-Botaniker wird die Duden-Definition vollkommen ausreichend sein. Ein anderes Beispiel soll zeigen, dass Gattung und Differenzen oft nur eine untergeordnete Rolle in der Definition spielen. Auch hier fördern andere Relationen wichtigere Informationen zu Tage.

Papier – aus Fasern vorwiegend pflanzlicher Herkunft, auch von Stoffresten, Lumpen durch ein best. Verfahren hergestelltes *dünnes, flächiges Material*, das zum Beschreiben, Bedrucken und Verpacken dient. ([Kla])

Art-Gattung-Differenz Beziehungen sind hervorgehoben dargestellt. Viel informativer sind die Erwähnungen des Herstellungsverfahrens und vor allem des Zwecks: Papier benutzt man zum Schreiben, Bedrucken und Verpacken. Dass es ein dünnes, flächiges Material ist, sagt einem dagegen recht wenig.

1.4. Ordnungsstruktur

Um die Begriffsbeziehungen allgemeiner betrachten zu können und um eine gewisse Distanz zu den gängigen Termini Technici zu erhalten, wird eine neutralere Terminologie eingeführt. Wenn zwei Begriffe in der Art-Gattungsbeziehung zu einander stehen, dann sagt man, dass der Artbegriff den Gattungsbegriff *enthält*. Die Motivierung für diesen Ausdruck gründet sich auf diese logische Beziehung. Wenn man von einem Gegenstand den Artbegriff aussagt, so folgt aus dem Artbegriff, dass auch der Gattungsbegriff von diesem Gegenstand ausgesagt wird. Wenn etwas ein Mensch ist, dann muss es auch zwangsläufig ein Lebewesen sein, weil der Begriff *Mensch* den Begriff *Lebewesen* enthält. „Enthält“ ist hier als eine spezielle logische Relation zu verstehen. Davon strikt zu

unterscheiden ist der Ausdruck, dass ein Begriff einen anderen in seiner Definition *enthält*. Wenn ein Begriff in der Definition eines anderen enthalten ist, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass der definierte Begriff den in seiner Definition vorkommenden Begriff enthält. In der Definition von Papier kommt der Begriff *Herstellungsverfahren* vor, jedoch enthält der Begriff *Papier* nicht den Begriff *Herstellungsverfahren*. Es ist also besser bei konkreten Bedeutungsdefinitionen von einem Vorkommen als von einem Enthalten zu sprechen.

Anhand von Bedeutungsdefinitionen lassen sich die Elemente der Enthält-Relation eines Begriffes leicht ermitteln. Gegeben seien folgende einfache Definitionen:

Mensch – vernunftbegabter Zweibeiner.

Zweibeiner – aufrecht gehendes Lebewesen.

Lebewesen – (undefiniert).

Dann enthält der Begriff *Mensch* den Begriff *Zweibeiner*; und dieser den Begriff *Lebewesen*. Der Begriff *Mensch* enthält aber auch den Begriff *Lebewesen*. Würden *Zweibeiner* oder *Lebewesen* ihrerseits weitere Begriffe enthalten, so wären sie wegen der Transitivität der Enthält-Relation auch im Begriff *Mensch* enthalten. Ausgeschlossen oder falsch wäre es, enthielte z. B. *Lebewesen* wiederum den Begriff *Mensch*. Es gibt also keine Zirkel.

Allgemein formuliert: Man nimmt den Gattungsbegriff a_2 der Definition eines Begriffes a_1 und ermittelt zu diesem wiederum in dessen Definition den Gattungsbegriff a_3 und so fort. Auf diese Weise erhält man eine geordnete Folge von Begriffen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, deren erster Begriff der Ausgangsbegriff a_1 ist. Da die Enthält-Relation transitiv ist und nicht-zirkulär, kann man mit Bezug auf die Anzahl der in einem Begriff enthaltenen Begriffe sagen, dass ein Begriff a_i der Folge größer ist im Vergleich zu den Begriffen, die er enthält. Es gilt also: $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n$, und allgemein $a_i > a_j$ für alle $i > j$. Die Enthält-Relation begründet daher, gegeben durch die Bedeutungsdefinitionen, eine Ordnungsstruktur im System der Begriffe. Wie diese im Detail aussieht, zeigt Kapitel 3.

1.5. Stelligkeit von Begriffen

Diese Ordnung allein reicht aber noch nicht aus, die intensionalen Relationen zu erfassen. Im Beispiel auf Seite 12 wird das Definiendum, Papier, als aus *Fasern hergestelltes dünnes, flächiges Material* beschrieben. Der Gattungsbegriff ist *Material*, *Dünn* und *Ausgewalzt* sind die Differenzbegriffe. Wieso müssen

die Differenzbegriffe logisch anders behandelt werden als der Gattungsbegriff? Mengentheoretisch werden sie ja gleich behandelt. *Dünn* ist eine Eigenschaft. Eine Eigenschaft ist eine zweistellige Relation mit einem Argument für das, dem eine Eigenschaft zukommt, und als weiterem Argument einem Wert, der über diese Relation mit dem ersten Argument verknüpft ist: ein Blatt Papier hat eine bestimmte Dicke, und Dünn ist ein Wert von anderen möglichen Werten wie Dick, Hauchdünn usw. Diese Analyse beruft sich dabei nicht auf eine ontologische Kategorie wie der Substanz oder der Qualität. Die logische Motivation lässt sich wie folgt rechtfertigen, es handelt sich um eine sehr wichtige Unterscheidung mit der einige folgenschwere Fehler vermieden werden können, zu denen man durch die natürliche Sprache, vor allem durch die Kopula Sein, leicht verleitet wird. Dazu eine vereinfachte Definition von Blatt:

Blatt – grünes, flächiges Organ zur organischen Stoffversorgung der Pflanze.

Der Begriff *Blatt* enthält den Begriff *Organ*. Aber enthält er auch den Begriff *Grün*?

(1) Das Blatt ist ein Organ.

(2) Das Blatt ist grün.

Syntaktisch fast identisch, jedoch begrifflich sehr unterschiedlich. Der zweite Satz umformuliert macht das deutlich

(3) Das Blatt hat die Farbe grün.

...und *Farbe* ist eine Eigenschaft. Diese ist ein zweistelliger Begriff. Beachtet man das nicht, ergeben sich sehr unsinnige Konsequenzen: Das Blatt ist grün, Grün ist eine Farbe, also ist ein Blatt eine Farbe. Es ist also sehr wichtig bei der Ordnungsstruktur nur solche Begriffe in Betracht zu ziehen, die von gleicher Stelligkeit sind.

Ganz deutlich ist die Eingliederung des einstelligen Begriffes *Papier* in einen höherstelligen Begriff bei der Angabe des Herstellungsverfahrens. Es handelt sich hierbei weder um die Art-Gattungsbeziehung, noch um die Differenzbegriffsbeziehung zwischen den beiden Begriffen. Der Begriff *Verfahren* hat, zumindest nach der oben angegebenen Definition, zwei Argumente: das Ausgangs- und das Endmaterial. Des weiteren wird noch die Herkunft des Ausgangsmaterials genannt, so dass die Definition in etwa wie folgt logisch formalisiert werden

kann:

$$V(F,P) \wedge (H(F,Pf) \vee H(F,S) \vee H(F,L))$$
$$V = \text{Verfahren},\ H = \text{Herkunft},\ F = \text{Fasern},\ P = \text{Papier},$$
$$S = \text{Stoffrest},\ L = \text{Lumpen},\ Pf = \text{Pflanze}$$

Wobei die Argumente nicht wie in der Prädikatenlogik erster Stufe Individuenvariablen oder -konstanten sind, sondern Begriffe. Der Begriff *Papier* wird innerhalb einer höherstelligen Relation in Bezug zu anderen Begriffen gebracht (mit Hilfe seines Gattungsbegriffes *Material*, was hier zu vernachlässigen ist). Dieses ist eine weitere intensionale Beziehung mit der Begriffe verschiedener Stelligkeit zueinander in Relation treten können.

Im Gegensatz zur Enthält-Relation wird diese als Relationslogik oder R-Logische Relation bezeichnet. In der Enthält-Relation können nur Begriffe gleicher Stelligkeit stehen. Es gibt somit verschiedene intensionale Systeme der Stelligkeit 1 bis n. Vermittels der R-Logik werden diese Systeme miteinander gekoppelt, so dass die höherstelligen Systeme letztlich immer in Verbindung zu den einstelligen stehen.[11]

1.6. Andere Beziehungen

In Bedeutungsdefinitionen treten neben der Art-Gattungsbeziehung häufig andere stereotype Relationen auf. Eine wichtige allgemeine Relation ist die Teil-Ganzes Relation, wie sie auch in der Definition von *Blatt* aus dem Duden vorkam. Weitere, ebenfalls allgemeine Relationen, geben Lage, Ort und Zeit an, über die Begriffe in Beziehung gesetzt werden. Auch die angesprochene zweistellige Relation *Eigenschaft* ist eine weitere dieser besonderen Relationen. Sie alle sind ontologische Relationen. Bei der intensionalen Betrachtung gehen diese Begriffe nur im Rahmen ihres Vorkommens im Begriffssystem mit in die Untersuchung ein. Es ist jedoch oft der Fall, dass sie selbst nicht definiert werden und vor allem deshalb einen besonderen Status – nämlich den, undefiniert zu sein – einnehmen. In den logischen Beziehungen zwischen Begriffen spielt es keine Rolle, dass z. B. eine Eigenschaft nur eine Qualität ist, die an einer Substanz vorkommt, und nicht für sich existieren kann. Hier ist nur wichtig, dass zwei einstellige Begriffe die beiden Stellen eines zweistelligen Begriffes bestimmen.

Die Bedeutungen dieser Begriffe sind so fundamental, dass ihre Kenntnis bei Wörterbuchbenutzern einfach vorausgesetzt wird. Die Ontologie übernimmt die Aufgabe, die formalen Eigenschaften dieser Relationen zu bestimmen. Für die

[11] Vgl. [Kau67] S. 32.

Teil-Ganzes-Relation, die in der Mereologie ein eigenes Fachgebiet bildet, gibt es dazu eine Vielfalt von Systemen, ebenso für die Relationen von Ort, Lage und Zeit, die in der Topologie behandelt werden.

1.7. Zusammenfassung

Die Theorie der Begriffe wird vor allem in der Prädikatenlogik behandelt. Dort redet man von Prädikaten an Stelle von Begriffen. Die Allgemeinbegriffe sind die prototypischen Prädikate. Davon unterschieden werden die Eigennamen. Diesen wurden hier die Individualbegriffe gegenübergestellt, die in der Prädikatenlogik so nicht vorkommen. Auch widersprüchliche Begriffe werden in der traditionellen Logik nicht behandelt. Es macht aber durchaus Sinn auch diese in einer Begriffstheorie zu integrieren, weil sie eine wichtige Stufe auf dem Weg zu neuer Erkenntnis bilden. Die Prädikatenlogik basiert vor allem auf einer extensionalen Interpretation der Begriffe bzw. der Prädikate. Im Unterschied dazu bezieht sich die intensionale Interpretation der Begriffe auf die Inhalte eines Begriffes. Diese werden üblicherweise in Form einer Definition gegeben. Die Definition folgt dabei einem logischen Schema, das den zu definierenden Begriff in Relation zu seinem unmittelbaren Oberbegriff setzt und die Unterschiede zu anderen (Art-) Begriffen mit dem gleichen Oberbegriff spezifiziert. Durch die Ober-Unterbegriffsbeziehung ergibt sich eine Ordnungsstruktur. Dieser Punkt ist so wichtig, dass im nächsten Kapitel die Grundlagen der Ordnungstheorie dargelegt werden mit besonderer Berücksichtigung dieser Relation. Begriffe besitzen wie in der Prädikatenlogik die Prädikate eine Stelligkeit. In der Praxis wird diesem Umstand in der Regel wenig Beachtung geschenkt. Es wurde gezeigt, dass eine ungenaue oder laxe Analyse der Stelligkeit zu echten logischen Fehlern führen kann. Die Stelligkeit eines Begriffes zu ermitteln ist außerdem keine triviale Angelegenheit und bedarf einiger Übung, wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen wird.

2. Ordnungstheoretische Grundlagen

Diese kurze Einführung basiert im Wesentlichen auf [Ern82], [DP02] und [Her67]. Im Folgenden werden die allgemein üblichen Symbole und Operatoren aus der Mengenlehre und die aussagenlogischen ein- und zweistelligen Operatoren verwendet.

Lateinische Großbuchstaben bezeichnen, wenn nichts anderes angegeben ist, Mengen von Begriffen. Die Operatoren Vereinigung, $\cup$, Schnitt, $\cap$, Differenz, $A \setminus B$ und Komplement, $-A$, werden wie üblich verwendet; ebenso die Beziehungsoperatoren Teilmenge, $\subseteq$, Obermenge, $\supseteq$ bzw. echte Teilmenge, $\subset$, und echte Obermenge, $\supset$. $\emptyset$ und $\{\}$ bezeichnen die Leere Menge.

Die Wahrheitswerteverteilungsfunktionen der Negation, $\neg$, Konjunktion, $\wedge$, Adjunktion (oder), $\vee$, Implikation, $\rightarrow$, und die Äquivalenz, $\leftrightarrow$ sind:

A	$\neg$
w	f
f	w

A	B	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Prädikatenlogische Ausdrücke beziehen sich auf Elemente von Mengen, die entweder explizit angegeben oder durch den Kontext implizit bekannt sind. In diesem Kapitel sind die Elemente in der Regel Begriffe. Die Prädikate sind dann Aussagen über Begriffe. Eine Aussage mit einem Existenzquantor, $\exists$, ist genau dann wahr, wenn es mindestens ein Element gibt, auf das die Aussage zutrifft. Eine Aussage mit einem Allquantor, $\forall$, ist genau dann wahr, wenn die Aussage auf alle Elemente der Menge zutrifft.

2.1. Grundlegende Beziehungen

Die Ordnung der Begriffe gründet allein auf der Beziehung, dass ein Begriff andere in seinem Inhalt enthält. Der Artbegriff enthält seinen Gattungsbegriff, und evtl. andere (Differenz-)Begriffe. Diese Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Damit handelt es sich bei Begriffssystemen um Ordnungen, auch Halbordnungen genannt. Diese sind so definiert:

Definition 1. Eine beliebige Menge M mit einer Relation $\geq$ ist eine *Ordnung*, symbolisch $\mathbb{O}(M)$, wenn für jedes Element der Menge gilt:

Reflexivität	$a \geq a$	(2.1)
Transitivität	$a \geq b \wedge b \geq c \rightarrow a \geq c$	(2.2)
Antisymmetrie	$a \geq b \wedge b \geq a \rightarrow a = b$	(2.3)

Hier und im Folgenden, wenn nichts anderes vereinbart ist, bezeichnen Variablen und Konstanten immer Begriffe. Gelesen wird die Relation $a \geq b$ als „der Begriff a enthält den Begriff b“, „der Begriff a beinhaltet den Begriff b“, „der Begriff a hat das Merkmal b“ oder auch einfach „a ist größer als oder gleich b“. Die inverse Relation wird so definiert

$$a \leq b =_{\text{def}} b \geq a \tag{2.4}$$

und wird gelesen als „a ist in b enthalten“ oder einfach als „a ist kleiner als oder gleich b“. „Echtes Enthält“ bzw. „Größer-als“ und „echtes Enthalten“ bzw. „Kleiner-als“, sind bekanntermaßen

$$a > b =_{\text{def}} a \geq b \wedge a \neq b \tag{2.5}$$

$$a < b =_{\text{def}} a \leq b \wedge a \neq b \tag{2.6}$$

Man sieht leicht ein, dass für die inverse Relation die gleichen Gesetze gelten, und formuliert dies im Dualitätsprinzip für Halbordnungen.

Theorem 1 (Dualitätsprinzip)**.** Aus jedem Theorem über Halbordnungen enthält man ein dazu duales Theorem, indem man simultan jedes Symbol $\geq$ durch $\leq$ und jedes Symbol $\leq$ durch $\geq$ ersetzt.

Beweis. Folgt direkt aus Definition (2.4). □

2.2. Diagramme

Eine Halbordnung lässt sich bei einer nicht zu großen Anzahl an Elementen sehr gut als Diagramm darstellen. Solch ein Diagramm heißt nach seinem Erfinder Helmut Hasse, Hasse-Diagramm. Ein Hasse-Diagramm besteht aus einem Graph mit folgenden Eigenschaften. Jedem Element der Halbordnung entspricht ein Knoten des Graphen. Größere Elemente liegen oberhalb kleinerer. Zwei Knoten k_1 und k_2 des Graphen werden mit einer Kante verbunden, wenn für ihre Elemente $a = k_1$ und $b = k_2$ gilt:

$$a > b \wedge \neg \exists x (a \geq x \wedge x \geq b) \tag{2.7}$$

Das wird in einer eigenen Relation formuliert, die Nachbarrelation heißt.

$$a \succ b =_{\text{def}} a > b \wedge \neg \exists x (a > x \wedge x > b) \tag{2.8}$$

$$a \prec b =_{\text{def}} a < b \wedge \neg \exists x (a < x \wedge x < b) \tag{2.9}$$

Dabei heißt a in $a \succ b$ *oberer Nachbar* von b und b *unterer Nachbar* von a.

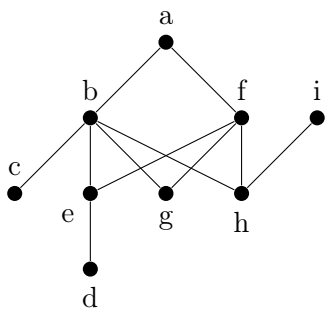


Abbildung 2.1.: Hasse-Diagramm.

Die Abbildung 2.1 zeigt so ein Diagramm. Hier enthält z. B. a alle anderen Elemente außer i, seine unteren Nachbarn sind b und f, obere Nachbarn hat a keine, b dagegen hat nur a als oberen Nachbarn und c, e, g und h als untere.

Ein Element ist maximal, wenn es in keinem anderen Element enthalten ist. In der Abbildung sind a und i maximal. Dual dazu ist ein Element minimal, wenn es kein Element gibt, dass kleiner als dieses ist. In der Abbildung trifft das auf die Elemente c, d, g und h zu. Ein Element ist das größte Element, wenn es größer als alle ist. Dual dazu wird das kleinste Element definiert. Im Diagramm gibt es kein größtes und kein kleinstes Element. Wenn man i entfernt, dann ist a das größte Element. Größtes und kleinstes Element sind, wenn sie existieren, eindeutig. Sie werden meist mit 1 und 0 bezeichnet, bei Ordnungen oft auch mit $\top$ und $\bot$. Die oberen Nachbarn des kleinsten Elementes werden *Atome* genannt und die unteren Nachbarn des größten Elementes heißen *Ko-* oder *Anti-Atome*. Diese spielen vor allem bei Verbänden eine Rolle. In diesem Diagramm gibt es weder Atome noch Ko-Atome, da diese Halbordnung weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt.

In Kapitel 1.5 wurde herausgestellt, dass Begriffssysteme sich formal durch die Stellenzahl ihrer Begriffe unterscheiden.[1] Die Ordnungsbeziehung gilt zwi-

[1] In der Logik entsprechen die mehrstelligen Prädikate den mehrstelligen Begriffen in dieser Arbeit.

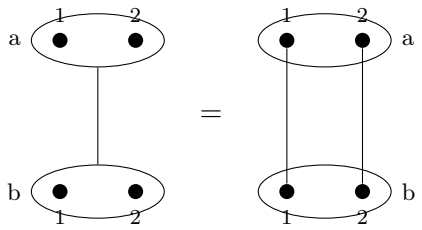


Abbildung 2.2.: Mehrstellige Begriffsbeziehung.

schen Begriffen gleicher Stellenzahl und das Hasse-Diagramm kann ohne weiteres benutzt werden, um die Beziehung zwischen einheitlich zwei- und mehrstelligen Begriffen darzustellen. Bei einer Vermischung von Begriffen verschiedener Stellenzahl ist eine Erweiterung nötig.[2] Ein mehrstelliger Begriff ist dann eine Ellipse in deren Fläche einfache Knoten für die einzelnen Stellen eingezeichnet sind. Sind die Knoten nicht durch Indizes gekennzeichnet, dann gilt, dass der in einer Ellipse am weitesten links stehende Knoten der ersten Stelle der Relation entspricht, der rechts davon stehende der zweiten Stelle usw. Es ist auch möglich, dass die Ellipse eines höherstelligen Begriffes einen anderen mehrstelligen Begriff umfasst.[3] Für die höherstellige Relation gilt die Zählung wie beschrieben. Innerhalb des umfassten niederstelligen Begriffes fängt die Zählung wieder bei eins an (s. Abb. 2.3 Relationen l und k). In Bezug auf einfache Knoten entspricht die Darstellung exakt dem Hasse-Diagramm. Kanten zwischen Ellipsen bedeuten das Gleiche wie bei den Knoten und stellen die Nachbarschaftsrelation dar. Eine Kante zwischen zwei Ellipsen ist nur bei gleicher Stellenzahl erlaubt, und ist äquivalent zu Kanten von den Knoten der einzelnen Stellen (s. Abb. 2.2).

Kanten von Knoten dürfen Ellipsengrenzen kreuzen. Abbildung 2.3 zeigt ein Beispiel für Ordnungsbeziehungen zwischen verschiedenstelligen Begriffen. l_1, g, f, j_1, j_2, a, b inklusive der Knoten ohne Kanten wie c_1, c_2, k_1 und k_2, also alle Knoten ohne die Ellipsen und deren Kanten, stellen ein gewöhnliches Hasse-Diagramm dar. Die zweistellige Relation j ist oberer Nachbar vom ebenfalls zweistelligen Begriff c. j ist unterer Nachbar von k. k wiederum ist Teil der dreistelligen Relation l, wobei $k_1 = l_2$ und $k_2 = l_3$. Die erste Stelle von l, l_1, ist oberer Nachbar von g.

[2] Vgl. [Bag05]
[3] Das ist dann eine Unterrelation. Näheres dazu weiter unten in Kapitel 3.2.4.

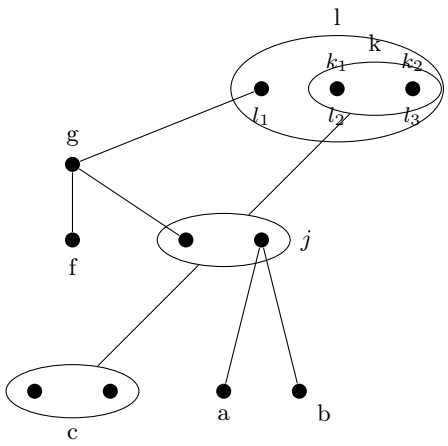


Abbildung 2.3.: Beispiel: Erweitertes Hasse-Diagramm.

2.3. Verbände

Die Verbände sind Ordnungen mit speziellen Eigenschaften. Ausgehend von den Ordnungen werden diese Eigenschaften nun herausgearbeitet. Der erste Schritt dazu geht über die Einführung von Schranken in einer halbgeordneten Menge. Schranken begrenzen eine Teilmenge einer Ordnung nach oben oder unten. Hierbei ist „oben“ zu verstehen als „ist enthalten“ und „unten“ als „enthält“. Die Menge der unteren Schranken einer Teilmenge der Ordnung besteht aus denjenigen Elementen, die kleiner sind als alle Elemente dieser Teilmenge; dual dazu besteht die Menge der oberen Schranken aus denjenigen Elementen, die größer sind als alle Elemente der Teilmenge.[4] Formal lautet die Definition:

Definition 2. Sei H eine geordnete Menge und $G \subseteq H$. Ein Element $x \in H$ ist eine *obere Schranke* von G, wenn für alle $y \in G$ gilt, $x \geq y$. Dual dazu gilt für die *unteren Schranken* von G, $y \geq x$ bzw. $x \leq y$. Die Menge aller oberen Schranken von G wird mit $G\uparrow$ und die der unteren Schranken mit $G\downarrow$ bezeichnet.

$$G\uparrow = S =_{\text{def}} x \in S \leftrightarrow x \in H \wedge (y \in G \rightarrow x \geq y) \tag{2.10}$$

$$G\downarrow = S =_{\text{def}} x \in S \leftrightarrow x \in H \wedge (y \in G \rightarrow x \leq y) \tag{2.11}$$

Wenn es in der Menge der oberen Schranken ein kleinstes Element gibt, dann wird dieses das *Supremum* genannt. Dual dazu wird das größte Element der

[4] Für untere und obere Schranke findet man in der Literatur auch die Ausdrücke Minorante und Majorante.

unteren Schranken *Infimum* genannt. Supremum und Infimum müssen nicht existieren, wenn sie existieren, dann sind sie eindeutig. Hier die Definition:

Definition 3. Es sei H eine Ordnung, $G \subseteq H$ und $G\uparrow$ die Menge der oberen Schranken von G und $G\downarrow$ die Menge der unteren Schranken, dann gelten für das Supremum, sup, und das Infimum, inf, wenn sie existieren:

$$\sup G\uparrow = o =_{\text{def}} \exists x \forall y (x, y \in G\uparrow \wedge x \leq y \wedge x = o) \tag{2.12}$$

$$\inf G\downarrow = u =_{\text{def}} \exists x \forall y (x, y \in G\downarrow \wedge x \geq y \wedge x = u) \tag{2.13}$$

Daraus ergeben sich leicht die folgenden Theoreme für die Extremfälle von leerer und identischer Teilmenge einer geordneten Menge H (wobei ein „–“ bedeutet, dass dieser Fall undefiniert ist):

$$\emptyset\uparrow = \emptyset\downarrow = H \tag{2.14}$$

$$H\uparrow = \begin{cases} \{1\} & : \ \exists x \forall y (x \geq y) \\ \emptyset & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$H\downarrow = \begin{cases} \{0\} & : \ \exists x \forall y (x \leq y) \\ \emptyset & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\sup H = \begin{cases} 1 & : \ \exists x \forall y (x \geq y) \\ - & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\inf H = \begin{cases} 0 & : \ \exists x \forall y (x \leq y) \\ - & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\sup \emptyset = \begin{cases} 0 & : \ \exists x \forall y (x \leq y) \\ - & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\inf \emptyset = \begin{cases} 1 & : \ \exists x \forall y (x \geq y) \\ - & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2.20}$$

Beweis. Die Identitäten von (2.14) folgen aus der Definition (2). Da das Antezedent der Subjunktion, $y \in G \rightarrow x \geq y$, für jedes Element wegen $G = \emptyset$ falsch ist, ist die ganze Subjunktion wahr, und damit jedes Element der Menge eine Schranke der leeren Menge. Bei (2.15) und (2.16) muss unterschieden werden, ob ein größtes (kleinstes) Element existiert. Wenn ja, dann ist dieses obere (untere) Schranke, ansonsten ist die Schrankenmenge leer. Dass dies nur für das 1-Element (0-Element) zutrifft, folgt ebenfalls aus Definition (2):
Nimmt man an, die obere Schrankenmenge hätte zwei Elemente, dann müssten beide Elemente größer oder gleich dem jeweils anderen sein, da beide Elemente der Schrankenmenge auch Elemente von H selbst sind. Also sind sie entweder identisch, oder aber sie wären beide keine Schrankenelemente. Aus diesen Überlegungen folgen dann auch (2.17) und (2.18).

Aus (2.14) folgt, dass die oberen (unteren) Schranken der leeren Menge gleich H sind. Das kleinste (größte) Element dieser Menge ist das kleinste (größte) Element der Menge H, also 0 (1), wenn es existiert. Damit sind (2.19) und (2.20) bewiesen. □

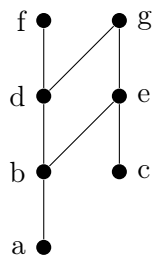


Abbildung 2.4.: Beispiel Schrankenmengen (s. Text).

In der Ordnung in Abbildung 2.4 ist die Menge $\{b, d\}$ nach oben durch $\{d, f, g\}$ beschränkt, d ist gleichzeitig das Supremum dieser Menge. Nach unten ist die Menge durch $\{a, b\}$ beschränkt, b ist das größte Element dieser Menge und daher sein Infimum. Die Menge $\{d, e\}$ ist nach oben durch $\{g\}$ beschränkt; g ist auch das Supremum dieser Menge. Nach unten ist die Menge durch $\{a, b\}$ beschränkt; b ist das Infimum dieser Menge.

Die Operatoren $\downarrow$ und $\uparrow$ bilden eine sogenannte *Galois*-Korrespondenz mit folgenden Eigenschaften, die sich im weiteren Verlauf als wichtig erweisen werden.[5]

Theorem 2 (Galois-Korrespondenz)**.** Es seien A und B beliebige Teilmengen einer Ordnung H, dann gelten:

$$A \subseteq B \rightarrow B\uparrow \subseteq A\uparrow \tag{2.21}$$

$$A \subseteq B \rightarrow B\downarrow \subseteq A\downarrow \tag{2.22}$$

$$A \subseteq B\downarrow \leftrightarrow B \subseteq A\uparrow \tag{2.23}$$

Beweis. (2.21) folgt aus der Definition der Schrankenmenge und der Voraussetzung $A \subseteq B$ so: Jedes $x \in B\uparrow$ ist auch obere Schranke von A, also $B\uparrow \subseteq A\uparrow$. (2.22) folgt dual dazu.

$A \subseteq B\downarrow \rightarrow B \subseteq A\uparrow$ folgt so: Jedes Element von $B\downarrow$ und damit auch die Elemente von A sind untere Schranken von B. D. h. insbesondere, dass jedes

[5] Die Galois-Korrespondenz gilt sogar für beliebige Relationen R. Man ersetzt dazu in Definition (2) lediglich $\geq$ und $\leq$ durch R und R^{-1}. (Vgl. [Ern82] S. 86f, 124f).

Element von B größer ist als jedes Element von A und damit auch Element von $A\uparrow$ sein muss.

$B \subseteq A\uparrow \rightarrow A \subseteq B\downarrow$. Aus der Voraussetzung folgt, dass alle Elemente von B größer als die von A sind. Also müssen alle Elemente von A Elemente der unteren Schrankenmenge von B sein. Damit ist der Beweis von (2.23) vollständig. □

Ein Verband ist sodann eine Ordnung, in der zu jeder zweielementigen Menge sowohl Infimum als auch Supremum existieren. Ein endlicher Verband ist durch die Existenz von 0- und 1-Element gekennzeichnet. Diese beiden Elemente existieren, wenn jede beliebige Teilmenge der Ordnung ein Infimum und ein Supremum hat. Hier die Definition.

Definition 4. Eine Ordnung V ist ein *Verband*, symbolisch $\mathbb{V}(V)$, wenn gilt:

$$\mathbb{V}(V) =_{\text{def}} \mathbb{O}(V) \wedge x, y \in V \rightarrow \exists is(\inf\{x, y\} = i \wedge \sup\{x, y\} = s)$$

Ein Verband V ist ein *endlicher Verband*, symbolisch $\mathbb{V}^*(V)$, wenn gilt:

$$\mathbb{V}^*(V) =_{\text{def}} \mathbb{V}(V) \wedge T \subseteq V \rightarrow \exists is(\inf T = i \wedge \sup T = s)$$

Aus den Definitionen von Infimum und Supremum folgen jeweils die Existenz von 0- und 1-Element für endliche Verbände. Man könnte auch das folgende Theorem zur Definition eines endlichen Verbandes heranziehen und die obige Definition beweisen. Die beiden Aussagen sind im Grunde äquivalent.

$$\mathbb{V}^*(M) \rightarrow \exists xy(x, y \in M \wedge x = 0 \wedge y = 1) \tag{2.24}$$

Typische Beispiele für endliche Verbände sind Teiler-von-Relation auf Teilmengen der Natürlichen Zahlen oder die Potenzmenge einer Menge; die Teiler-von-Relation auf allen Natürlichen Zahlen ist dagegen kein endlicher Verband. Begriffssysteme können durch die Beschränkung der Speicherkapazität des menschlichen Gehirns nur endliche Mengen von Begriffen erfassen, ein Begriffssystem mit einer unendlichen Menge von Begriffen ist daher nur eine rein theoretische Möglichkeit. Diese Arbeit beschränkt sich daher ausschließlich auf Systeme mit endlichen Mengen. In der Verbandstheorie sind zwei andere Symbole für das Infimum, $\bigsqcap$, und Supremum, $\bigsqcup$, gebräuchlich. Die entsprechenden formalen Äquivalenzen sind: $\inf A = \bigsqcap A$ und $\sup A = \bigsqcup A$. Da sehr häufig die Beziehung zwischen zwei Elementen betrachtet wird, sind daneben diese alternativen Schreibweisen im Gebrauch: $\inf(a, b) = a \sqcap b$ und $\sup(a, b) = a \sqcup b$.[6] In der Verbandstheorie werden außerdem das Infimum der Schnitt und das Supremum auch die Vereinigung oder Verbindung (daher der Name Verband) genannt.

[6] Weit verbreitet sind auch die Symbole $\wedge$ und $\vee$ für Infimum und Supremum. Diese sind in dieser Arbeit jedoch für die logischen Operatoren Adjunktion und Konjunktion reserviert.

Aus den Definitionen direkt ersichtlich ist eine Ordnungsstruktur zwischen Typen von Mengen: Ein endlicher Verband ist ein Verband und ein Verband ist eine Ordnung, also: $\mathbb{V}^* \geq \mathbb{V} \geq \mathbb{O}$; die Umkehrung gilt nicht. Zwischen der Ordnungsstruktur und den Verbandsoperatoren besteht folgender Zusammenhang ($x, y \in M \wedge \mathbb{V}(M)$):

$$x \geq y \leftrightarrow \inf(x, y) = y \leftrightarrow x \sqcap y = y \leftrightarrow \sup(x, y) = x \leftrightarrow x \sqcup y = x \tag{2.25}$$

Beweis. Die Äquivalenzen folgen direkt aus den Definitionen von Infimum und Supremum, wenn für die Menge $\{x, y\}$ $x \geq y$ gilt. □

Ist ein Verbandselement nicht durch andere Verbandselemente mit Hilfe der Operatoren $\sqcup$ und $\sqcap$ darstellbar, dann nennt man es mit Bezug auf den Operator Supremum- oder Infimum-Irreduzibel. Solche Elemente sind in einem Verband dann das, was die Primzahlen für die Arithmetik sind: Mit ihrer Hilfe lassen sich die anderen Elemente zerlegen oder zusammensetzen; sie selbst sind aber nicht durch andere Elemente darstellbar.

Definition 5. Sei V ein Verband. Ein Element v des Verbandes ist *Supremum*- bzw. *Infimum*-Irreduzibel, wenn gilt

$$v = a \sqcup b \rightarrow v = a \vee v = b$$
$$v = a \sqcap b \rightarrow v = a \vee v = b$$

Äquivalent dazu gilt

$$a < v \wedge b < v \rightarrow a \sqcup b < v$$
$$a > v \wedge b > v \rightarrow a \sqcap b > v$$

Wenn H eine Halbordnung ist und $S \subseteq H$, dann wird S supremum-dicht (infimum-dicht) genannt, wenn jedes Element von H als Supremum (Infimum) einer Teilmenge von S darstellbar ist.

Beispielsweise ist in einer n-elementigen Kette jedes Element ungleich 0 Supremum-Irreduzibel. In einem Verband ist ein Element nur dann Supremum-Irreduzibel, wenn es genau einen unteren Nachbarn hat.

2.3.1. Verbandsklassen

Häufig werden Verbände axiomatisch eingeführt. Mit den Axiomen und weiteren Identitäten lassen sich Verbände leichter klassifizieren.

$$a \sqcap a = a \qquad \text{Idempotenz} \tag{2.26}$$
$$a \sqcup a = a$$
$$a \sqcap b = b \sqcap a \qquad \text{Kommutativgesetz} \tag{2.27}$$
$$a \sqcup b = b \sqcup a$$
$$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c) \qquad \text{Assoziativgesetz} \tag{2.28}$$
$$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$$
$$a \sqcap (a \sqcup b) = a \qquad \text{Absorptionsgesetz} \tag{2.29}$$
$$a \sqcup (a \sqcap b) = a$$

Beweis. Da Verbände hier anders eingeführt wurden, müssen diese Gesetze sich daraus ableiten lassen. Das sei hier nur skizzenhaft durchgeführt. Idempotenz und Kommutativität sind trivial. Das Assoziativgesetz folgt so:[7] Nimmt man an, dass $x \leq (a \sqcap b) \sqcap c$, dann gilt auch, dass $x \leq a \sqcap b$ und $x \leq c$, und weiter gilt dann auch, dass $x \leq a$ und $x \leq b$ ist. Daraus folgt, dass $x \leq a \sqcap b \sqcap c$ gilt. Die Reihenfolge der Berechnung hat daher keine Auswirkung auf das Resultat. Das Absorptionsgesetz für die linke Seite folgt so: Das Supremum von a und b ist in jedem Fall größer oder gleich a, $a \sqcup b \geq a$. Aus der Definition des Infimums folgt, dass der Schnitt von a und $a \sqcup b$ wieder a sein muss. Dual dazu verläuft der Beweis der rechten Seite des Gesetzes. □

Dies sind wichtige Identitäten zur Unterscheidung von Verbandsklassen, die in der darauf folgenden Tabelle dargestellt sind.

$$a < c \rightarrow a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap c \qquad \text{Modulgesetz} \tag{2.30}$$
$$a \sqcap ((a \sqcap b) \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \qquad \text{(rein algebraisch)}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \qquad \text{Distributivgesetz} \tag{2.31}$$
$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$$
$$\forall a \exists b (a \sqcap b = 0 \ \wedge \ a \sqcup b = 1) \qquad \text{Komplementgesetz} \tag{2.32}$$

Das Komplement eines Elementes a wird oft durch $\bar{a}$ dargestellt. Logisch wird es ebenso oft als Negation interpretiert. Es ist aber nicht identisch mit der weiter unten eingeführten begrifflichen Negation.

[7] [Her67], S. 10.

Verband	Idempotenz	Kommutativität	Assoziativität	Absorption	Modularität	Distributivität	Komplement
Allgemeiner	✓	✓	✓	✓			
Modularer	✓	✓	✓	✓	✓		
Distributiver	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Boolescher	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 2.1.: Verbandsklassen.

2.4. Einbettung von Ordnungen in Verbände[8]

Da eine Einbettung oder Vervollständigung in der Regel weitere Elemente zu einer Ausgangsmenge hinzufügt, um aus einer geordneten Menge einen Verband zu erhalten, ist es sinnvoll gewisse Anforderungen zu stellen. Jede Art von Vervollständigung muss eindeutig sein und die ursprüngliche Ordnung erhalten. Daneben können noch weitere Forderungen erhoben werden, die sich auf bestimmte Eigenschaften der Ausgangsstruktur beziehen, z. B. Erhaltung der Distributivität, wenn sie vorhanden ist. Solche Forderungen sind vor allem dann gewünscht, wenn es sich bei der Ausgangsmenge schon um einen Verband handelt. Eine Ordnung hat solche Eigenschaften in der Regel nicht. Deshalb werden hier vor allem Vervollständigungen untersucht, die auf geordnete Mengen anwendbar sind. Da es hier um die Analyse von Bedeutungsdefinitionen geht und dabei die in Definitionen vorkommenden Begriffe in einem System von Begriffen in Beziehung treten, möchte man natürlich so wenige Begriffe wie möglich aus systematischen Gründen ‚erfinden' müssen. Es ist also so etwas wie eine minimale Vervollständigung gefragt.

Um aus einer geordneten Menge M einen Verband V zu erhalten, der die ursprüngliche Ordnung respektiert, ist eine Abbildungsfunktion φ von M nach V nötig, $\varphi : M \longrightarrow V$, so dass für beliebige $x, y \in M$ gilt:

$$x \geq y \rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y) \tag{2.33}$$

Diese Abbildung erhält die Ordnung von M innerhalb von V und wird *ordnungserhaltend* oder *Homomorphismus* genannt. Gilt für φ darüber hinaus auch die

[8] [Ern82] S. 79 und 138-159.

Umkehrung und damit

$$x \geq y \leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y) \tag{2.34}$$

dann wird φ eine *Ordnungseinbettung* genannt. Aufgrund der Antisymmetrie der Relation $\geq$ ist eine Ordnungseinbettung immer injektiv, d. h. φ ist linkseindeutig. Ist die Funktion φ zudem auch surjektiv, d. h. hat jedes Urbild in V ein Bild in M, dann nennt man sie einen *Isomorphismus*. Abbildung 2.5 zeigt drei

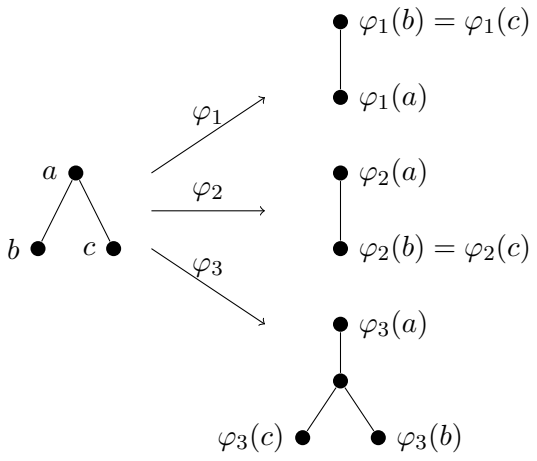


Abbildung 2.5.: Beispiele für Abbildungsfunktionen.

Abbildungsfunktionen von denen φ_1 nicht ordnungserhaltend, φ_2 ordnungserhaltend aber keine Einbettung und φ_3 eine Einbettung aber kein Isomorphismus ist. Ein Isomorphismus ist nicht dargestellt, da sich nur die Bezeichnung der Elemente ändert.

Beispiel 1. Die Vervollständigung einer Ordnung ist nicht so trivial wie es auf den ersten Blick scheint. Eine Ordnung wie in Abbildung 2.6 lässt sich durch Hinzufügen (*Adjungieren*) von 0- und 1-Elementen zu einem Verband vervollständigen.

Beispiel 2. Das reicht aber schon nicht aus für die Ordnung von Abbildung 2.7. Für b und d existiert z. B. kein Supremum, denn die obere Schrankenmenge $\{a, c, 1\}$ von $\{b, d\}$, hat kein kleinstes Element. Die minimale Vervollständigung für diese Ordnung zeigt die Abbildung 2.8 auf Seite 30.

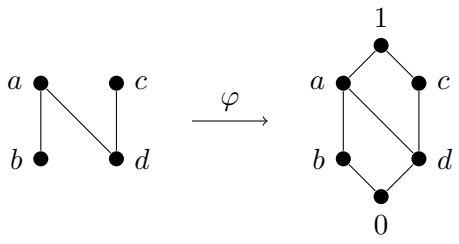


Abbildung 2.6.: Einfache Vervollständigung durch Adjungieren von 0 und 1.

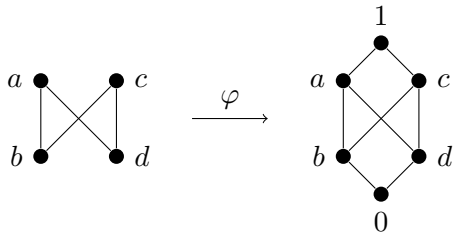


Abbildung 2.7.: Adjungieren von 0 und 1 ergibt keinen Verband.

Die folgenden Vervollständigungsmethoden benutzen die Mengeninklusion, auch Teilmengenbeziehung genannt, als Ordnungsstruktur. Da die Teilmengenbeziehung, $\subseteq$, reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, erfüllt sie die notwendigen Eigenschaften einer Ordnung. Die Einbettung selbst beruht auf der Beziehung spezieller Teilmengen der Ordnung, wie z. B. den Schrankenmengen. Alle Teilmengen einer (endlichen) Menge M bilden zusammen die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Diese Menge bildet bezüglich der Mengeninklusion einen (vollständigen) Verband mit leerer Menge als 0- und der Menge selbst als 1-Element. Außerdem gelten im Potenzmengenverband, neben den allgemeinen Verbandsgesetzen, das Distributivgesetz (damit natürlich auch das Modulgesetz) und das Komplementgesetz. Die Potenzmenge bildet also einen booleschen Verband.[9] Abbildung 2.9 zeigt die Potenzmenge der Menge $\{a, b, c\}$ als Verband.

2.4.1. Hauptabschnitte

Die einfachste, allerdings auch gröbste, Art der Vervollständigung ist diejenige mittels der Hauptabschnitte. Sie bildet die Ordnung einfach in die Potenzmenge

[9] Der Nachweis wird hier nicht geführt.

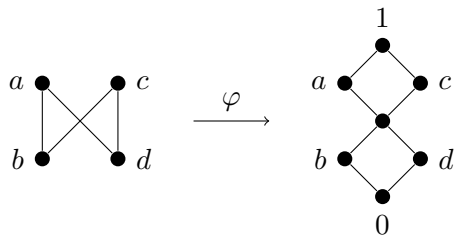


Abbildung 2.8.: Korrekte Vervollständigung.

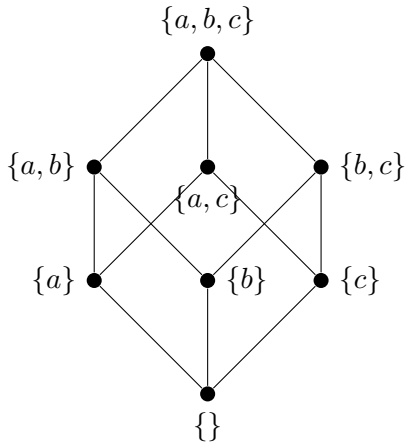


Abbildung 2.9.: Potenzmenge der Menge $\{a, b, c\}$ als Verband.

der Ordnung ab. Die zugrunde liegende Idee ist, dass die Schrankenmengen der Elemente, die ursprüngliche Ordnung erhalten. Also, $a \geq b$ impliziert $b{\downarrow} \subseteq a{\downarrow}$. Die unteren Schranken eines Elements einer Ordnung werden im Rahmen dieser Methode Hauptabschnitte genannt. Jede Schrankenmenge ist Element der Potenzmenge der Ordnung. Die Bilder der Abbildungsfunktion sind danach die Schrankenmengen in der Potenzmenge. Hier die Definition des Operators.

Theorem 3 (Hauptabschnitt)**.** Es sei X eine Ordnung, $\mathbb{O}(X)$, und $\mu : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ die folgende Abbildfunktion

$$\mu X = M =_{\text{def}} x \in X \rightarrow x{\downarrow} \in M \tag{2.35}$$

Dann ist μX eine Einbettung der Ordnung $\mathbb{O}(X)$ in den Verband $\mathbb{V}(\mathcal{P}(X))$.

Beweis. Die Struktur ist ein Verband, da die Potenzmenge einen Verband darstellt bzgl. Mengeninklusion. μX ist eine Ordnungseinbettung, weil aus Definition (2) $(a, b \in X)$ und $a \geq b$ $b \in \{a\}\downarrow$ folgt. Aus der Transitivität und Antisymmetrie der Ordnungsrelation folgt schließlich, dass $\{b\}\downarrow \subseteq \{a\}\downarrow$ gilt. Also gilt: $a \geq b \rightarrow \{b\}\downarrow \subseteq \{a\}\downarrow$. Aufgrund der Eigenschaften der Teilmengenbeziehung ist die Umkehrung trivial und es gilt auch $\{b\}\downarrow \subseteq \{a\}\downarrow \rightarrow a \geq b$. Die Eindeutigkeit der Vervollständigung ergibt sich ebenfalls aus der Definition der Schrankenmenge. □

Beispiel 3. Es sei eine Ordnung $H = \{a, b, c\}$ gegeben mit $a > b$ und $a > c$, dann ist $\mu H = \{\{a, b, c\}, \{b\}, \{c\}\}$ im Verband von Abbildung 2.9. Setzt man konkrete Begriffe ein, z. B.: $a =$ Tisch, $b =$ Möbel, $c =$ vierbeinig, erhält man folgende neue Begriffe: $\{a, b, c\} =$ vierbeinig-Tisch-Möbel, $\{a, b\} =$ Tisch-Möbel, $\{a, c\} =$ vierbeinig-Tisch, $\{b, c\} =$ vierbeinig-Möbel und den leeren Begriff $\{\}$.

2.4.2. Abschnitte

Diese Methode stellt gemäß der Forderung, möglichst wenig neue Elemente einzuführen, eine Verbesserung gegenüber der Vervollständigung durch Hauptabschnitte dar. Sie ist eine Erweiterung der Hauptabschnittsmethode. Während der Hauptabschnitt von einem Element der Ordnung ausging, bezieht sich ein Abschnitt auf die Teilmengen der Ordnung. Der Abschnitt einer Menge ist die Vereinigung der Hauptabschnitte seiner Elemente. Seine Definition lautet:

Definition 6. Der *Abschnitt* einer Teilmenge X einer Ordnung H ist

$$\downarrow X = M =_{\text{def}} y \in H \wedge \exists x(x \in X \wedge y \leq x \leftrightarrow y \in M) \tag{2.36}$$

Er wird auch *(Ordnungs-)Ideal* (*Down-Set*) genannt.[10]

Zwischen Abschnitt und Hauptabschnitt, bzw. Schrankenmenge, besteht folgende Beziehung (für $\{x\}$ schreibt man dabei einfacher x):

$$\begin{aligned} \downarrow x = \downarrow\{x\} = x\downarrow = \{x\}\downarrow =]0, x] \\ \uparrow x = \uparrow\{x\} = x\uparrow = \{x\}\uparrow =]x, 1] \end{aligned} \tag{2.37}$$

Es folgt der Vervollständigungssatz für Abschnitte:

Theorem 4 (Abschnitte)**.** Es sei H eine Ordnung $\mathbb{O}(H)$ und $\vartheta : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ die folgende Abbildfunktion

$$\vartheta H = M =_{\text{def}} X \in \mathcal{P}(H) \rightarrow \downarrow X \in M \tag{2.38}$$

Dann ist $\vartheta(H)$ eine Einbettung der Ordnung $\mathbb{O}(H)$ in den Verband $\mathbb{V}(\vartheta(H))$.

[10] Der Hauptabschnitt heißt auch Ideal. Der duale Operator heißt Filter.

Beweis. Die Ordnungseinbettung folgt so: Für jedes Element x einer Teilmenge T von H ($y \in H$) gilt: $x \geq y \leftrightarrow \downarrow y \subseteq \downarrow x$. Da $x \geq y$ gilt, enthält $\downarrow x$ aufgrund der Definition und Transitivität alle Elemente, die auch $\downarrow y$ enthält. Wegen der Antisymmetrie von $\geq$ kann $\downarrow y$ keine anderen Elemente enthalten, die $\downarrow x$ nicht enthält. Daraus folgt, dass für beliebige Mengen T_i und T_j mit $T_j \subseteq T_i$, dass $\downarrow T_i \geq \downarrow T_j$ ist. □

Beispiel 4. Gegeben sei die Ordnung $H = \{a, b, c\}$ mit $a > b$, $a > c$. Die Funktion ϑ in Form einer Tabelle:

$\mathcal{P}(H)$	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$\downarrow X$	$\emptyset$	abc	b	c	abc	abc	bc	abc

Tabelle 2.2.: ϑH.

Das Ganze als Diagramm in Abbildung 2.10. Nimmt man wieder die konkre-

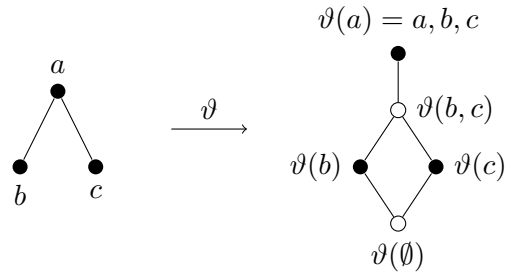


Abbildung 2.10.: $\vartheta : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(H)$.

ten Begriffe: a = Tisch, b = Möbel, c =vierbeinig erhält man noch als neue Begriffe $\{a, b, c\}$ = vierbeinig-Tisch-Möbel, $\{b, c\}$ = vierbeinig-Möbel und den leeren Begriff.

2.4.3. Schnitte

Diese Vervollständigung stellt nun die kleinstmögliche Einbettung einer Ordnung in einen Verband dar.[11] Die Schnitte beruhen auf Schrankenmengen. Ein Schnitt einer Teilmenge X einer Ordnung H entsteht durch Berechnung der oberen Schrankenmengen von X, und anschließender Berechnung der unteren

[11] Der Beweis wird hier nicht geführt. Vgl. [Ern82], S. 145.

Schrankenmenge auf der oberen Schrankenmenge von X. Für die Vervollständigung wird der Operator δ eingeführt und wie folgt definiert:[12]

Definition 7. Der *Schnitt* einer Teilmenge X der Ordnung H ist:

$$\delta X =_{\text{def}} X\uparrow\downarrow \tag{2.39}$$

Theorem 5 (Schnitte)**.** Es sei H eine Ordnung $\mathbb{O}(H)$ und $\delta : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ die folgende Abbildfunktion:

$$\delta H = M =_{\text{def}} X \in \mathcal{P}(H) \rightarrow \uparrow\downarrow X \in M \tag{2.40}$$

Dann ist $\delta(H)$ eine Einbettung der Ordnung $\mathbb{O}(H)$ in den Verband $\mathbb{V}(\delta(H))$.

Beweis. Die Ordnungseinbettung folgt so: Für die oberen Schranken der einelementigen Teilmengen von H gilt, $x \geq y \rightarrow x\uparrow \subseteq y\uparrow$. Dies folgt aus der Definition der Schrankenmengen (2.12). Auf diese Weise erhält man eine Einbettung bzgl. der Mengeninklusion. Nimmt man die oberen Schrankenmengen der einelementigen Teilmengen und bildet deren untere Schrankenmengen, erhält man über die Galois-Korrespondenz (2.22), $x\uparrow \subseteq y\uparrow \rightarrow y\uparrow\downarrow \subseteq x\uparrow\downarrow$. Die Obermengenbeziehung stellt dann die Einbettung in den Verband dar, $x\uparrow\downarrow \supseteq y\uparrow\downarrow$. □

Beispiel 5. Gegeben sei die Ordnung wie in Beispiel 4. Die Funktion δ als Tabelle:

$\mathcal{P}(H)$	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$X\uparrow$	abc	a	ab	ac	a	a	a	$\emptyset$
$X\uparrow\downarrow$	$\emptyset$	abc	b	c	abc	abc	abc	abc

und in Abbildung 2.11 als Diagramm.

Ersetzt man wie in den vorigen Beispielen a = Tisch, b = Möbel und c = *vierbeinig* erhält man nur $\{a, b, c\}$ = vierbeinig-Tisch-Möbel und den leeren Begriff als neue Begriffe.

2.5. Zusammenfassung

Dass der Ordnungstheorie eine besondere Rolle in den begrifflichen Strukturen zukommt, wurde schon in der Einführung bemerkt, weil die Art-Gattungsbeziehung intensional ein Enthalten des Gattungsbegriffs im Artbegriff ist.

[12] In der Literatur wird diese Vervollständigung unter dem Namen *Dedekind-MacNeille* geführt.

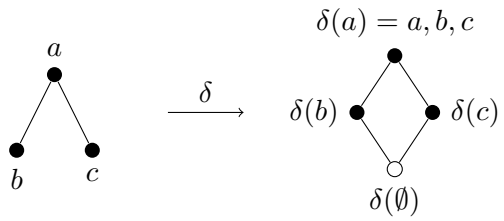


Abbildung 2.11.: $\delta : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(H)$.

Das wird auch das folgende Kapitel zeigen. Bedeutungsdefinitionen sind daher grundsätzlich immer Halbordnungen. Ihre Darstellung kann auch graphisch mit Hilfe des Hasse-Diagramms erfolgen.[13] Dieses wurde so erweitert, dass auch Begriffe mit unterschiedlicher Stellenzahl gemäß ihrer Ordnung im gleichen Diagramm darstellbar sind. Die Verbandsstrukturen sind für Begriffssysteme deshalb von besonderem Interesse, weil die Operatoren es ermöglichen, neue Begriffe zu bilden. Im Folgenden wird zu klären sein, inwieweit diese auf Begriffssysteme anwendbar sind. Es kann nicht ohne weiteres davon ausgegangen werden, dass das Infimum oder Supremum zweier oder mehrerer Begriffe allgemein existiert. Wenn man das axiomatisch voraussetzen möchte, hieße das, dass sie immer existieren. Eine sehr starke Annahme, die es zu prüfen gilt. Neben den Operatoren ist die Vervollständigung von Halbordnungen zu Verbänden eine andere, vielleicht adäquatere, Möglichkeit, neue Begriffe zu ermitteln.

[13] Später wird noch eine weitere Methode hinzukommen, die Kreuztabelle.

3. Begriffssystemtheorien

Die Ordnungs- und Verbandstheorie ist sicherlich grundlegend für die Untersuchung von Begriffen und deren Definitionen. Die Frage ist jedoch, ob sie ausreicht, Begriffe und deren Beziehungen zu erfassen. Es ist daher angebracht die Begriffsbeziehungen und auch die Operationen mit Begriffen ganz unabhängig von dieser oder jener Theorie zu betrachten. Denn es wird sich zeigen, dass die Frage nach der Existenz von Begriffen ganz zentral die Klasse des ganzen Systems bestimmt. So ist nicht ohne weiteres klar – auch nicht aus gegebenen Bedeutungsdefinitionen – dass die Summe oder das Produkt zweier Begriffe existieren. Hierbei ist nicht an widersprüchliche Begriffe zu denken, sondern eher daran, ob es z. B. Sinn macht, zwei Begriffe in einem dritten als seiner Summe zu vereinen. Das wäre der Fall, wenn die beiden Begriffe in einer Definition eines anderen Begriffes vorkämen. Bei der Frage, ob zwei Begriffe einen dritten gemeinsam haben, ist es auch nicht viel einfacher. Hier ein Beispiel. Man beachte die Begriffe *Person* und *Gut*.

Auto – von einem Motor angetriebenes Fahrzeug mit offener oder geschlossener Karosserie (das zum Befördern von *Personen* oder *Gütern* auf Straßen dient). ([Dud])

Was ist nun der gemeinsame Inhalt von *Person* und *Gut*? Man ist geneigt zu sagen, beiden gemeinsam ist, dass sie beförderbar sind. Aber das geben ihre Definitionen nicht her, und aus ihnen sollte es sich ergeben. Hier zur Illustration die sich aus *Person* und *Gut* ergebenden Definitionsketten aus den Gattungsbegriffen ihrer Definitionen:

Person – Mensch als individuelles Wesen. ([Dud])

Mensch – mit Vernunft und Sprache ausgestattetes höchstentwickeltes Lebewesen. ([Dud])

Lebewesen – Wesen mit organischem Leben, bes. Mensch oder Tier. ([Dud])

Und aus Gut folgende:

Gut – zum Versand bestimmte, im Versand befindliche Ware. ([Dud])

Ware – etwas, was gehandelt, verkauft oder getauscht wird. ([Dud])

Die Definitionen geben offensichtlich keine Gemeinsamkeiten her, aber auch ohne Zuhilfenahme eines oder mehrerer Lexika ist es in der Tat schwierig, den gemeinsamen Inhalt der beiden Begriffe *Person* und *Gut* zu ermitteln. Eine andere Lösung sucht den Zusammenhang der beiden, im Grunde ja doch sehr unterschiedlichen Begriffe, in der Stelle des Begriffes, in welchem beide gewissermaßen vorkommen, nämlich in einer Stelle des Begriffes *Befördern*. Damit ist das Gemeinsame, das Beförderbarsein, nicht in den beiden Begriffen, sondern in einer der Stellen eines höherstelligen Begriffes enthalten.

Die folgenden Kapitel beschreiben verschiedene Ansätze zur Analyse von Begriffen und deren Systemen.

- In ihrer „Einführung in die Theorie der Begriffssysteme“ ([Kau67]) hat Railli Kauppi eine Theorie auf Basis von Leibniz' logischen Untersuchungen über die Intension entwickelt. (Kap. 3.2)

- Wille hat schließlich eine auf der Verbandstheorie basierende Formale Begriffsanalyse entwickelt, die innerhalb der Mathematik und auch in der künstlichen Intelligenz sehr erfolgreich ist. Das grundlegende Werk dazu ist die „Formale Begriffsanalyse“ ([GW96]). (Kap. 3.3)

- Freytag-Löringhoff entwickelte als Gegenprogramm zur formalen mathematischen Logik eine auf Aristoteles' Schlusslehre gegründete Neue Logik, die von den Begriffen als Basis des logischen Schließens ausgeht. Diese Lehre wurde von Petzinger in den 70er Jahren formalisiert. Die Hauptwerke sind „Neues System der Logik“ ([FL85]) und „Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik“ ([Pet75]). (Kap. 3.4)

- In der Description Logic spielen Begriffe (concepts) eine zentrale Rolle. Sie verbindet die intensionale und extensionale Ebenen miteinander. Die Begriffssysteme, d. h. die intensionale Seite, sind boolesche Verbände. (Kap. 3.5)

3.1. Definitionstheorie

Vor dem Einstieg in die Analyse der Begriffe ein kurzer Blick auf die Theorie der Definitionen. Sie ist heutzutage vor allem im Bereich der Logik und der Wissenschaftstheorie verankert. Mit den Bedeutungsdefinitionen eines Bedeutungswörterbuches beschäftigt sie sich nicht. Sie unterscheidet zwischen der Nominaldefinition einerseits, die eine neue Bezeichnung samt ihrer Bedeutung

einführt, und der Realdefinition andererseits, die bereits eine existierende und in Gebrauch befindliche Bezeichnung in Bezug auf ihre Bedeutung analysiert. Die Nominaldefinition ist also eher kreativ, sie erfindet neue Zeichen und legt Bedeutung fest; dagegen ist die Realdefinition analysierend, sie ermittelt eine vorhandene Bedeutung und formuliert diese.[1]

Ein Bedeutungswörterbuch führt keine neuen Bezeichnungen ein. Dass dort Nominaldefinitionen vorkommen ist daher auszuschließen. Die Bedeutungen und Realdefinitionen sind strukturell ähnlich, da beide das klassische Definitionsschema mit Gattungsbegriff und Artunterschieden idealisieren. Im Unterschied zur Bedeutungserklärung eines Wörterbuches können Realdefinitionen wahr oder falsch sein, da sie das Ergebnis einer Analyse sind und Erkenntnis liefern. Die Bedeutungen in einem Wörterbuch besitzen nicht diesen epistemologischen Status. Der Lexikograph ist bestrebt, die gängige Bedeutung eines Zeichens wiederzugeben. Wissenschaftlich betrachtet könnte also eine Bedeutung falsch sein, jedoch adäquat in Bezug auf die Sprachgemeinschaft. Das Lexikon einer Sprache könnte berechtigter Weise einen *Wal* als *Fisch* definieren, wenn die Sprecher dieser Sprache das Wort *Wal* in dieser Weise verwenden. Als Realdefinition von Wal verstanden, wäre die gleiche Definition falsch.

Ein wichtiger Aspekt in der Definitionstheorie ist die Ersetzbarkeit, vor allem im Hinblick auf formale Systeme. Angenommen wird irgendein (formal) sprachlicher Kontext. Eine Ersetzung ist dann der Austausch eines Symbols durch ein anderes Symbol oder durch eine Zeichenreihe. In syntaktischer Hinsicht heißt das, vereinfacht formuliert, die Definition ist eine Art Identitätsbeziehung, in der das links vom Identitätszeichen stehende Symbol durch die rechts davon stehende Symbolreihe ersetzt werden darf. Die Bedeutung, die semantische Seite, stellt durch die Definition dabei sicher, dass die Bedeutung des Kontextes durch die Ersetzung gleich bleibt.

Die Forderung nach Ersetzbarkeit spielt in einem Bedeutungswörterbuch gar keine Rolle – weder syntaktisch noch semantisch. Bestenfalls die Anführung von Synonymen in einem Wörterbuch kann diesen Zweck erfüllen.[2] In der natürlichen Sprache ist die Ersetzung eines Wortes in einem Text durch ein Synonym zumindest mit einer Bedeutungsverschiebung verbunden, selbst wenn ihre Bedeutungen nahezu identisch sind. Man stelle sich eine Gerichtsverhandlung vor, in der ein Richter einen erwachsenen Zeugen nach seinen Eltern fragt, und dieser seine Eltern mit „Mama/Papa“ bezeichnet anstatt „Mutter/Vater“.

[1] Vgl. [Ess70] S. 39-48.

[2] Das psycho-linguistisch motivierte WordNet Projekt verfolgte den Ansatz, Bedeutungen komplett durch Synonymie zu ersetzen. Später wurden die Bedeutungsdefinitionen wieder eingeführt, weil erkannt wurde, dass Synonymie Bedeutung nicht ersetzen kann. Siehe dazu Kapitel 4.2.

3.2. Begriffssysteme nach Kauppi

In der Theorie der Begriffssysteme, die Kauppi nach den Ideen von G. W. Leibniz' intensionaler Logik entwickelt hat, geht es einmal um die Beziehungen zwischen den Begriffen, und zum anderen darum, die Voraussetzungen (Axiomen) verschiedener Arten von Begriffssystemen herauszustellen.[3] Kauppi war die erste, die erkannt hat, dass Begriffe eine spezielle Form der Ordnungsstruktur bilden, und hat herausgearbeitet, unter welchen Bedingungen Begriffssysteme isomorph zu bestimmten Verbandsstrukturen sind. Sie geht davon aus, dass sich Begriffssysteme aus Definitionen ableiten lassen. Dabei benutzt sie in ihren Beispielen eher geläufige Begriffe aus der Mathematik, Geometrie und nur wenige konkrete umgangssprachliche Begriffe. Die Beispiele geben nie explizit formulierte Definitionen an; sie setzt sie implizit als bekannt voraus. Der Analyseschritt von den Definitionen zum Begriffssystem wird nicht weiter betrachtet.

Eine zentrale Einsicht dieser Theorie ist, dass die Anwendung von Begriffsoperatoren nur unter bestimmten Existenzbedingungen möglich ist. Alle Operatordefinitionen sind eindeutig, sie werden als Identitätsgesetze formuliert. Theoreme, die (implizite) Voraussetzungen bezüglich der Existenz von Begriffen enthalten, werden als *existentiell belastet* bezeichnet, und durch *eb* gekennzeichnet. Die Darstellung des Kalküls erfolgt teils algebraisch, basierend auf der Ordnungstheorie, sowie teils prädikatenlogisch mit Hilfe der bekannten Symbolik der Aussagen- und Prädikatenlogik erster Stufe. Die Interpretation der Individuenvariablen und Konstanten ist dabei immer eine Abbildung auf eine Menge von Begriffen.

Die grundlegende Relation der Begriffe ist die *Enthält*-Relation (größer gleich, $\geq$).

$$a \geq b =_{\text{def}} a > b \lor a = b \tag{3.1}$$

Sie sagt aus, dass die Definition eines Begriffes einen anderen Begriff enthält. Ein Begriff enthält typischerweise seinen Gattungsbegriff, aber auch seine Differenzbegriffe. Z. B. enthält der Begriff *Rhätische Rose* den Gattungsbegriff *Rose* und u. a. den Differenzbegriff *Gebüsch*, der die Rhätische Rose von anderen Rosen unterscheidet, die keine Gebüsche sind.[4] Auf dieser Ordnung wird die Theorie der Begriffe gegründet. Kauppi zählt die verschiedenen Möglichkeiten, in denen zwei Begriffe zueinander in Beziehung stehen können, so auf:

Theorem 6. Zwei Begriffe a und b können nur in genau einer der folgenden Beziehungen zueinander stehen (wenn die Identität nicht explizit behauptet

[3] Eine ausführliche Analyse der Leibnizschen Logik findet sich in [Kau60].
[4] Vgl. [SF96] S. 239.

wird, gilt $a \neq b \neq c \neq d$)

Identität	$a = b$	(3.2)
enthält echt	$a > b$	(3.3)
echtes Enthalten	$a < b$	(3.4)
homogen-vereinbar	$c > a \wedge c > b \wedge a > d \wedge b > d$	(3.5)
heterogen-vereinbar	$c > a \wedge c > b \wedge \neg \exists x(a > x \wedge b > x)$	(3.6)
Gegensatz	$a > c \wedge b > c \wedge \neg \exists x(x > a \wedge x > b)$	(3.7)
Isoliert	$\neg \exists x(a > x \wedge b > x) \wedge$	(3.8)
	$\neg \exists x(x > a \wedge x > b)$	

Beweis. Die ersten drei Möglichkeiten sind trivial. Die nächsten ziehen die beiden erschöpfenden Möglichkeiten in Betracht, dass zwei Begriffe in einem dritten enthalten sein können. Und, dass sie einen gemeinsamen Begriff enthalten können. Die vierte Möglichkeit stellt den Fall dar, dass sie sowohl in einem anderen Begriff enthalten sind, und gleichzeitig einen gemeinsamen Begriff enthalten. Die Fälle fünf und sechs verneinen jeweils eine der Möglichkeiten. Die Isoliertheit schliesslich liegt vor, wenn a und b begrifflich in gar keiner Relation zueinander stehen. Damit sind alle möglichen Beziehungen erschöpft, in denen zwei Begriffe zueinander stehen können.[5] □

Zwei Begriffe sind miteinander *vergleichbar*, wenn sie mindestens einen Begriff gemeinsam haben, sonst sind sie *unvergleichbar*.

$$a \mathsf{H} b =_{\text{def}} \exists x(a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.9}$$

$$a \mathsf{H\!\!\!-} b =_{\text{def}} \neg \exists x(a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.10}$$

Die duale Relation dazu ist die Unvereinbarkeit, die bei der Negation und den Widersprüchen eine zentrale Rolle spielt. Sind zwei Begriffe nämlich *unvereinbar*, so können sie auch nicht ein und demselben Individuum zukommen. Intensional formuliert: Zwei Begriffe sind *vereinbar*, wenn sie beide in einem dritten Begriff enthalten sind.

$$a \curlywedge b =_{\text{def}} \exists x(x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.11}$$

$$a \curlyvee b =_{\text{def}} \neg \exists x(x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.12}$$

[5] In der Ordnungstheorie werden diese Möglichkeiten gar nicht in Betracht gezogen, dort beschränkt man sich auf die Unvergleichbarkeit, $a \parallel b =_{\text{def}} a \ngeq b \wedge b \ngeq a$. Es gilt $a \parallel b$ für (3.5) bis (3.8).

In der Praxis ist es schwieriger die Vereinbarkeit festzustellen als die Vergleichbarkeit. Bei letzterer steigt man einfach von den Definitionen hinab, und prüft dabei auf gemeinsame Begriffe. Bei ersterer muss man einen dritten Begriff suchen, in dessen Definition die beiden enthalten sind. Die betrachteten Begriffe selbst und ihre Bedeutungsdefinitionen allein liefern keinen Hinweis.

Der Zusammenhang zwischen den Bezeichnungen der sieben möglichen Beziehungen ergibt sich nun so. Zwei Begriffe sind ...

homogen-vereinbar (3.5) wenn sie sowohl vereinbar als auch vergleichbar sind.

heterogen-vereinbar (3.6) wenn sie nicht vergleichbar, aber vereinbar sind.

gegensätzlich (3.7) wenn sie nicht vereinbar, aber vergleichbar sind.

isoliert (3.8) wenn sie sowohl unvergleichbar als auch unvereinbar sind.

Im Unterschied zur Isoliertheit bedarf der Gegensatz der Vergleichbarkeit. Von einem Gegensatz redet man nur, wenn etwas in irgendeinem Sinne vergleichbar ist. Isolierte Begriffe stehen ohne Bezug nebeneinander, wie zwei Begriffe aus völlig verschiedenen Bereichen.

Kauppi (1967:43) illustriert die Beziehungen ausgehend von einem Begriffssystem aus der Geometrie. Es sei gesetzt, dass alle Begriffe als gemeinsames Merkmal den Begriff *ebene Figur* enthalten. Sie sind also alle miteinander vergleichbar. Identisch sind die Begriffe *Quadrat* und *regelmäßiges Viereck*. Echtes Enthalten besteht zwischen *Quadrat* und *Rechteck*, und echtes Enthaltensein zwischen *Rechteck* und *Quadrat*. Die Begriffe *regelmäßige Figur* und *Viereck* sind miteinander homogen-vereinbar. Die Begriffe *Dreieck* und *Viereck* sind gegensätzlich. Fügt man zu dem System noch den Begriff *Raumkörper* hinzu, dann sind die Begriffe *Quadrat* und *Würfel* voneinander isoliert. Heterogen-vereinbar sind zwei Begriffe, wenn man zu einem System der wahrnehmbaren räumlichen Körper, den Begriff der *Farbe* hinzunimmt. Dann stehen die Begriffe *Rot* und *Kugel* in dieser Relation zueinander, da sie vereinbar sind, aber keinen gemeinsamen Begriff enthalten.

Die Beziehungen seien zur Erläuterung auf das Beispiel in Abbildung 2.1 auf Seite 19 angewendet. b und f sind homogen-vereinbar, denn sie sind beide in a enthalten, und enthalten verschiedene gemeinsame Begriffe wie e, g und h. Heterogen-vereinbar sind z. B. c und g, denn sie sind beide in b enthalten, haben aber keinen Begriff gemeinsam. Gegensätzlich sind i und f, da sie den gemeinsamen Begriff h enthalten, aber nicht vereinbar sind, also nicht gemeinsam in einem anderen Begriff enthalten sind. Isoliert sind i und g, da sie keinen gemeinsamen Begriff enthalten, und auch nicht in einem anderen zusammen

enthalten sind. Mit Ausnahme von i sind die übrigen Begriffe untereinander weder isoliert noch gegensätzlich, weil sie alle zumindest in a enthalten sind.

3.2.1. Begriffsoperatoren

Produkt

Das Produkt zweier Begriffe ist definiert als das größte gemeinsame Merkmal beider Begriffe

$$c = a \odot b =_{\text{def}} \forall x(c > x \leftrightarrow a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.13}$$

Statt $a \odot b$ schreibt man auch einfach ab. In einem Verband entspricht das Produkt dem Infimum. In Abbildung 2.1 ist $h = f \odot i$. Jedoch existiert für $b \odot f$ kein Produkt, da es kein *größtes* gemeinsames Merkmal gibt unter ihren gemeinsamen Begriffen d, e, g und h. Ebenso existiert kein Produkt für $g \odot h$, aber hier nicht, weil beide Begriffe keinen gemeinsamen Begriff enthalten.

Beispiele aus dem alltäglichen Sprachgebrauch findet man in bekannten Artbegriffen wie *Spatz* und *Fink*, die beide den Begriff *Singvogel* enthalten. Wie eben am Beispiel des Diagramms 2.1 dargelegt, muss man jedoch darauf achten, dass das Produkt eindeutig ist. Möglich wäre, dass die beiden Begriffe mehrere Begriffe gemeinsam haben, unter denen aber keiner der größte im Sinne der Enthält-Relation ist.

Aus der Definition des Produktes ergeben sich zwei Existenzbedingungen, die gelten müssen, um ein Produkt zweier Begriffe, $a \odot b$, bilden zu können:

$$\exists x(a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.14}$$

$$\forall x \exists z(z \geq x \leftrightarrow a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.15}$$

Einige Theoreme für das Produkt:

eb $$c = a \odot b \leftrightarrow \forall x(c \geq x \leftrightarrow a \geq x \wedge b \geq x) \tag{3.16}$$

eb $$c \geq a \odot b \leftrightarrow \forall x(a \geq x \wedge b \geq x \rightarrow c \geq x) \tag{3.17}$$

eb $$a \odot b \geq c \leftrightarrow a \geq c \wedge b \geq c \tag{3.18}$$

eb $$a \geq a \odot b \tag{3.19}$$

$$a \odot a = a \tag{3.20}$$

eb $$a \odot b = b \odot a \tag{3.21}$$

eb $$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c) \tag{3.22}$$

$$a \geq b \leftrightarrow b = a \odot b \tag{3.23}$$

eb $$a \geq b \wedge c \geq d \rightarrow a \odot c \geq b \odot d \tag{3.24}$$

eb $$a \geq b \rightarrow a \odot c \geq b \odot c \tag{3.25}$$

Beweis. (3.16) und (3.17) folgen syntaktisch direkt aus der Definition. (3.18) und (3.19) folgen aus der Definition, da jeder Begriff sein Produkt enthalten muss. Idempotenz (3.20), Kommutativität (3.21) und Assoziativität (3.22) sind trivial. (3.23) sagt, das Produkt zwischen einem Begriff und einem seiner Inhaltsbegriffe ist dieser Inhaltsbegriff. Das folgt einmal aus der Transitivität der Enthält-Relation, und der Forderung an das Produkt, dass es der größte Begriff sein muss. Die Gemeinsamkeit besteht aber gerade in b, und dieser ist auch der größte Begriff. (3.24) besagt, dass die Enthält-Relation sich auf die Produkte vererbt. Das Produkt zweier Begriffe enthält immer die Produkte ihrer Inhaltsbegriffe. Das Produkt von b (d) mit irgendeinem anderen Begriff kann nie a (b) enthalten (Antisymmetrie). (3.25) ist ein Spezialfall von (3.24). □

Summe

Die Summe zweier Begriffe ist definiert als der kleinste Begriff, der die beiden betrachteten Begriffe enthält. Auch hier wird vorausgesetzt, dass ein solcher Begriff existiert.

$$c = a \oplus b =_{\text{def}} \forall x(x \geq c \leftrightarrow x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.26}$$

In einem Verband entspricht die Summe dem Supremum. In Abbildung 2.1 sind $a = b \oplus f$ und $b = c \oplus e$. Dagegen haben e und g keine Summe. Sie sind beide in a, b und f enthalten, aber keiner dieser Begriffe ist in dieser Teilmenge der kleinste.

Die Summe zweier Begriffe zu bestimmen ist schwieriger als die Bestimmung des Produktes, da man hier nicht über eine vorgegebene Definition hinabsteigen kann. Man muss im Grunde alle Definitionen durchsuchen, um herauszufinden, ob ein anderer Begriff die beiden enthält, und zusätzlich noch, welcher davon der kleinste ist.

Aus dem Duden entnimmt man unter der Bedeutung von Gut diese Komposita: *Bedarfsgut*, *Eilgut*, *Expressgut*, *Frachtgut*, *Handelsgut*, *Versandgut*. Begrifflich betrachtet enthält jedes Kompositum den Begriff *Gut*, und ist die begriffliche Summe aus diesem und dem Begriff des jeweils anderen Morphems. Das folgt gemäß des Theorems (3.36). Doch zuerst wieder die Existenzbedingungen für die Summe zweier Begriffe, $a \oplus b$:

$$\exists x(x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.27}$$

$$\forall x \exists z(z \geq x \leftrightarrow x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.28}$$

Hier wieder einige Theoreme. Die Summe ist der zum Produkt duale Opera-

tor.

eb $$c = a \oplus b \leftrightarrow \forall x(x \geq c \leftrightarrow x \geq a \wedge x \geq b) \tag{3.29}$$

eb $$c \geq a \oplus b \leftrightarrow c \geq a \wedge c \geq b \tag{3.30}$$

eb $$a \oplus b \geq c \leftrightarrow \forall x(x \geq a \wedge x \geq b \rightarrow x \geq c) \tag{3.31}$$

$$a \oplus a = a \tag{3.32}$$

eb $$a \oplus b = b \oplus a \tag{3.33}$$

eb $$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \tag{3.34}$$

eb $$a \oplus b \geq a \tag{3.35}$$

$$a \geq b \leftrightarrow a = a \oplus b \tag{3.36}$$

eb $$a \geq b \wedge c \geq d \rightarrow a \oplus c \geq b \oplus d \tag{3.37}$$

eb $$a \geq b \rightarrow a \oplus c \geq b \oplus c \tag{3.38}$$

Beweis. (3.29) und (3.30) folgen syntaktisch aus der Definition. (3.31) folgt, weil jeder Begriff, der beide Summanden enthält auch deren Summe enthalten muss. Idempotenz (3.32), Kommutativität (3.33) und Assoziativgesetz (3.34) sind trivial. (3.35) folgt aus der Definition, da jede Summe ihre Summanden enthält. (3.36) sagt, dass ein Begriff, der einen anderen enthält, die Summe dieser beiden Begriffe ist. Dies folgt aus der Definition und der Forderung, dass die Summe das kleinste Merkmal ist, das die Summanden enthält. Nach (3.37) enthält die Summe zweier Begriffe immer die Summe ihrer Merkmale. Dies folgt aus (3.30), denn jeder Begriff der die Summe $a \oplus c$ enthält, enthält auch deren Merkmale b und d. (3.38) ist ein Spezialfall von (3.37). □

Produkt und Summe

Den Zusammenhang zwischen Produkt und Summe liefern folgende Theoreme. Die Operatorenrangfolge ist wie üblich Produkt vor Summe.

eb $$a \oplus b \geq a \odot c \tag{3.39}$$

eb $$a = a \oplus b \leftrightarrow b = a \odot b \tag{3.40}$$

eb $$a \odot (a \oplus b) = a \tag{3.41}$$

eb $$a \oplus (a \odot b) = a \tag{3.42}$$

$$a \odot (b \oplus c) \geq a \odot b \oplus a \odot c \tag{3.43}$$

eb $$a \oplus (b \odot c) \geq (a \oplus b) \odot (a \oplus c) \tag{3.44}$$

Beweis. (3.39) folgt aus (3.17), ein Begriff enthält immer sein Produkt. (3.40) folgt aus (3.36) und (3.23). Die beiden Verschmelzungsgesetze (3.41) und (3.42)

sind trivial. Die schwache Form des Distributivgesetzes (3.43) folgt so: In a also auch $b \oplus c$ sind, wegen (3.19) und (3.35), $a \odot b$ als auch $a \odot c$ enthalten (s. Abbildung 3.1). Aus (3.29) folgt schließlich die Behauptung, (3.44) ist das duale Gesetz zu (3.43). □

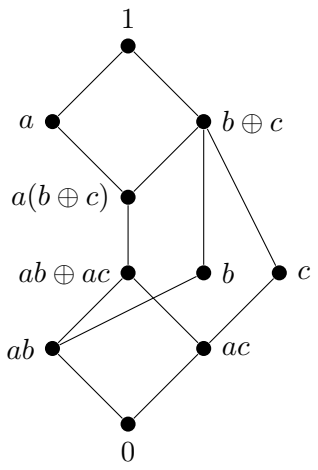


Abbildung 3.1.: Diagramm zu (3.43).

Negation und Differenz

Als weiteren Operator erhält man die Differenz zweier Begriffe als

$$c = a \ominus b =_{\text{def}} \forall x (c \geq x \leftrightarrow a \geq x \wedge b \ngeq x) \tag{3.45}$$

Dieser Operator ist allerdings nur von geringer Bedeutung, da man ihn im (logischen) Denken so gut wie nicht verwendet. Er wird deshalb nicht weiter betrachtet. Insbesondere ist er keine Negation. Diese ist von der Beziehung der Begriffe her gesehen, wie schon angedeutet, für einen einstelligen Operator doch recht komplex. Um Leibniz' Beispiel zu bemühen: Wenn man vom *Begriff* des *Menschen* die Fähigkeit zur Vernunft substrahiert, erhält man den Begriff des *Wilden* oder *Affen*; negiert man dagegen den Vernunftbegriff, erhält man den widerspruchsvollen Begriff des *nicht-vernunftfähigen Menschen*. Die Negation muss also anders als über die Differenz definiert werden. Sie setzt zwei Begriffe in einen Widerspruch: ein Begriff und seine Negation können nie gleichzeitig der gleichen Sache zukommen. So viel ist klar. Das bedeutet, dass ein Begriff

und seine Negation unvereinbar sein müssen. Durch die Forderung nach Eindeutigkeit gelangt man schließlich dazu, den größten gemeinsamen Begriff aller mit einem Begriff unvereinbaren Begriffe als die Negation zu definieren.

$$b = \bar{a} =_{\text{def}} \forall x(x \geq b \leftrightarrow x \curlyvee a) \tag{3.46}$$

Negierte Begriffe nennt man auch *Negate*. Im Diagramm 2.1 auf Seite 19 ist i die Negation für alle anderen Begriffe außer h. h ist hier unnegierbar, d. h. $\bar{h}$ existiert nicht. Die Negation von i existiert ebenfalls nicht, weil es keinen mit i unvereinbaren Begriff gibt, der in allen anderen mit i unvereinbaren Begriffen enthalten ist.

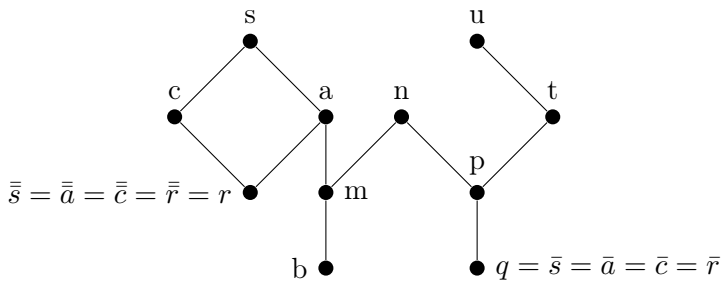


Abbildung 3.2.: Negation.

Vor der Aufzählung der Theoreme der Negation ist es angebracht ein weiteres Beispieldiagramm zu betrachten. In Abbildung 3.2 ist z. B. die Negation von a der Begriff q, denn dieser ist von allen mit a unvereinbaren Begriffen n, p, q, t und u der größte, den alle mit a unvereinbaren Begriffe enthalten. q ist auch die Negation der Begriffe s, c und r. Interessant ist nun die Frage, was denn die Negation von q ist? Mit q unvereinbar sind r, a, c und s. Der einzige, den all diese enthalten, ist r. r ist also die Negation von q. Man sieht jetzt, dass nicht allgemein gilt $x = \bar{\bar{x}}$, sondern nur die schwächere Behauptung $x \geq \bar{\bar{x}}$. Die Existenzbedingungen für die Negation eines Begriffes a sind:

$$\exists x(x \curlyvee a) \tag{3.47}$$

$$\forall xy \exists z(x \curlyvee a \wedge y \curlyvee a \rightarrow x \geq z \wedge y \geq z) \tag{3.48}$$

Die Negation ist also das Produkt aller mit einem Begriff unvereinbaren Begriffe.

Es folgen die Theoreme für die Negation

eb	$b = \bar{a} \leftrightarrow \forall x(x \geq b \leftrightarrow x \curlyvee a)$	(3.49)
eb	$b \geq \bar{a} \leftrightarrow b \curlyvee a$	(3.50)
eb	$\bar{a} \geq b \leftrightarrow \forall x(x \curlyvee a \rightarrow x \geq b)$	(3.51)
	$\forall x(x \curlywedge a) \leftrightarrow \neg \exists x(x = \bar{a})$	(3.52)
eb	$a \curlyvee \bar{a}$	(3.53)
eb	$a \geq \bar{\bar{a}}$	(3.54)
	$\neg \exists x(x \geq a \wedge x \geq \bar{a})$	(3.55)
eb	$a \geq b \rightarrow a \curlyvee \bar{b}$	(3.56)
eb	$a \geq \bar{b} \leftrightarrow b \geq \bar{a}$	(3.57)
eb	$\neg a \geq \bar{b} \leftrightarrow \neg b \geq \bar{a}$	(3.58)
eb	$a \geq b \rightarrow \bar{b} \geq \bar{a}$	(3.59)
eb	$\neg \bar{a} \geq \bar{b} \rightarrow \neg b \geq a$	(3.60)
eb	$\bar{a} \geq \bar{b} \leftrightarrow \bar{\bar{b}} \geq \bar{\bar{a}}$	(3.61)

Beweis. (3.49) und (3.50) folgen syntaktisch aus der Definition. (3.51) gilt, weil alle mit a unvereinbaren Begriffe dessen Negation enthalten, und damit auch die in der Negation enthaltenen Begriffe. (3.52) sagt, dass ein Begriff, der mit allen vereinbar ist, keine Negation hat. Dies folgt aus der Definition, da sie mindestens einen unvereinbaren Begriff voraussetzt. (3.53) sagt, dass ein Begriff mit seiner Negation unvereinbar ist, was ebenfalls aus der Definition folgt. (3.54) ist der oben demonstrierte Fall, dass ein Begriff seine doppelte Negation enthält. Dies folgt aus der einfachen Überlegung, dass die Negation eines Begriffes mit mehreren anderen Begriffen unvereinbar sein kann, und daher nur die Enthält-Relation rechtfertigt und nicht die Identität. (3.55) ist in gewisser Weise eine alternative Formulierung zu (3.53), denn zwei unvereinbare Begriffe können nicht in einem dritten enthalten sein. (3.56) sagt, dass ein Begriff, der einen anderen enthält, mit dessen Negation unvereinbar ist, denn der Begriff b wäre sonst mit seiner Negation vereinbar.

Die vier letzten Theoreme sind begriffliche Kontrapositionen. (3.57) sagt, wenn ein Begriff die Negation eines anderen enthält, dieser wiederum die Negation des ersten Begriffes enthält. Dies folgt leicht aus der Unvereinbarkeit des Negates mit dem unnegierten Begriff. (3.58) folgt mit der (aussagenlogischen) Kontraposition aus (3.57). Sie beide werden wegen der Negation nur eines Begriffes partiale Kontrapositionen genannt; (3.59) und (3.60) mit beiden Begriffen negiert heißen dagegen totale Kontrapositionen. Zu (3.59): Aus $a \geq b$ erhält man mit (3.56) $\bar{b} \curlyvee a$, und daraus mit (3.50) $\bar{b} \geq \bar{a}$. Damit ist die eine

Richtung bewiesen; die Umkehrung folgt deshalb nicht, weil in diesem Fall mit (3.50) nur die doppelte Negation folgt: $a \geq \bar{\bar{b}}$. Lediglich für negierte Begriffe gilt die Kontraposition, (3.61), in beide Richtungen. Der Beweis folgt wie (3.59). (3.60) ist wiederum die aussagenlogische Kontraposition von (3.59). □

Aus dem Beweis des Theorems (3.59) folgt auch, dass bei der Negation drei Begriffe unterschieden werden können: der unnegierte, der einfach negierte und der doppelt negierte. Jede weitere Negation ist mit einem dieser Begriffe identisch.

In Zusammenhang mit Produkt und Summe lassen sich nur diese beiden Regeln analog zu den Gesetzen von de Morgan beweisen.

eb $$\bar{a} \odot \bar{b} \geq \overline{a \oplus b} \tag{3.62}$$

eb $$\overline{a \odot b} = \bar{a} \oplus \bar{b} \tag{3.63}$$

Beweis. (3.62). Die Summe der unnegierten Begriffe, $a \oplus b$, enthält jeden ihrer Summanden, a und b. Aus (3.59) folgt dann, dass die negierten Summanden jeweils die Negation ihrer Summe enthalten, $\bar{a} \geq \overline{a \oplus b}$. Aus (3.24) folgt schließlich $\bar{a}\bar{b} \geq \overline{a \oplus b}$. Die umgekehrte Richtung gilt nicht, weil $a \oplus b$ weitere Begriffe enthalten kann, die weder in a noch in b enthalten sind und deren Summe mit a oder b wiederum gleich $a \oplus b$ sein kann, wie Abbildung 3.3 zeigt.

Die eine Richtung von (3.63), $\overline{ab} \geq \bar{a} \oplus \bar{b}$, folgt so: Da jeder Faktor sein Produkt enthält, enthält das negierte Produkt wegen (3.59) seine negierten Faktoren, $\overline{ab} \geq \bar{a}$. Wenn ein Begriff zwei Begriffe enthält, enthält er nach (3.37) auch deren Summe, $\overline{ab} \geq \bar{a} \oplus \bar{b}$.

Die andere Richtung, $\bar{a} \oplus \bar{b} \geq \overline{ab}$, zu beweisen ist komplexer. Die einzelnen Schritte sind:

1. $ab \geq \bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}$	(3.54) und (3.24)
2. $\overline{\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}} \geq \overline{ab}$	1. und Kontraposition (3.59)
3. $\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} \geq \overline{\bar{a} \oplus \bar{b}}$	Einsetzung in (3.62)
4. $\bar{a} \oplus \bar{b} \geq \overline{\overline{\bar{a} \oplus \bar{b}}}$	Einsetzung in (3.54)
5. $\overline{\overline{\bar{a} \oplus \bar{b}}} \geq \overline{\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}}$	4., Kontraposition (3.59) von 3. und Transitivität
6. $\bar{a} \oplus \bar{b} \geq \overline{\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}}$	4., 5. und Transitivität
7. $\bar{a} \oplus \bar{b} \geq \overline{ab}$	6., 2. und Transitivität

Damit ist die Identität von $\overline{ab}$ und $\bar{a} \oplus \bar{b}$ bewiesen. □

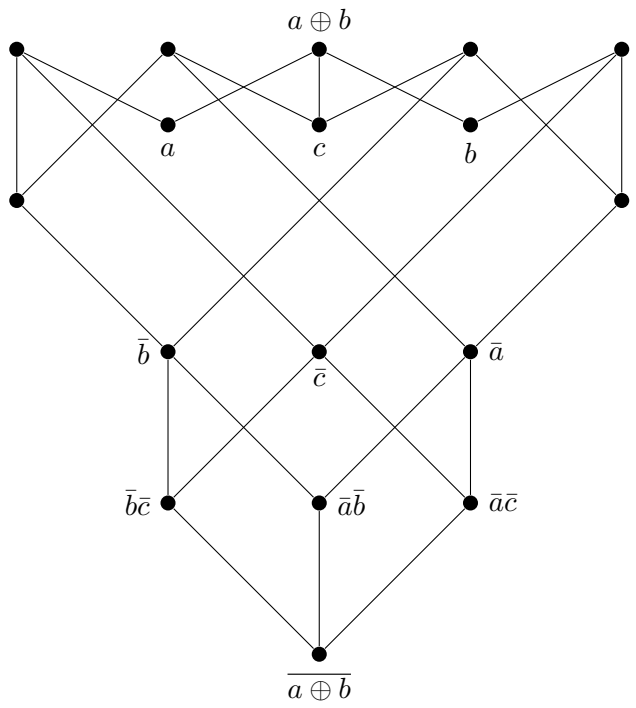


Abbildung 3.3.: Diagramm zu (3.62), Erläuterung s. Beweis.

Quotient

In der Praxis wird häufig eine Abwandlung der Negation angewandt. Da die Existenzbedingung häufig dazu führt, dass kein negierter Begriff existiert, ist man gezwungen einen weniger restriktiven Operator anzuwenden. Oft möchte man einen Gegensatz zu einem Begriff haben, der aber bestimmte Merkmale aufweist. So wenn man sagt, „Ich möchte keinen Käsekuchen“, man schon einen Kuchen möchte, aber eben keinen Käsekuchen. Extensional betrachtet, würde z. B. auch ein Handtuch der Forderung genügen.

$$c = a \oslash b =_{\text{def}} \forall x(x \geq c \leftrightarrow x \geq a \wedge x \curlyvee b) \tag{3.64}$$

und dies ist äquivalent zu einer Formel, die intuitiv näher an der Beschreibung liegt, nämlich

$$a \oslash b = a \oplus \bar{b} \tag{3.65}$$

Der im Beispielsatz zum Ausdruck gebrachte Begriff wäre also die Summe aus den Begriffen Kuchen und der Negation von Käsekuchen. Natürlich ist auch hier

Eindeutigkeit gefordert. Aber es sollte möglich sein, einen beliebigen Begriff mit Hilfe dieses Operators anzugeben. Es sei denn, der Begriff b ist nicht negierbar und die Summe existiert nicht.

Der Quotient hat aufgrund von (3.65) sowohl die Existenzbedingungen der Summe als auch die der Negation. Es folgen einige Theoreme.

eb $$a \oslash b \geq a \tag{3.66}$$

eb $$a \oslash b \curlyvee b \tag{3.67}$$

eb $$a \odot (a \oslash b) = a \tag{3.68}$$

eb $$(a \oslash b) \oslash c = a \oslash (b \oslash c) \tag{3.69}$$

eb $$(a \oslash c) \oplus (b \oslash d) \geq (a \oplus b) \oslash (c \oplus d) \tag{3.70}$$

eb $$(a \oslash b) \oplus (a \oslash c) \geq a \oslash (b \oplus c) \tag{3.71}$$

eb $$a \curlyvee b \leftrightarrow a = a \oslash b \leftrightarrow b = b \oslash a \tag{3.72}$$

eb $$a \geq b \wedge c \geq d \rightarrow a \oslash d \geq b \oslash c \tag{3.73}$$

eb $$a \geq b \rightarrow c \oslash b \geq c \oslash a \tag{3.74}$$

Beweis. (3.66) und (3.67) folgen direkt aus der Definition von $\oslash$. (3.68) folgt aus den Theoremen von Produkt, Summe und (3.65). (3.69), das Assoziativgesetz gilt ebenfalls aufgrund von (3.65).

Der linke Operand von (3.70), gemäß (3.65) umformuliert, ergibt $(a \oplus \bar{c}) \oplus (b \oplus \bar{d})$. Nach dem Kommutativgesetz für die Summe (3.33) und (3.69) erhält man $a \oplus b \oplus \bar{c} \oplus \bar{d}$. Wegen $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{ab}$ (3.63) schließlich $(a \oplus b) \oslash (cd)$. Es reicht nun zu zeigen, dass $\overline{cd} \geq \overline{c \oplus d}$ gilt. Da $\overline{cd} = \bar{c} \oplus \bar{d}$, und eine Summe jeden ihrer Summanden enthält, folgt mit Kontraposition (3.59) $\bar{c} \geq \overline{c \oplus d}$. Und schließlich mit (3.37) $\bar{c} \oplus \bar{d} \geq \overline{c \oplus d}$.

(3.71) ist ein Spezialfall von (3.70). (3.72) sagt, dass der Quotient gleich dem Dividend ist, falls dieser mit dem Divisor unvereinbar ist. Dies folgt aus der Negation selbst und der Summe, denn a muss in diesem Fall $\bar{b}$ enthalten. (3.73) folgt aus der Transitivität der Enthält-Relation, und (3.74) ist ein Spezialfall davon. □

3.2.2. Besondere Begriffe

Je nach ihrer Position im System haben Begriffe besondere formale Eigenschaften. Ein Begriff, der in allen anderen Begriffen eines Systems enthalten ist, wird der generelle Begriff genannt. In einem System mit einem generellen Begriff sind alle Begriffe miteinander vergleichbar. Inhaltlich ist der generelle Begriff nicht von großer Bedeutung, er ist das Merkmal für die Domäne des Begriffssystems. In einem Begriffssystem der Botanik z. B. könnte das der Begriff *Pflanze* sein

(wenn man die Pilze nicht mit einbezieht). Der generelle Begriff ist undefiniert, und enthält selbst keine Begriffe. Wenn es einen generellen Begriff gibt, dann ist er eindeutig. Gibt es mehrere Begriffe, die keine Begriffe enthalten, so sind sie die inhaltlich kleinsten Begriffe des Systems. Sie sind die undefinierten Begriffe des Systems, sozusagen seine elementaren Bausteine. In der Ordnungstheorie entspricht der generelle Begriff dem 0-Element und die undefinierten Begriffe den minimalen Elementen. Für ein System mit einem generellen Begriff G gilt:

$$a = G =_{\text{def}} \forall x(x \geq a) \wedge a \geq y \rightarrow a = y \tag{3.75}$$

Und die Existenzbedingung lautet:

$$\exists x \forall y(y \geq x) \tag{3.76}$$

Die undefinierten, minimalen Begriffe werden durch ein hochgestelltes negiertes „D“ gekennzeichnet. Ihre Definition lautet:

$$a^{\bar{D}} =_{\text{def}} \forall x(a \geq x \rightarrow x \geq a) \tag{3.77}$$

Undefinierte Begriffe enthalten also nur sich selbst. Dennoch unterscheiden sie sich vom leeren Begriff. Der leere Begriff ist singulär. Die minimalen Begriffe kommen im Gegensatz zum leeren Begriff auch nicht jedem Gegenstand zu. Der generelle Begriff ist eindeutig immer mit Bezug auf ein konkretes Begriffssystem, der leere Begriff dagegen ist in jedem System derselbe. Formal ließe sich der leere Begriff nur von den undefinierten unterscheiden, wenn er das Axiom der Reflexivität (2.1) verletzte. Das wäre dann allerdings eher ein formaler Fehler als ein Widerspruch. Es ist also durchaus angebracht, ihn per Definition zu den Widersprüchen zu zählen.

Auch eine Existenzbedingung ist zu berücksichtigen. In einem endlichen Begriffssystem sind undefinierte Begriffe zwar nicht existentiell belastet, man kann aber nicht allgemein ausschließen, dass es ein unendliches Begriffssystem gibt. Es muss daher gelten:

$$\forall x \exists y(x \geq y \wedge \forall z(y \geq z \rightarrow z \geq y)) \tag{3.78}$$

Hier die zentralen Theoreme zum generellen Begriff G ohne Beweis:

$$G \mathsf{H} a \tag{3.79}$$

$$G \curlywedge a \tag{3.80}$$

eb $$a \odot G = G \tag{3.81}$$

eb $$a \oplus G = a \tag{3.82}$$

$$G \geq a \rightarrow a = G \tag{3.83}$$

Der zum generellen Begriff duale enthält alle Begriffe des Begriffssystems. In der Praxis kommt dies kaum vor, weil dann alle Begriffe vereinbar sein müssten, und es keine Negate geben könnte. Es ist eher so, dass ein solcher Begriff immer ein Widerspruch ist. Ordnungstheoretisch ist er das 1-Element.

Eine eigene Klasse von Begriffen sind solche, die in keinem anderen Begriff enthalten sind. Sie heißen die speziellen Begriffe des Systems. Sie sind die inhaltlich größten Begriffe. Unter ihnen werden noch diejenigen Begriffe als Individualbegriffe ausgesondert, die genau für ein einziges Individuum gelten. Für die Begriffstheoreme muss das aber nicht berücksichtigt werden, solange die Anwendung (s. u.) nicht in Betracht gezogen wird. Ordnungstheoretisch gibt es keinen Unterschied zwischen speziellen und individuellen Begriffen, sie entsprechen zusammengenommen den maximalen Elementen der Ordnungstheorie. Spezielle Begriffe werden durch ein hochgestelltes „S“ und Individualbegriffe durch ein hochgestelltes „I“ gekennzeichnet und so definiert:

$$a^S =_{\text{def}} \forall x(x \geq a \rightarrow a \geq x) \tag{3.84}$$

$$a^I =_{\text{def}} \forall x(x \geq a \rightarrow a \geq x) \tag{3.85}$$

Auch bei diesen Begriffen ist eine explizite Existenzbedingung notwendig, wenn unendliche Begriffssysteme in Betracht gezogen werden:

$$\forall x \exists y(y \geq x \wedge \forall z(z \geq y \rightarrow y \geq z)) \tag{3.86}$$

Hier die wichtigsten Theoreme zu den speziellen Begriffen:

$$a^S \leftrightarrow \forall x(x \geq a \rightarrow a \geq x) \tag{3.87}$$

$$a^S \rightarrow (b \geq a \leftrightarrow b = a) \tag{3.88}$$

$$a^S \rightarrow (a \curlywedge b \leftrightarrow a \geq b) \tag{3.89}$$

eb $$a^S \rightarrow (a \geq b \vee a \geq \bar{b}) \tag{3.90}$$

eb $$a^S \rightarrow (\neg a \geq b \leftrightarrow a \geq \bar{b}) \tag{3.91}$$

eb $$a^S \wedge b^S \wedge a \curlywedge b \rightarrow a = b \tag{3.92}$$

eb $$a^S \rightarrow (a \curlywedge b \leftrightarrow ab = b) \tag{3.93}$$

eb $$a^S \rightarrow (a \curlywedge b \leftrightarrow a \oplus b = a) \tag{3.94}$$

Beweis. Die ersten beiden, (3.87) und (3.88), folgen aus der Definition. Wenn ein spezieller Begriff mit einem anderen vereinbar ist, dann enthält er diesen (3.89), weil ein spezieller Begriff maximal ist. Ein spezieller Begriff enthält einen anderen oder aber dessen Negation (3.90). Wenn er mit einem Begriff vereinbar ist, dann enthält er diesen. Wenn er mit ihm unvereinbar ist, dann enthält

er wegen (3.50) dessen Negation. Daraus folgt dann (3.91). (3.92) sagt, dass zwei spezielle Begriffe nicht vereinbar sein können. Dies folgt aus der Definition. (3.93) sagt, dass ein Produkt zwischen einem speziellen Begriff und einem beliebigen anderen immer gleich dem anderen Begriff ist. Dies folgt aus der Definition und (3.19). Dual dazu folgt (3.94) über Summe zwischen speziellem und einem anderen Begriff. □

Kauppi ([Kau67], S. 64) ist der Meinung, dass die speziellen Begriffe eine weitere Eigenschaft haben. Dabei soll ein spezieller Begriff, der das Produkt zweier Begriffe enthält, mindestens einen dieser Begriffe enthalten:

$$a^S \rightarrow (a \geq bc \leftrightarrow a \geq b \vee a \geq c) \tag{3.95}$$

Das lässt sich jedoch nicht beweisen, denn a kann durchaus bc enthalten, ohne weder b noch c zu enthalten, wie man leicht am Diagramm 3.4 überprüfen kann. Es lässt sich mit (3.93) nur die schwächere Behauptung beweisen:

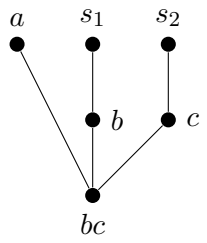


Abbildung 3.4.: Gegenbeispiel zu (3.95).

$$a^S \wedge ab = b \rightarrow a \geq b \tag{3.96}$$

3.2.3. Anwendung

Nach der Besprechung der besonderen Begriffe und ihrer Eigenschaften ist es hilfreich die Anwendung der Begriffe auf die Gegenstände, also den Zusammenhang zwischen Intension und Extension, in Augenschein zu nehmen. Begriffe haben einen Zweck, sie werden auf etwas angewendet, oder, wie man auch sagt, sie werden von etwas ausgesagt. Im Satz „Sokrates ist ein Mensch“ wird der Begriff *Mensch* auf Sokrates angewendet oder von ihm ausgesagt. Man kann einen Begriff richtig oder falsch gebrauchen. Im Satz „Trier ist ein Mensch“ ist der Gebrauch des Begriffes *Mensch* falsch. Die Beziehung zwischen Begriff und

Gegenstand ist eine eigene Relation, die nicht rein logisch begründet werden kann. Diese Beziehung wird die Zukommen-Relation genannt.

$$a\,\mathrm{Z}\,i \qquad \text{wobei } a \text{ ein Begriff und } i \text{ ein Gegenstand ist} \tag{3.97}$$

Man sagt, ein Begriff a kommt einem Gegenstand i zu. Vor- und Nachbereich dieser Relation haben keine gemeinsamen Elemente. Auch wenn es möglich ist, dass Begriffe wiederum auf Begriffe angewendet werden, wie z. B. der Begriff *Gattung* auf Gattungsbegriffe wie *Blume*, so wird in diesem Fall der Begriff als Gegenstand betrachtet über den etwas ausgesagt wird wie in „Blume ist ein Gattungsbegriff“ im Gegensatz zu „Die Blume ist eine Pflanze“. Daher muss diese Relation irreflexiv und intransitiv sein:

$$\neg\,\exists xy(x\,\mathrm{Z}\,y \,\wedge\, y\,\mathrm{Z}\,x) \tag{3.98}$$

$$\neg\,\exists xyz(x\,\mathrm{Z}\,y \,\wedge\, y\,\mathrm{Z}\,z \,\rightarrow\, x\,\mathrm{Z}\,z) \tag{3.99}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Inhalt eines Begriffes und den Gegenständen, denen er zukommt, ist zwar letztlich eine Sache der Festsetzung, *ad placitum*, aber diese Festsetzungen haben Konsequenzen. Die Verknüpfung zwischen Enthält- und Zukommen-Relation ist derart, dass ein Begriff, der in einem anderen enthalten ist, zwingend einem Gegenstand zukommen muss, wenn der Begriff in dem er enthalten ist, diesem zukommt. Das wird in folgendem Axiom festgehalten:

Ax. Z1
$$a \geq b \,\rightarrow\, \forall i(a\,\mathrm{Z}\,i \,\rightarrow\, b\,\mathrm{Z}\,i) \tag{3.100}$$

Ist die Zukommen-Relation für ein Begriffssystem bestimmt, kann der Zusammenhang zwischen der Intension und Extension mit Hilfe der mengentheoretischen Notation formuliert werden. Für jeden Begriff muss daher folgendes entscheidbar sein

Ax. Z2
$$\forall ai(a\,\mathrm{Z}\,i \,\vee\, \neg\,a\,\mathrm{Z}\,i) \tag{3.101}$$

Die Zuordnung zwischen einem Begriff und der Klasse von Gegenständen, denen er zukommen kann, wird so eingeführt

$$\mathcal{K}(a) = A =_{\mathrm{def}} \forall i(i \in A \,\leftrightarrow\, a\,\mathrm{Z}\,i) \tag{3.102}$$

Man sagt: A ist der Umfang des Begriffes a oder A ist die Extension von a. Die Begriffe, die a enthält, sind die Intension. Hier wird implizit die Existenz

einer Allklasse, $\mathcal{V}$, vorausgesetzt. Daraus ergeben sich folgende Theoreme

$$\mathcal{K}(a) = A \leftrightarrow \forall i(i \in A \leftrightarrow a\,\mathrm{Z}\,i) \tag{3.103}$$

$$i \in \mathcal{K}(a) \leftrightarrow a\,\mathrm{Z}\,i \tag{3.104}$$

$$a \geq b \rightarrow \mathcal{K}(a) \subset \mathcal{K}(b) \tag{3.105}$$

$$a = b \rightarrow \mathcal{K}(a) \equiv \mathcal{K}(b) \tag{3.106}$$

Beweis. (3.103) und (3.104) folgen aus der Definition der Zukommen-Relation. (3.105) und (3.106) folgen aus dem Axiom (3.100) und der Teilmengenbeziehung. □

Interessant ist auch, welche Sätze keine Theoreme sind:

$$\mathcal{K}(ab) \equiv \mathcal{K}(a) \cup \mathcal{K}(b) \tag{3.107}$$

$$\mathcal{K}(a \oplus b) \equiv \mathcal{K}(a) \cap \mathcal{K}(b) \tag{3.108}$$

Beweis. Der Gegenbeweis ist ganz einfach. Die Gleichheit der Umfänge folgt nicht, wenn bei (3.107) ein dritter Begriff das Produkt enthält, $c > ab$ ($ab = abc$), und bei (3.108) die Summe einen dritten Begriff enthält, $a \oplus b > c$ ($a \oplus b = a \oplus b \oplus c$). □

Abbildung 3.5 veranschaulicht den Zusammenhang für (3.107). Dort ist die Extension eines Begriffes als Kreisfläche dargestellt. Es gelten also allgemein nur die schwächeren Theoreme:

$$\mathcal{K}(a) \cup \mathcal{K}(b) \subset \mathcal{K}(ab) \tag{3.109}$$

$$\mathcal{K}(a \oplus b) \subset \mathcal{K}(a) \cap \mathcal{K}(b) \tag{3.110}$$

Die Äquivalenz zwischen dem Produkt bzw. der Summe und der Vereinigung bzw. dem Schnitt der Klassen muss so formuliert werden.

$$\neg\,\exists c(ab = abc) \rightarrow (\mathcal{K}(ab) \equiv \mathcal{K}(a) \cup \mathcal{K}(b)) \tag{3.111}$$

$$\neg\,\exists c(a \oplus b = a \oplus b \oplus c) \rightarrow (\mathcal{K}(a \oplus b) \equiv \mathcal{K}(a) \cap \mathcal{K}(b)) \tag{3.112}$$

Die Beweise für (3.111), (3.112), (3.109) und (3.110) folgen direkt aus denen zu (3.107) und (3.108).

Im Allgemeinen sind Begriffe ohne Umfang, also leere Begriffe, nicht wünschenswert, denn sie sind dann extensional von Widersprüchen nicht zu unterscheiden. Das kann ausgeschlossen werden, indem jedem Gegenstand des Universums ein spezieller Begriff zukommt.

Ax. Z3 $$\forall xy(x^S \wedge x\,\mathrm{Z}\,y) \tag{3.113}$$

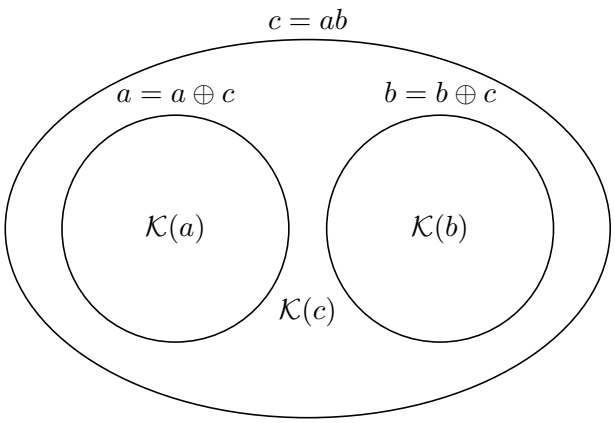


Abbildung 3.5.: Illustration von $\mathcal{K}(a) \cup \mathcal{K}(b) \subset \mathcal{K}(ab)$.[a]

[a] Wobei $a = a \oplus c$ äquivalent zu $a \geq c$ ist.

Aus (3.100) und (3.113) folgt, dass es im betreffenden System keine leeren Begriffe gibt. Es fehlt noch ein Axiom, um Intension und Extension so zu verbinden, dass es Widersprüche entsprechend der Erwartungen widerspiegelt: Unvereinbarkeit auf der einen Seite und leere Klasse auf der anderen. Ausgehend von der Unvereinbarkeit wurde die Negation definiert. Mit den bisher aufgestellten Axiomen lässt sich jedoch nicht ausschließen, dass unvereinbare Begriffe gleichen Gegenständen zukommen. Es ist deshalb ein weiteres Axiom nötig:

Ax. Z4
$$\forall ab(a \curlyvee b \rightarrow \neg \exists i(a \,\mathrm{Z}\, i \wedge b \,\mathrm{Z}\, i)) \tag{3.114}$$

Erst mit diesem Axiom folgt der wichtige Satz, der die Unvereinbarkeit als Grundlage des Widerspruchs und die leere Klasse in Beziehung setzt.

$$a \curlyvee b \rightarrow \mathcal{K}(a) \cap \mathcal{K}(b) = \emptyset \tag{3.115}$$

Kauppi ([Kau67], S. 93) ist der Meinung, dass dieser Satz ohne das Axiom (3.114) beweisbar sein müsse. Aber das ist überraschender Weise nicht möglich. In einem Begriffssystem kommt bei der Verbindung mit der Extension den unvereinbaren Begriffen im Allgemeinen und den speziellen Begriffen im Besonderen eine zentrale Rolle zu.

Zum Abschluss, die Zusammenhänge zur Extension bei einem Begriff und

seinen Negaten:

$$\mathcal{K}(\bar{a}) \subset -\mathcal{K}(a) \tag{3.116}$$

$$\mathcal{K}(\bar{a}) \subset -\mathcal{K}(\bar{\bar{a}}) \tag{3.117}$$

$$\mathcal{K}(a) \subset \mathcal{K}(\bar{\bar{a}}) \tag{3.118}$$

Hier können die Teilmengenbeziehungen nur dann durch die Identität ersetzt werden, wenn die Begriffe auf der rechten Seite keine weiteren Merkmale enthalten. So wären die Umfänge von $\bar{s}$ und s in Abbildung 3.2 gleich, da $q = \bar{s}$ keine weiteren Begriffe enthält.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Verbindung zwischen der Intension und der Extension aus logischer Sicht, d. h. im Hinblick auf eine Modellierung von widerspruchsfreien Begriffssystemen, sehr starke Voraussetzungen benötigt. Insbesondere das Axiom (3.113), dass jedem Gegenstand ein spezieller Begriff zukommen muss, führt zu Konsequenzen, die man so nicht erwarten würde. Betrachtet man das Beispiel in Abbildung 3.2 bedeutet das, dass a, c und r alle die gleichen Umfänge haben. Da diese Begriffe nur in einem einzigen speziellen Begriff enthalten sind, können sie keinen weiteren Individuen zukommen als jenen denen s zukommt. Noch extremer würde dieses Ergebnis ausfallen, wenn die speziellen Begriffe individuelle wären, denn diese kommen per Definition nur einem Gegenstand zu. Die Allgemeinbegriffe, die letztlich die Merkmale dieser Begriffe sind, hätten als Umfang nur genau die Individuen dieser Begriffe und keine anderen. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass es keine rein logische Aufgabe sein kann, ein Begriffssystem aufzubauen, welches auch in der Anwendung brauchbar ist. Es ist auch eine Überlegung wert, ob alle Axiome berücksichtigt werden sollen. Man muss jedoch die Konsequenzen beachten, gerade im Hinblick auf die Widersprüche, und ganz besonders auch auf die Negation.

3.2.4. Relationsbegriffe

Bis hierher wurde nur die Enthält-Relation besprochen. Sie gilt für alle Begriffe unabhängig von ihrer Stellenzahl. So stehen die einstelligen Begriffe *Mensch* und *Lebewesen* in der Enthält-Relation ebenso wie die dreistelligen *Schenken* und *Geben*. In Begriffssystemen spielen die einstelligen Begriffe eine zentrale Rolle. Erstens sind sie es, die letztlich Gegenständen zukommen, und zweitens sind sie die Grundlage der höherstelligen Begriffe. Denn jeder höherstellige Begriff wird wiederum letztlich auf seinen einzelnen Stellen durch einen einstelligen Begriff bestimmt. Die Bedeutung der höherstelligen Begriffe liegt in ihrer Fähigkeit die vertikale Struktur der Enthält-Relation zu durchbrechen und Begriffe ohne

Rücksicht auf die Enthält-Relation in Beziehung zu setzen. So können auf diese Weise Begriffe in Beziehung gesetzt werden, die gegensätzlich, isoliert und sogar widersprüchlich sind. Die rein intensionale Struktur der Begriffe wird daher ergänzt durch eine weitere relationale Struktur. Diese Verbindung von Begriffen in höherstelligen Begriffssystemen nennt man *R-logisch*.

Die Stellenzahl n eines Begriffes r wird durch eine Zahl unterhalb der Variablen oder Konstanten gekennzeichnet: $\underset{n}{r}$. Wenn aus dem Kontext die Stelligkeit ersichtlich ist, oder sie keine Rolle spielt, wie bei den allgemeinen Gesetzen über die Enthält-Relation, dann wird die Zahl weggelassen. Ein n-stelliger Begriff ist über die Enthält-Relation Teil eines intensionalen Systems von n-stelligen Begriffen.[6] Solch ein System wird durch einen Großbuchstaben gekennzeichnet: $\underset{n}{R}$. Mit einem Begriffssystem $\underset{n}{R}$ sind zwangsläufig auch die niedrigerstelligen Begriffssysteme involviert, denn das System der dreistelligen Begriffssysteme beinhaltet auch die zwei- und einstelligen Begriffe. Man zieht also meist alle Systeme $\underset{k}{R}$ mit $n \geq k \geq 1$ in Betracht. Ein Begriffssystem $\underset{n}{R}$ und alle mit ihm R-logisch verbundenen Systeme werden durch $(\underset{n}{R})$ gekennzeichnet.

Ein n-stelliger Begriff wird in der Anwendung einem geordneten n-Tupel von Individuen beigelegt, wobei jede einzelne Stelle letztlich durch einen einstelligen Begriff bestimmt ist. In der Anwendung heißt das, dass ein mehrstelliger Begriff auf ein geordnetes Tupel von Individuen anwendbar ist, wenn jeder seiner einstelligen Begriffe auf ein Individuum anwendbar ist, so wie im Kapitel 3.2.3 beschrieben. Die Zukommen-Relation wird auf diese Weise erweitert, wobei ein Index am Begriff die Stelle des Begriffes bezeichnet:

$$\underset{n}{r}\,\mathrm{Z} < i_1, i_2, \ldots, i_n > \qquad \text{mit } r_1\,\mathrm{Z}\,i_1\ r_2\,\mathrm{Z}\,i_2\ \ldots\ r_n\,\mathrm{Z}\,i_n \tag{3.119}$$

Drei Aspekte sind bei einem höherstelligen Begriff von Interesse. Erstens: Wie sind die einzelnen Stellen durch Begriffe bestimmt? Das ist die Definition dieses Begriffes. Z. B. ist der zweistellige Begriff *Vater* auf der ersten Stelle durch den Begriff *männlich* bestimmt. Zweitens: Wie ist er auf den einzelnen Stellen beschränkt? Das geschieht bei der konkreten Verwendung des Begriffes, in der er zusätzlich zu seiner Bestimmung weiter eingeschränkt wird. Z. B., wenn der dreistellige Begriff *Geben*, jemand gibt jemand anderem etwas, auf der dritten Stelle durch den Begriff *Buch* beschränkt wird. Drittens: Aus welchen

[6] Im Resource Description Framework (RDF) des Semantic Web werden die mehrstelligen Relationen als eigene Klassen eingeführt und die konkreten Relationen dann als Instanz dieser Klasse (Vgl. [NR06]). Da RDF auf Tripeln von Subjekt, Prädikat, Objekt basiert, muss es über diesen Kunstgriff höherstellige Relationen nachbilden.

Teil- oder Unterrelationen besteht der Begriff?[7] Höherstellige Begriffe bestehen in der Regel nicht unmittelbar aus den einstelligen Begriffen, wie z. B. der vierstellige Verwandtschaftsbegriff *Onkel*, als „Bruder eines Elternteils“, sich aus den Begriffen *Bruder* und *Eltern* zusammensetzt.

Im Folgenden werden die nötigen Operatoren und deren Definitionen vorgestellt, anschließend die R-logischen Theoreme. Der Operator der Bestimmung ist:

$$\underset{n}{r} \diagup^{\overset{a_1}{1}\overset{a_2}{2}\ldots\overset{a_n}{n}} \tag{3.120}$$

Kurzform $\underset{n}{r} \diagup^{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Und wird gelesen als „Der Begriff r ist auf der Stelle 1 durch a_1 bestimmt, auf der Stelle 2 durch a_2 usw.“. Analog dazu die Beschränkung

$$\underset{n}{r} \nearrow^{\overset{a_1}{1}\overset{a_2}{2}\ldots\overset{a_n}{n}} \tag{3.121}$$

Kurzform $\underset{n}{r} \nearrow^{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Eine Unterrelation wird angegeben durch Indizes der Stellen an der Relation:

$$\underset{n}{r_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \qquad \text{wobei } i_j \text{ eine Stellenzahl ist mit } j = 1 \leq k \leq n \tag{3.122}$$

Als ihr Operator, der bestimmte Stellen auswählt, wird eingeführt:

$$\diagup^{\cup}{}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \underset{n}{r} = \underset{n}{r_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \tag{3.123}$$

Mit ϕ_k sei eine Folge von Stellenzahlen von Begriffen bezeichnet, dann kann die Unterrelation vereinfacht formuliert werden. Spielt die konkrete Anzahl der Stellen keine Rolle, dann kann auch der Index k weggelassen werden:

$$\diagup^{\cup}{}_{\phi} r = \underset{\phi}{r} \tag{3.124}$$

Mit diesen Operatoren werden nun einige Axiome als Basis für die Gesetze der Relationsbegriffe formuliert.

Eine bestimmte Stelle des Begriffes ist identisch mit dem bestimmenden oder beschränkenden Begriff

Ax. $$\wr^{k}\, r \wr^{\overset{a}{k}} = a \qquad \wr \in \{\diagup, \nearrow\} \tag{3.125}$$

[7] Um eine Verwechslung mit der Teil-Ganzes-Relation zu vermeiden, ist der Ausdruck *Unterrelation* zu bevorzugen.

Das wird gelesen als „Die Bestimmung bzw. Beschränkung des Begriffes r an der k-ten Stelle ist a“. Der nächste Satz ist das zentrale Axiom der R-logischen Beziehung. Er formuliert den Zusammenhang mit der Enthält-Relation. Wenn eine Relation eine andere enthält, dann gilt dies auch für jeden beliebigen Teilbereich der Relation:

Ax. $$r \geq s \rightarrow \wr^k r \geq \wr^k s \qquad \wr \in \{ /, \nearrow , /^{\cup} \} \tag{3.126}$$

Das nächste Axiom ist problematisch:

~~Ax.~~ $$/^k r \, /^{\overset{a}{k}} \nearrow^{\overset{b}{k}} = a \oplus b \tag{3.127}$$

Kauppi hat dieses in den Addenda et Corrigenda zu „Einführung in die Theorie der Begriffssysteme“ explizit verworfen, um eine Vermischung von Beschränkung und Bestimmung zu vermeiden. Es wird durch dieses ersetzt:

Ax. $$/^k r \geq a \rightarrow r \nearrow^{\overset{a}{k}} = r \tag{3.128}$$

Formal sind Bestimmung und Beschränkung jedoch identisch. Das für ungültig erklärte Axiom ist ein gültiges Theorem. Mehrfache Beschränkung auf derselben Stelle ist identisch mit der Beschränkung durch die Summe der Begriffe:

Ax. $$r \nearrow^{\overset{a}{k}\overset{b}{k}} = r \nearrow^{\overset{a \oplus b}{k}} \tag{3.129}$$

Für die Bestimmung ist dies nicht vorgesehen, da die Bestimmung der Stellen in der Definition erfolgen. Wenn zwei Begriffe in der Enthält-Relation zueinander stehen und einen Begriff beschränken, so stehen die ansonsten identischen und verschieden beschränkten Begriffe ebenfalls in der Enthält-Relation:

Ax. $$p \geq q \rightarrow r \nearrow^{\overset{p}{\phi}} \geq r \nearrow^{\overset{q}{\phi}} \tag{3.130}$$

Daraus folgt als Spezialfall dieses Theorem:

$$r \nearrow^{\overset{s}{\phi}} \geq r \tag{3.131}$$

Die Unterrelation eines beschränkten Bereiches ist gleich der Summe der Beschränkung und des Bereiches:

Ax. $$\underset{\phi}{/^{\cup}} r \nearrow^{\overset{s}{\phi}} = s \oplus \underset{\phi}{/^{\cup}} r \tag{3.132}$$

Enthält die Unterrelation eines Begriffes r einen anderen Begriff s, dann ist r beschränkt auf s mit r identisch:

Ax. $$\underset{\phi}{/^{u}} r \geq s \rightarrow r \overset{s}{\underset{\phi}{/}} = r \tag{3.133}$$

Es folgen die Identitätsgesetze des Relationenkalküls, die hier nicht explizit bewiesen werden. Sie folgen in den meisten Fällen direkt aus der Enthält-Relation, den jeweiligen Operatorregeln (3.125), (3.123) und dem zentralen Axiom (3.126).

$$r \geq s \wedge p \geq q \rightarrow r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} \geq s \overset{q}{\underset{\phi}{/}} \tag{3.134}$$

$$\underset{n}{r} \geq \underset{n}{s} \leftrightarrow \underset{\underset{n}{\phi}}{/^{u}} r \geq \underset{\underset{n}{\phi}}{/^{u}} s \tag{3.135}$$

$$r = s \leftrightarrow /^{k} r = /^{k} s \tag{3.136}$$

$$p = q \leftrightarrow r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} = r \overset{q}{\underset{\phi}{/}} \tag{3.137}$$

$$r = s \leftrightarrow r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} = s \overset{p}{\underset{\phi}{/}} \tag{3.138}$$

$$r = s \wedge p = q \rightarrow r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} = s \overset{q}{\underset{\phi}{/}} \tag{3.139}$$

$$r = s \rightarrow \underset{\phi}{/^{u}} r = \underset{\phi}{/^{u}} s \tag{3.140}$$

$$r \overset{r}{/_{12\ldots n}} = r \tag{3.141}$$

Vergleichbarkeit und Vereinbarkeit zweier relationaler Begriffe ergeben sich aus der Gegenüberstellung der einzelnen Stellen bzw. Bereiche ($\wr \in \{ /, \overset{}{/}, /^{u} \}$):

$$r \mathsf{H} s \rightarrow \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} r \mathsf{H} \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} s \tag{3.142}$$

$$\overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} r \mathsf{H} \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} s \rightarrow r \mathsf{H} s \tag{3.143}$$

$$r \curlywedge s \rightarrow \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} r \curlywedge \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} s \tag{3.144}$$

$$\overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} r \curlyvee \overset{k}{\underset{\phi}{\wr}} s \rightarrow r \curlyvee s \tag{3.145}$$

$$r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} \curlywedge s \overset{q}{\underset{\phi}{/}} \rightarrow p \curlywedge q \tag{3.146}$$

$$r \overset{p}{\underset{\phi}{/}} \curlywedge s \overset{q}{\underset{\phi}{/}} \rightarrow r \curlywedge s \tag{3.147}$$

Produkt:

$$\nearrow^k r \odot \nearrow^k s \geq \nearrow^k rs \tag{3.148}$$

$$\nearrow^{\overset{p}{\phi}} r \odot \nearrow^{\overset{q}{\phi}} s \geq \nearrow^{\overset{pq}{\phi}} rs \tag{3.149}$$

$$\nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, r \odot \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, s \geq \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, rs \tag{3.150}$$

$$\nearrow^{\mathrm{u}}_{n}\, \underset{n}{r} \odot \nearrow^{\mathrm{u}}_{n}\, \underset{n}{s} = \nearrow^{\mathrm{u}}_{n}\, \underset{n}{rs} \tag{3.151}$$

$$r \nearrow^{\overset{p}{\phi}} \odot s \nearrow^{\overset{q}{\phi}} \geq rs \nearrow^{\overset{pq}{\phi}} \tag{3.152}$$

Summe:

$$\nearrow^k (r \oplus s) \geq \nearrow^k r \oplus \nearrow^k s \tag{3.153}$$

$$\nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi} (r \oplus s) \geq \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, r \oplus \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, s \tag{3.154}$$

$$\nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi} (\underset{n}{r} \oplus \underset{n}{s}) = \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, \underset{n}{r} \oplus \nearrow^{\mathrm{u}}_{\phi}\, \underset{n}{s} \tag{3.155}$$

$$(r \oplus s) \nearrow^{\overset{p \oplus q}{\phi}} \geq r \nearrow^{\overset{p}{\phi}} \oplus s \nearrow^{\overset{q}{\phi}} \tag{3.156}$$

Negation:

$$\nearrow^k r \curlyvee \nearrow^k s \rightarrow r \geq \bar{s} \tag{3.157}$$

$$\nearrow^k r \curlyvee \nearrow^k s \rightarrow r \geq \bar{s} \tag{3.158}$$

$$r \curlyvee s \rightarrow r \nearrow^{\overset{p}{\phi}} \geq \overline{s \nearrow^{\overset{p}{\phi}}} \tag{3.159}$$

$$\bar{r} \geq \overline{r \nearrow^{\overset{p}{\phi}}} \tag{3.160}$$

Bei einem (algebraischen) Kalkül sind auch die Eigenschaften der Relationen von Interesse. Es geht um die Frage, wie Reflexivität, Symmetrie, Transitivität u. a. intensional definiert werden können. Rein intensional ist das kaum möglich, da ein Begriffssystem üblicherweise nicht für jedes Individuum einen Individualbegriff hat. Es ist daher eine zweistellige Prädikatskonstante notwendig, welche die Identität von Gegenständen bzw. von gleichen Bezügen von Zeichen feststellt: $\underset{2}{\mathrm{I}}$ oder einfach I.

Zuerst wird das relative Produkt zweistelliger Begriffe definiert

$$p = \underset{3}{r/s} =_{\mathrm{def}} p_{1\,2} = r \wedge p_{2\,3} = s \qquad \text{wobei } r_2 \curlywedge s_1 \tag{3.161}$$

$$r/s =_{\mathrm{def}} (\underset{3}{r/s})_{1\,3} \tag{3.162}$$

Potenzen des Produktes werden so eingeführt:

$$r^1 = r \qquad\qquad r^{n+1} = r^n / r \tag{3.163}$$

Die intensionale Reflexivität sieht dann so aus:

$$r_1 \geq (r \oplus \mathrm{I})_1 \wedge r_2 \geq (r \oplus \mathrm{I})_1 \tag{3.164}$$

Symmetrisch ist eine Relation, wenn sie ihre Inverse enthält:

$$r \geq r_{2\,1} \tag{3.165}$$

Asymmetrisch ist eine Relation, wenn sie mit ihrer Inverse unvereinbar ist:

$$r \curlyvee r_{2\,1} \tag{3.166}$$

Transitiv ist eine Relation, wenn sie in ihrer zweiten Potenz enthalten ist:

$$r^2 \geq r \tag{3.167}$$

Intransitiv ist eine Relation, wenn sie mit ihrer zweiten Potenz unvereinbar ist:

$$r \curlyvee r^2 \tag{3.168}$$

Atransitiv ist eine Relation, wenn ihre beiden Stellen unvereinbar sind:

$$r_1 \curlyvee r_2 \tag{3.169}$$

3.2.5. Erweiterung der Enthält-Relation

Die Begriffe haben im Allgemeinen eine Stelligkeit mit der sie letztlich über die Extension auf Individuen angewendet werden. Die mehrstelligen Begriffe können zusätzlich zu ihrer durch die Definition gegebenen Bestimmung im Kontext der Rede beschränkt werden. Dieses ist insofern auch hier von Interesse, da in Bedeutungsdefinitionen das Definiendum, wie im Beispiel der Definition von *Papier*, durch Beschränkung eines mehrstelligen Begriffes mit anderen Begriffen in Beziehung gebracht werden kann, zu denen das Definiendum nicht in einer Enthält- oder Enthalten-Relation steht. Die Ordnungsrelation kann nun auch auf den ganzen Komplex eines Begriffes samt seiner Beschränkung angewendet werden. Kauppi führt dazu die nullstellige Relation ein, den *Gedanken*.[8] Der Gedanke ist dadurch charakterisiert, dass er nicht auf Individuen angewendet

[8] Gedanke als rein logisches Gebilde im Sinne Freges als Sinn eines Satzes. Dem Gedanken haftet vor allem nichts Psychologisches an.

wird. Die Relation *Geben* wird durch die Behauptung, dass jemand jemand anderem etwas gibt, zum Gedanken. Die durch *Vater*, *Kind* und *Ball* beschränkte Relation *Geben* wird durch die Behauptung, dass ein Vater einem Kind einen Ball gibt, in diesem Sinne zum Gedanken. Symbolisch wird der Gedanke durch ein der Relation vorangestelltes „!“ ausgedrückt. Das Beispiel sieht formal so aus:

$$!\,\underset{3}{\text{Geben}}\,\overset{\text{Vater}}{\overset{1}{\nearrow}}\;\overset{\text{Kind}}{2}\;\overset{\text{Ball}}{3}$$

Das ist der Gedanke, dass ein Vater dem Kind einen Ball gibt.

Gewöhnliche Definitionen in Bedeutungswörterbüchern gehen über die Enthält-Relation hinaus und sind begriffslogisch eher in Form von Gedanken ausgedrückt. Es ist daher auch wünschenswert eine Ordnungsrelation auf der ganzen Definition, sprich dem ganzen Gedanken formulieren zu können.

Um diese Relation einführen zu können, ist ein Hilfsoperator nötig, der allein auf den bisher eingeführten Operatoren der Intension und R-logischen Operatoren beruht. Es sollen bei der Beziehung zwischen zwei Gedanken mehrere Bedingungen abgedeckt werden. Wenn ein Begriff einen anderen enthält, so soll dies entsprechend auch zwischen den Gedanken gelten

$$r \geq s \rightarrow\, !\,r \geq\, !\,s \tag{3.170}$$

Des Weiteren soll ein Gedanke einen anderen enthalten, wenn dieser eine Unterrelation jenes Begriffes ist. Und vervollständigend dazu: Auch wenn der Begriff des anderen Gedankens in einer Unterrelation des Begriffes des ersteren Gedankens enthalten ist.

$$s = \nearrow^{\text{u}} r \rightarrow\, !\,r \geq\, !\,s \tag{3.171}$$

Um das in ein handliches Format zu bringen, werden die Operatoren *Unter-* und *Überordnung* so eingeführt

Unterordnung $\quad s\,\mathrm{U}\,r =_{\text{def}} \exists p(p = \nearrow^{\text{u}} r \wedge p \geq s)$ (3.172)

Überordnung $\quad r\,\ddot{\mathrm{U}}\,s =_{\text{def}} s\,\mathrm{U}\,r$ (3.173)

Die Relation, dass ein Vater einem Kind einen Ball gibt, ist dem allgemeineren Fall übergeordnet, dass jemand jemand anderem etwas gibt, da die beschränkte Relation die unbeschränkte enthält (3.131). Die zweistellige Unterrelation, dass der Vater dem Kind etwas gibt, ist der Relation untergeordnet, dass der Vater dem Kind einen Ball gibt. Jetzt kann die Enthält-Relation zwischen zwei Gedanken wie folgt eingeführt werden:

$$!\,r \geq\, !\,s =_{\text{def}} r\,\ddot{\mathrm{U}}\,s \tag{3.174}$$

Auf diese Weise ist die Ordnungsrelation auf ganze Bedeutungsdefinitionen ausgeweitet worden. Die Gesetze des Begriffskalküls lassen sich daher leicht auf den Kalkül der Gedanken übertragen. Das wird an dieser Stelle aber nicht weiter ausgeführt.

3.3. Formale Begriffsanalyse

Die Formale Begriffsanalyse ist eine spezielle Ausprägung der Verbandstheorie. Sie geht davon aus, dass ein Begriff aus zwei Mengen besteht. Die eine repräsentiert die Merkmale des Begriffes (Begriffsinhalt, Intension) und die andere die Gegenstände, denen der Begriff zukommt (Begriffsumfang, Extension). Es wird eine Relation eingeführt, die besagt, dass ein Gegenstand g das Merkmal m hat. Ein Begriff ist dann ein Tupel aus einer Merkmals- und einer Gegenstandsmenge. Aus dieser Relation lässt sich dann mit Hilfe des Strich-Operators, der dem oben vorgestellten Operator für die Schrankenmengen ähnelt, ein Begriffsverband ableiten.

Als Beispiel seien folgende Definitionen von Brotsorten gegeben:[9]

Schwarzwälder Brot ist ein Weizenmischbrot, hat eine runde Laibform, auch Langform, eine bemehlte, kräftige Kruste, eine stark aufgelockerte, helle Krume und ist mild im Geschmack.

Münsterländer Stuten ist ein Weizenmischbrot. Es ist an den Seiten angeschoben und mit Krustenlängsschnitt. Es hat keine Seitenkruste, eine helle, weiche Krume (häufig mit Fett- oder Milchanteil) und ist mild im Geschmack.

Kommissbrot ist ein Roggen-/Roggenmischbrot. Es wird als Kasten- oder angeschobenes Brot gebacken. Das Kommissbrot hat eine mehlig, stumpfe Oberfläche und eine dunkle, dicht geporte Krume. Es ist kräftig im Geschmack.

Paderborner Landbrot ist ein angeschobenes Roggenmischbrot (pain de seigle/froment), welches kastenförmig gebacken wird. Es hat eine stumpfe, auch glänzende Kruste, weiche, krustenlose Seiten und eine helle, gut gelockerte Krume. Es ist mittelkräftig im Geschmack.

Die Brotsorten *Schwarzwälder Brot*, *Münsterländer Stuten*, *Kommissbrot* und *Paderborner Landbrot* seien die Gegenstände, und die Merkmale seien *Weizenmisch*, *Roggenmisch*, *rund*, *kastenförmig*, *helle Krume*, *dunkle Krume*, *mil-*

[9] `http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_von_Brotsorten`, 17.05.2012.

der Geschmack, *mittelkräftiger Geschmack*, *kräftiger Geschmack* und *angeschoben.*[10] Die Beziehung zwischen den Gegenständen und den Merkmalen lässt sich übersichtlich in einer Kreuztabelle darstellen:

	(1) Weizenmisch	(2) Roggenmisch	(3) Rund	(4) Kastenförmig	(5) helle Krume	(6) dunkle Krume	(7) milder Geschmack	(8) mittlerer Geschmack	(9) kräftiger Geschmack	(10) angeschoben
Schwarzwälder Brot (a)	×		×		×		×			
Münsterländer Stuten (b)	×		×		×		×			×
Kommissbrot (c)		×		×		×			×	×
Paderborner Landbrot (d)		×		×	×			×		×

Tabelle 3.1.: Brotsorten.

Für eine einfachere Darstellung stehen die Buchstaben a (Schwarzwälder Brot) bis d (Paderborner Landbrot) für die Gegenstände G in der Reihenfolge der Zeilen, und die Zahlen 1 (Weizenmisch) bis 10 (angeschoben) in der Reihenfolge der Spalten für die Merkmale M. Vervollständigt man diese Ordnung nach der Schnittmethode δ, erhält man aus der Gegenstandsmenge, einen vollständigen Verband. Die Ordnungsrelation ist hier durch $x \geq y$ mit $x \in G$ und $y \in M$ gegeben. Sie kann gelesen werden als „Der Gegenstand x hat das Merkmal y“ oder auch „y ist in den Merkmalen von x enthalten“. Die Relation ist leicht aus der Tabelle 3.2 ablesbar, wie z. B. $a \geq 1$ oder $c \geq 4$. Hierbei sind $X\uparrow \subseteq M$ und $X\uparrow\downarrow \subseteq G$. Das Hasse-Diagramm dazu zeigt Abbildung 3.6 auf Seite 66.

Wenn man nun das Ganze auch für die Merkmale durchspielt, und dabei die Umkehrrelation von $\geq$ betrachtet, erhält man ein interessantes Ergebnis. Da die Potenzmenge von zehn Merkmalen schon ein wenig unhandlich zu bearbeiten ist, beschränkt sich die Darstellung in Tabelle 3.3 auf Seite 67 auf die Teilmengen, die tatsächlich unterschiedliche Ergebnisse liefern. Hier sind $X\uparrow \subseteq G$ und $X\uparrow\downarrow \subseteq M$. Man prüft leicht nach, dass andere Teilmengen von

[10] Die Problematik dieser Interpretation der Definienda als Gegenstände wird weiter unten bei den Relationen der Formalen Begriffsanalyse diskutiert.

$\mathcal{P}(G)$	$\emptyset$	a	b	c	d	ab
$X\uparrow$	M	$1,3,5,7$	$1,3,5,7,10$	$2,4,6,9,10$	$2,4,5,8,10$	$1,3,5,7$
$X\uparrow\downarrow$	$\emptyset$	ab	b	c	d	ab

$\mathcal{P}(G)$	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	$abcd$
$X\uparrow$	$\emptyset$	5	10	$5,10$	$2,4,10$	$\emptyset$	5	$\emptyset$	10	$\emptyset$
$X\uparrow\downarrow$	G	abd	bcd	bd	cd	G	abd	G	bcd	G

Tabelle 3.2.: δ(Brotsorten).

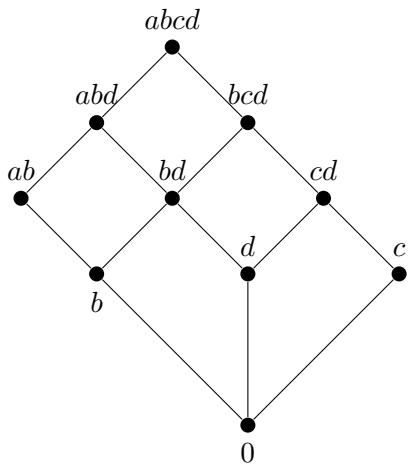


Abbildung 3.6.: Hasse-Diagramm Brotsorten.

M keine neuen Schnitte ergeben. Eine effiziente Methode diese Mengen zu ermitteln wird weiter unten beschrieben. Das entsprechende Hasse-Diagramm

$\mathcal{P}(M)$	$\emptyset$	1	2	...	5	6	...	8
$X\uparrow$	G	ab	cd	...	abd	c	...	d
$X\uparrow\downarrow$	$\emptyset$	1,3,5,7	2,4,10	...	5	2,4,6,9,10	...	2,4,5,8,10

$\mathcal{P}(M)$	...	10	...	1,10	...	5,10	...	1-10
$X\uparrow$	...	bcd	...	b	...	bd	...	$\emptyset$
$X\uparrow\downarrow$	...	10	...	1,3,5,7,10	...	5,10	...	1-10

Tabelle 3.3.: δ(Brotmerkmale).

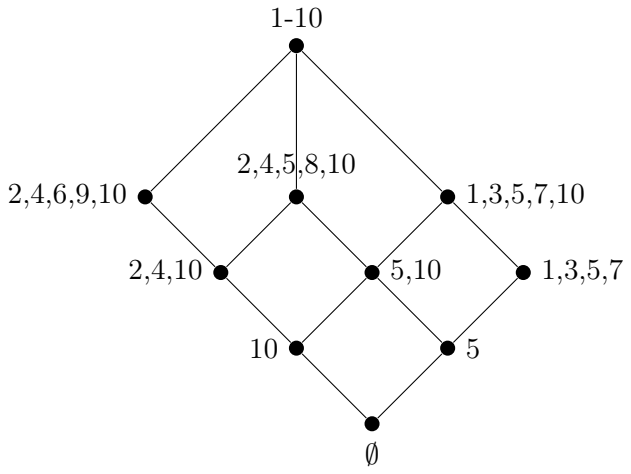


Abbildung 3.7.: Hasse-Diagramm Brotmerkmale.

zeigt Abbildung 3.7. Es ist das Spiegelbild der Verbandsstruktur, die aus der Gegenstandsmenge berechnet wurde. Wenn man das Merkmals-Diagramm nun spiegelt und mit dem Diagramm der Gegenstände vereint, dann ergibt sich ein Verband mit allen Begriffen aus der in der Inzidenzrelation gegebenen Kombination von Gegenständen und Merkmalen. [11] Der Begriff ist dabei als ein Tupel aus einer Menge von Gegenständen und einer Menge von Merkmalen zu verstehen. Die in der Abbildung 3.8 dargestellte Verbandsstruktur nennt man

[11] Diese Einführung orientiert sich am Beispiel, das [Ern82] auf S. 88 vorlegt.

ein *formales Begriffssystem*. Die Begriffe lassen sich ganz leicht ablesen. Z. B. bilden *Münsterländer Stuten* und *Paderborner Landbrot* einen Begriff mit den Merkmalen *helle Krume* und *angeschoben* $(bd, 5, 10)$; dagegen bilden *Schwarzwälder Brot* und *Kommissbrot* keinen Begriff, da es kein Merkmal gibt, das beiden allein gemeinsam ist.

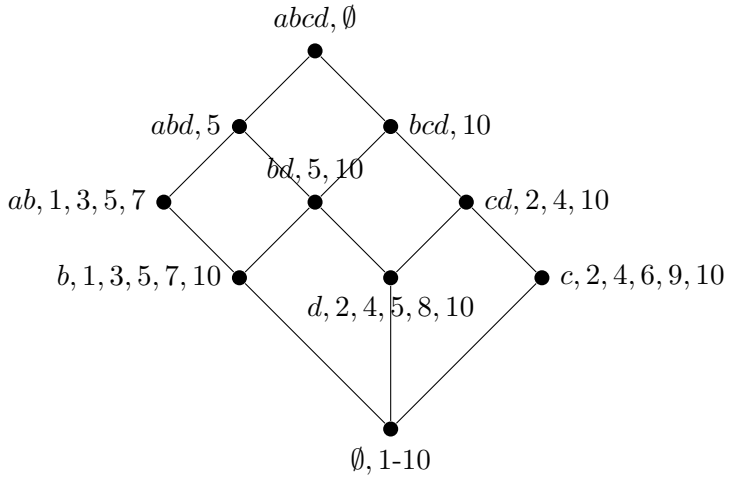


Abbildung 3.8.: Hasse-Diagramm Brot-Begriffe.

Die Formale Begriffsanalyse im Detail.

Definition 8. Ein *formaler Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ist definiert durch eine Menge von Gegenständen G, einer Menge M, und einer Relation $I \subseteq G \times M$, genannt Inzidenzrelation, die festlegt, welche Merkmale ein Gegenstand hat (Bspl. die Kreuztabelle 3.1). Ein Formaler Begriff ist ein Tupel (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ und $g \in A \wedge m \in B \rightarrow (g, m) \in I$. A ist der Umfang des Begriffes und B sein Inhalt. $\mathfrak{B}(G, M, I)$ bezeichnet dann die Menge aller formalen Begriffe des Kontextes (G, M, I) (Bspl. das Diagramm 3.8).

Die Relation $\geq$ entspricht der Ober-Unterbegriffsbeziehung zwischen (formalen) Begriffen auf folgende Weisen:

$$(A_1, B_1) \geq (A_2, B_2) \leftrightarrow A_2 \subseteq A_1$$

oder

$$(A_1, B_1) \geq (A_2, B_2) \leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$$

Der Begriff (A_1, B_1) ist allgemeiner als der Begriff (A_2, B_2), er ist sein Oberbegriff. Der Begriff (A_2, B_2) ist spezieller als der Begriff (A_1, B_1), er ist sein Unterbegriff. Dass die beiden Beziehungen in Bezug auf die Begriffe äquivalent sind, also nur zwei Seiten derselben Medaille darstellen, gipfelt, wie sich zeigen wird, im zentralen Hauptsatz der formalen Begriffstheorie.

Die Beziehung zwischen den Gegenständen und den Merkmalen wird einen eigenen Operator erhalten, der im Ergebnis dem Schnittoperator im obigen Beispiel entspricht. Er wird *Strichoperator* genannt:

Definition 9. Für $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ gilt:

$$A' = X =_{\text{def}} g \in A \wedge g \,\mathrm{I}\, m \leftrightarrow m \in X$$
$$B' = X =_{\text{def}} m \in B \wedge g \,\mathrm{I}\, m \leftrightarrow g \in X$$

Die Bedeutung ist, dass der Operator zu einer beliebigen Gegenstandsmenge ihre gemeinsamen Merkmale berechnet, oder zu einer beliebigen Merkmalsmenge die Gegenstände, die diese Merkmale besitzen.

Für den Strichoperator gilt:[12]

Theorem 7. Es sei (G, M, I) ein formaler Kontext und $A_i, A_j \subseteq G$ und $B_i, B_j \subseteq M$.

$$A \subseteq A'' \qquad B \subseteq B'' \tag{3.175}$$
$$A_1 \subseteq A_2 \rightarrow A_2' \subseteq A_1' \qquad B_1 \subseteq B_2 \rightarrow B_2' \subseteq B_1' \tag{3.176}$$
$$A' = A''' \qquad B' = B''' \tag{3.177}$$
$$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2' \qquad (B_1 \cup B_2)' = B_1' \cap B_2' \tag{3.178}$$

Beweis. Die Beweise werden hier nur für die Gegenstandsseite durchgeführt.[13]

(3.175) folgt so: Nach Definition des Strichoperators ist A' die Menge der Merkmale, die allen Gegenständen von A zukommt. Diese Merkmale nun kommen ihrerseits nach Definition des Strichoperators mindestens den Gegenständen von A zu, so dass A Teilmenge von A'' sein muss.

(3.176) folgt aus (2.21)

(3.177) ist eine Folge der beiden vorigen Theoreme.

(3.178) vereinigt man zwei beliebige Gegenstandsmengen $A_1 \cup A_2$, dann sind nach Definition des Strichoperators in $(A_1 \cup A_2)'$ die Merkmale, die alle diese

[12] Dieser Operator entspricht der weiter oben eingeführten Galois-Korrespondenz (Theorem (2)).

[13] Detaillierter findet man diese in [GW96] in den Hilfssätzen 10 und 11, S. 18f.

Gegenstände gemeinsam haben; bildet man nun zuerst die Merkmalsmengen von A_1 und A_2 und dann den Durchschnitt, $A_1' \cap A_2'$, erhält man die Merkmale, die A_1' und A_2' gemeinsam haben. Das sind genau die Merkmale, die allen Gegenständen von A_1 und A_2 zukommen, d. h. ihrer Vereinigungsmenge.

□

Nach diesem Theorem gilt für jeden Begriff (A'', A') bzw. (B', B''). Eine Gegenstands- oder Merkmalsmenge ist nur dann eine Begriffsmenge, wenn gilt $A = A''$ oder $B = B''$, wie im Brot-Beispiel schon angedeutet. Da es sich beim Begriffsverband um einen endlichen Verband handelt, muss es zu jeder Teilmenge ein Infimum und ein Supremum geben. Dies formuliert der Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse. Er wird hier nicht bewiesen.[14]

Theorem 8 (Hauptsatz über Begriffsverbände)**.** Es sei (G, M, I) ein formaler Kontext. Dann ist $(\mathfrak{B}(G, M, I); \geq)$ ein vollständiger Verband, in dem Infimum und Supremum gegeben sind als:

$$(A_1, B_1) \sqcup (A_2, B_2) = \big((A_1 \cup A_2)'', B_1 \cap B_2\big)$$
$$(A_1, B_1) \sqcap (A_2, B_2) = \big(A_1 \cap A_2, (B_1 \cup B_2)''\big)$$

3.3.1. Berechnung des Begriffsverbandes

Für die Berechnung von Begriffsverbänden und die Erstellung von Diagrammen gibt es mittlerweile eine große Anzahl von Softwarelösungen (z. B. ToscanaJ, ConExp).[15]

Der Algorithmus ist sehr einfach und effektiv.[16] Wegen seiner Bedeutung wird er hier anhand des Brot-Beispiels durchgespielt. Die Gültigkeit des Verfahrens beruht auf der erwähnten Tatsache, dass jeder Begriff von der Form (A'', A') bzw. (B', B'') sein muss.

1. Im ersten Schritt wird der größtmögliche Begriffsumfang in eine Liste eingetragen, d. h. die Menge G. Dann führt man für jedes Merkmal $m \in M$ folgenden Schritt wiederholt durch:

n. Für jede Menge A, die in einem früheren Schritt $(< n)$ in die Liste eingetragen wurde, bildet man die Menge $A \cap m'$ und nimmt sie in die Liste auf, wenn sie dort noch nicht vorhanden ist.

[14] Vgl. [GW96], S. 20.

[15] S. a. die Internetseite des Ernst-Schröder Zentrums für begriffliche Wissensverarbeitung `http://www.ernst-schroeder-zentrum.de/software/` und eine sehr ausführliche Seite von Uta Priss `http://www.upriss.org.uk/fca/fca.html` (Zugriff am 03.06.2012).

[16] Vgl.[GW96] S. 64.

Der Brotsorten-Kontext hat zehn Merkmale (es werden hier der Einfachheit halber nur die Buchstaben und Zahlen verwendet):

Schritt	Merkmal	Liste
1.		$\{a, b, c, d\}$
2.	1	$1' = \{a, b\}$
3.	2	$2' = \{c, d\}, \{\}$
4.	3	
5.	4	
6.	5	$5' = \{a, b, d\}, \{d\}$
7.	6	$6' = \{c\}$
8.	7	
9.	8	
10.	9	
11.	10	$10' = \{b, c, d\}, \{b\}, \{b, d\}$

Für die Merkmale 3, 4, 7, 8 und 9 ergeben sich keine neuen Gegenstandsmengen im Vergleich zu den bis dahin ermittelten, weshalb sie erst gar nicht eingetragen werden.

Mit diesem Verfahren lässt sich für jede Halbordnung H sowohl die Schnittvervollständigung δ mit $\mathfrak{B}(H, H, \leq)$, als auch die Abschnittsvervollständigung ϑ mit $\mathfrak{B}(H, H, \not\geq)$ durchführen. Für den Beweis $\delta(H) \simeq \mathfrak{B}(H, H, \leq)$ sei auf die Einführung der Formalen Begriffsanalyse hingewiesen. Sie wurde ja aus der Schnittvervollständigung für die Halbordnungen der Gegenstände und Merkmale im vorigen Abschnitt durchgeführt. $\vartheta(H) \simeq \mathfrak{B}(H, H, \not\geq)$ ist nicht so offensichtlich. Die Beweisführung sei hier nur angedeutet. Die Relation $\not\geq$ erzeugt auf der Gegenstandsseite Abschnitte auf folgende Weise. Wenn ein Begriff a einen anderen Begriff b enthält, $a \geq b$, dann muss unter der Relation $\not\geq$ $b' \subseteq a'$ sein. Auf der anderen Seite der Merkmale ergibt sich ein oberer Abschnitt (Ordnungsfilter), da dort alle Merkmale bzw. Begriffe enthalten sind die nicht unter a liegen, d. h. die Bedingung für den oberen Abschnitt kann nicht verletzt werden.[17]

3.3.2. Negierte formale Begriffe

Die begriffliche Negation zersprengt den verbandstheoretischen Rahmen. Wird die Negation extensional interpretiert, sollte die Negation eines Begriffes (A, B) auf der Gegenstandsseite dem Komplement entsprechen, etwa so: $(G \setminus A, (G \setminus$

[17] Vgl. [GW96] S. 48f. Diese Art von Begriffsverband heißt *Kontraordinalskala*. In [GK98] findet sich eine Untersuchung über die Komplexität des Verfahrens.

$A)'$). $(G \backslash A)$ muss aber nicht ein Begriffsumfang des Begriffsverbandes sein. Z. B. wäre ein so negierter Begriff ({Paderborner Landbrot, Münsterländer Brot}, { angeschoben, hell}) aus dem Brot-Beispiel kein Begriff des Kontextes, da es darin keinen Begriff mit der Gegenstandsmenge Kommissbrot und Schwarzwälder Brot gibt. Eine Alternative, die sich im Rahmen des Verbandes bewegt, ist die *schwache Negation*. Sie hat den Nachteil, dass die Schnittmenge der Gegenstandsmenge und seines Komplements durch Anwendung des Strichoperators nicht leer sein muss:

$$((G \setminus A)'', (G \setminus A)') \qquad \text{schwache Negation} \tag{3.179}$$

Angewendet auf das eben eingeführte Beispiel erhält man den Begriff mit der leeren Menge bei den Merkmalen und der kompletten Gegenstandsmenge.

Das ist also nicht sehr hilfreich. Die Orientierung an der Komplementärmenge weist jedoch den richtigen Weg. Er führt heraus aus dem formalen Kontext zu sogenannten Halbbegriffen (*Semiconcept*). Ihre Definition lautet:

Definition 10. Ein Paar (A, B) eines Kontextes $\mathbb{K}$ mit $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ ist ein *Halbbegriff*, wenn $A' = B$ oder $B' = A$.

Man kann zwei Arten der Negation unterscheiden. Die Negation (im engeren Sinne) operiert auf der Komplementärmenge einer beliebigen Gegenstandsmenge; dual dazu operiert die *Opposition* auf der Menge der Merkmale:

$$\neg(A, B) =_{\text{def}} (G \setminus A, (G \setminus A)') \qquad \text{Negation} \tag{3.180}$$

$$\neg(A, B) =_{\text{def}} ((M \setminus B)', M \setminus B) \qquad \text{Opposition} \tag{3.181}$$

Teilt man alle möglichen Halbbegriffe eines Kontextes danach auf, aus welcher der beiden Mengen sie gebildet wurden, dann ist die eine Hälfte isomorph zur Potenzmenge der Gegenstände und die andere isomorph zur Potenzmenge der Merkmale.[18] Würde man die Halbbegriffe in den Begriffsverband mit einsprechender Ordnungsrelation integrieren, dann ist die Struktur kein Verband mehr. Da aber nur bestimmte Halbbegriffe in einem Kontext von Interesse sind, reicht es aus, diese bei Bedarf zu bestimmen.

Für das hier gewählte Beispiel ist die Negation

$$\begin{aligned}&\neg(\{\text{Paderborner Landbrot}, \text{Münsterländer Brot}\}, \{\text{angeschoben, hell}\})\\ &= (\{\text{Kommissbrot}, \text{Schwarzwälder Brot}\}, \emptyset)\end{aligned}$$

[18] Für eine Verallgemeinerung der Halbbegriffe durch Prototypbegriffe vgl. [Wil00a].

Die Opposition der Brote mit den Eigenschaften angeschoben, kastenförmig, roggenmisch, kräftiger Geschmack und dunkle Krume ($= B$) ergibt dann:

$$\neg(\{\text{Kommissbrot}\}, B) = ((M \setminus B)', M \setminus B) = (\emptyset, M \setminus B)$$

wobei $M \setminus B = \{$ helle Krume, milder Geschmack, mittlerer Geschmack, rund, Weizenmischung $\}$. Wie in diesem Beispiel resultieren die meisten begrifflichen Negationen und Oppositionen durch den Strichoperator in einer leeren Gegenstands- oder Merkmalsmenge.

3.3.3. Mehrwertige Kontexte

Im Sprachgebrauch und in der Messtheorie unterscheidet man zwischen Merkmal und Merkmalsausprägung. Eine Farbe kann einen der Werte grün, blau oder rot annehmen; der Geschmack (eines Brotes) kann mild, mittel oder kräftig sein usw. Diese Anforderung wird durch eine Erweiterung des formalen Kontextes umgesetzt. Die Idee ist, das Merkmal zu einem eigenen formalen Kontext zu machen, auf diesem eine Ordnung festzulegen, und ihn anschließend mit dem ursprünglichen Kontext zu vereinen. Die Festlegung der Ordnung des Merkmals wird Skalierung genannt und ist im Wesentlichen eine willkürliche Entscheidung – in den meisten Fällen ist sie jedoch naheliegend.

Definition 11. Ein *mehrwertiger Kontext* (G, M, W, I) besteht aus den Mengen G, M, W und der dreistelligen Relation $I \subseteq G \times M \times W$, wobei gilt:

$$(g, m, w) \in I \wedge (g, m, v) \in I \rightarrow w = v$$

G sind hier wieder die Gegenstände; M enthält die Merkmale, und W die Werte, die diese Merkmale annehmen können. Das Tripel $(g, m, w) \in I$ wird gelesen als „das Merkmal m hat beim Gegenstand g den Wert w“.

Für jedes mehrwertige Merkmal wird eine Skala festgesetzt. Die Definition der Skala ist daher dem formalen Kontext sehr ähnlich.

Definition 12. Eine *Skala* zum Merkmal m eines mehrwertigen Kontextes ist ein einwertiger Kontext $\mathbb{S}_m = (G_m, M_m, I_m)$. Es gibt eine Funktion $m(g) \in G_m$ mit $g \in G$. Die Gegenstände einer Skala heißen *Skalenwerte*, die Merkmale *Skalenmerkmale*.

Auf das Beispiel der Brotsorten angewandt, könnte man den mehrwertigen Kontext so anlegen

	(1) Mehlsorte	(2) Form	(3) Krume	(4) Geschmack	(5) angeschoben
Schwarzwälder Brot (a)	Weizen	rund	hell	mild	
Münsterländer Stuten (b)	Weizen	rund	hell	mild	×
Kommissbrot (c)	Roggen	Kasten	dunkel	kräftig	×
Paderborner Landbrot (d)	Roggen	Kasten	dunkel	mittel	×

Die Merkmale *Mehlsorte* und *Form* sind nominal skaliert und könnten so aussehen:

	(1) Weizen	(2) Roggen	(3) Dinkel
Weizen (a)	×		
Roggen (b)		×	
Dinkel (c)			×

	(1) rund	(2) Kasten	(3) länglich
rund (a)	×		
Kasten (b)		×	
länglich (c)			×

Wobei bei der Form zur Illustration noch ein Wert hinzugenommen wurde, damit es sich von rein dichotomen Merkmalen (s. u.) unterscheidet. Wenn das Merkmal Geschmack auch nominal skaliert wird, dann wäre der mehrwertige Kontext im Ergebnis gleich dem Originalbeispiel. Man könnte es aber auch so verstehen, dass ein Brot, das kräftig schmeckt auch mittelkräftig schmeckt, aber nicht mild:

	(1) kräftig	(2) mittel	(3) mild
kräftig (a)	×	×	
mittel (b)		×	
mild (c)			×

Setzt man die Skalen in den mehrwertigen Kontext ein, erhält man wieder einen einwertigen Kontext. Im Beispiel sieht es so aus und unterscheidet sich

im hinzugefügten Merkmalswert *Dinkel* und der neuen Skalierung für den Geschmack.

	(1) Weizenmisch	(2) Roggenmisch	(3) Dinkel	(4) Rund	(5) Kastenförmig	(6) helle Krume	(7) dunkle Krume	(8) milder Geschmack	(9) mittlerer Geschmack	(10) kräftiger Geschmack	(11) angeschoben
Schwarzwälder (a)	×			×		×		×			
Münsterländer (b)	×			×		×		×			×
Kommissbrot (c)		×			×		×		×	×	×
Paderborner (d)		×			×	×			×		×

Typische Skalen sind die Nominalskala und Abwandlungen von Ordinalskalen. Diese können eine einfache lineare Ordnung abbilden (jede Art von Rangordnung), Intervalle (z. B. Bewertungen auf einer Skala von 1-10), biordinal (z. B. Schulnoten mit 1-4 auf der einen Seite und 5 und 6 auf der anderen; die Geschmacksskala im Beispiel oben ist biordinal) oder schließlich dichotom, typischerweise Ja/Nein oder Wahr/Falsch.[19]

3.3.4. Relationen

Genau betrachtet sind die Skalen relationale Begriffe, wenn man die Werte des Wertebereichs als Gegenstände auffasst. Die Erweiterung auf beliebige Relationen erfordert einen weiteren Schritt. Dazu werden Gegenstände in Tupeln zusammengefasst, deren Attribute entweder von gleicher Stellenzahl oder einstellig sind. Letztere werden durch einen Index den Stellen im Tupel zugeordnet. So kann es bei einer dreistelligen Relation vorkommen, dass ein Attribut für jede Stelle einmal aufgeführt werden muss. Hier ist es nun schwer, das Beispiel mit Brot-Definitionen durchzuführen, denn jetzt erweist es sich als problematisch die Definienda als (formale) Gegenstände zu betrachten.

Deshalb zur Einführung ein einfaches Beispiel, in dem vor allem die Gegenstände dem Individualbegriff der Logik entsprechen.

[19] Vgl. [GW96] S. 42f.

Beispiel 6. *Peter*, *Paul* und *Hans* sind *männlich*; *Marlies* und *Gisela weiblich*. Paul ist mit Gisela *verheiratet*, *liebt* aber Marlies. Hans ist mit Marlies verheiratet und die beiden lieben sich. Paul und Gisela sind die *Eltern* von Peter.

Hier ist G ={Peter, Paul, Hans, Marlies, Gisela}, als einstellige Merkmale kommen vor M_1 ={männlich, weiblich}, als zweistellige M_2 ={a liebt b, a ist verheiratet mit b} und als dreistelliges Merkmal M_3 ={a und b sind Eltern von c}. Das ganze als Tabellen:

	männlich	weiblich
Peter	×	
Paul	×	
Hans	×	
Marlies		×
Gisela		×

1, 2	1 liebt 2	1 verheiratet 2
Paul, Gisela		×
Paul, Marlies	×	
Hans, Marlies	×	×
Marlies, Hans	×	×

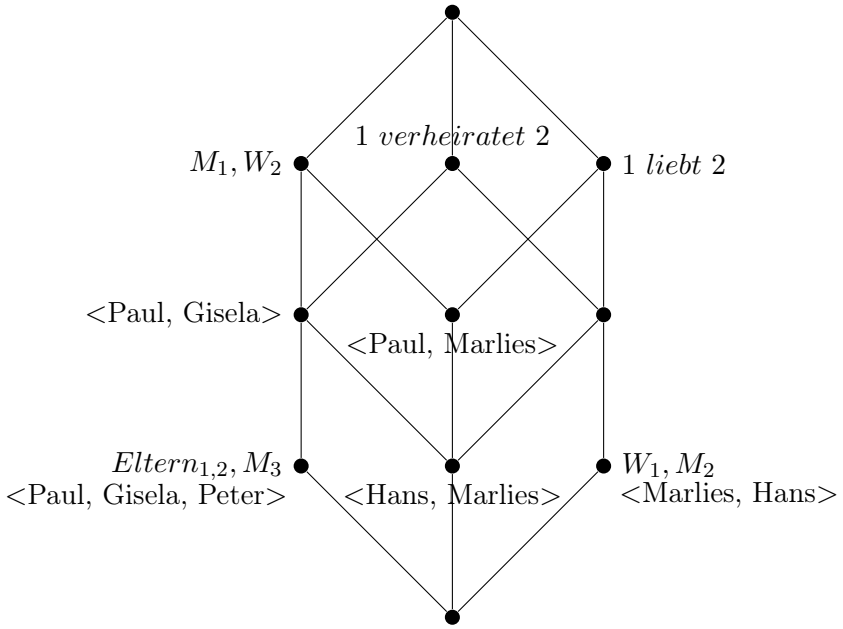
1, 2, 3	1, 2 Eltern von 3
Pa., G., Pe.	×

Da der Begriff *Lieben* nicht symmetrisch ist, müssen sowohl (Hans, Marlies) als auch (Marlies, Hans) bei „a liebt b“ ein Kreuz erhalten. Bei „a verheiratet b“ ist dies nicht nötig, da diese Relation symmetrisch ist.

Um die verschiedenstelligen Relationen in einer Tabelle vereinigen zu können, ist es notwendig die Merkmale auf Stellen beziehen zu können. Etwa in dieser Weise:

1, 2, 3	1,2 Eltern von 3	1 liebt 2	1 verheiratet 2	männlich$_1$	männlich$_2$	männlich$_3$	weiblich$_1$	weiblich$_2$
Paul, Gisela, Peter	×		×	×		×		×
Paul, Gisela			×	×				×
Paul, Marlies		×		×				×
Hans, Marlies		×	×	×				×
Marlies, Hans		×	×		×		×	

Damit kann man den Begriffsverband ermitteln und als Diagramm darstellen:



Die formale Grundlage zu den Relationen liefert die folgende Definition.

Definition 13. Eine *Potenzkontextfamilie* $\overrightarrow{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \ldots, \mathbb{K}_n)$ ist eine Familie von Kontexten $\mathbb{K}_k = (G_k, M_k, I_k)$ mit $G_1 \neq \emptyset$ und $G_k \subseteq (G_1)^k$ für jedes $k = 2, \ldots n$. Die formalen Kontexte $\mathbb{K}$ werden k-stellige Relationen genannt.

Die k-stelligen Relationen R_k mit $k > 1$ sind Teilmengen der kartesischen Produkte der Gegenstände $(G_1)_1 \times (G_1)_2 \times \ldots \times (G_1)_k$. Eine Frage ist, ob es ein G_0 neben dem G_1 geben soll oder nicht. Man kann unterscheiden zwischen einem Begriff und einer einstelligen Relation.[20] Grund ist der Wunsch nach einer Trennung von Begriffen und einstelligen Relationen, wie z. B. *Rund*, *Groß*. Diese Unterscheidung wird hier nicht nachvollzogen. Denn diese Begriffe sind nach der hier verstandenen Auffassung immer mindestens zweistellig: Etwas (1) hat den Wert Rund (2), etwas Anderes oder auch das Gleiche (1) hat den Wert Groß (2), wobei die Stelle 1 jeweils mit den Objekten und Stelle 2 jeweils mit den Werten instantiiert wird.

3.4. Freytag-Löringhoffs *Neue Logik*

Die Grundlage der *Neuen Logik* sind die Begriffsbeziehungen. Begriffe stehen im Spannungsfeld der beiden Gegensätze von Identität und Diversität und bei-

[20] vgl. [Pre98], S. 24. [Wil97] zählt noch so wie hier geschehen. Danach hat sich aber die Auffassung wie in [Pre98] durchgesetzt.

de finden sich gleichermaßen in der Art-Gattung-Beziehung. Zwei Begriffe mit dem gleichen Oberbegriff sind teilweise identisch, weil sie den gleichen Gattungsbegriff (Genus Proximum) enthalten; sie sind aber auch divers, weil jeder von ihnen mindestens einen Begriff enthält, den der andere nicht enthält (Differentiam specificam). Aus der Teilidentität, der Beziehung zwischen der Gattung und seiner Art, leitet sich die zentrale Schlussform der aristotelischen Syllogistik ab, der Schluss *Barbara*:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M} & \mathrm{a} & \mathrm{P} \\ \mathrm{S} & \mathrm{a} & \mathrm{M} \\ \hline \mathrm{S} & \mathrm{a} & \mathrm{P} \end{array}$$

Ein Beispiel extensional formuliert: Alle (a) Autos (M) sind Fahrzeuge (P). Alle Cabrios (S) sind Autos. Daraus folgt: Alle Cabrios sind Fahrzeuge. Das gleiche Beispiel begrifflich formuliert: Ein Auto (M) ist ein Fahrzeug (P). Ein Cabrio (S) ist ein Auto. Daraus folgt: Ein Cabrio ist ein Fahrzeug.

Aus den genannten Begriffsbeziehungen werden grundlegende Regeln abgeleitet, die dann beim logischen Schließen zum Einsatz kommen. Es handelt sich hierbei also nicht um ein axiomatisches sondern um ein regelbasiertes System der Logik, das sowohl die extensionalen als auch die intensionalen Relationen der Begriffe betrachtet. Dazu wird ein eigenes Inventar von Zeichen eingeführt, das die Beziehung zwischen Begriffen kennzeichnet. Mit Hilfe der Regeln lassen sich neue Beziehungen berechnen. Die Diagramme der Begriffsbeziehungen werden Begriffslagen genannt.[21]

$\mathrm{a} \prec\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!\prec \mathrm{b}$ — *Teilidentität*. Der Begriff a enthält den Begriff b und möglicherweise andere Begriffe, die b nicht enthält. b ist Oberbegriff von a. Der Umfang des Begriffes a ist im Umfang des Begriffes b enthalten.

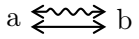
$\mathrm{a} \longleftarrow\!\!\!\!\prec \mathrm{b}$ — *Echte Teilidentität*. Der Begriff a enthält den Begriff b und andere Begriffe, die b nicht enthält. Der Umfang von a ist eine echte Teilmenge von b.

$\mathrm{a} \succ\!\!\!\!-\!\!\!\!\prec \mathrm{b}$ — *Totale Identität*. Die beiden Begriffe sind identisch, auch $a = b$.

$\mathrm{a} \longleftrightarrow \mathrm{b}$ — *Diversität*. Umfangsfremdheit. Die beiden Begriffe kommen nicht ein und demselben Individuum zu. Entspricht dem *e*-Urteil: Alle a sind nicht-b, oder: Kein a ist ein b.

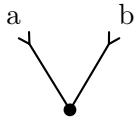
[21] Vgl. [FL85] S. 3-8.

Disparität. Inhaltsfremdheit. Die beiden Begriffe haben keine gemeinsamen Begriffe. Äquivalent zu $\bar{a} \longleftrightarrow \bar{b}$ (s. u.).

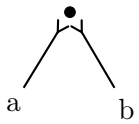


Negatverhältnis. Totale Disparität und Diversität. Der eine Begriff ist die Negation des anderen. Die beiden Begriffe haben keine gemeinsamen Begriffe und kommen auch keinem Individuum gleichzeitig zu. Die Negation wird auch so dargestellt: $\bar{a}$.[22]

Ein *definierter Begriff* dargestellt durch einen dicken Punkt. Normale Begriffe werden dagegen durch Buchstaben oder Striche dargestellt. Für definierte Begriffe gelten spezielle Regeln.



Definition durch *Spezifikation.* Der definierte Begriff, das *Spezifikat*, enthält *nur* die Begriffe a und b. Das entspricht der klassischen Definitionsweise mit Hilfe von Gattungs- und Differenzbegriffen.



Definition durch *Generalisation.* Der definierte Begriff, das *Generalisat*, ist *nur* in den beiden Begriffe a und b enthalten. Das kommt in der Praxis beim Definieren mit Hilfe einer Aufzählung vor.

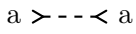
a^I *Individualbegriff.* Ebenfalls mit speziellen Regeln (s. u.).

M Das *Meinbare*. Der inhaltsleere Begriff, der in jedem Begriffe enthalten ist und jedem Individuum zukommt.

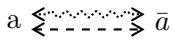
W Der *Widerspruch*. Der umfangsleere Begriff, der jeden Begriff enthält und keinem Individuum zukommt.

Die wichtigsten Operationsregeln sind die folgenden. Dabei werden vorausgesetzte Beziehungen mit durchgezogenen und die abgeleiteten mit gestrichelten oder gepunkteten Linien gezeichnet. Gibt es mehrere abgeleitete Beziehungen und spielt die Reihenfolge der Ableitungen eine Rolle, dann werden die Linien mit Nummern versehen.

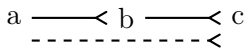
[22] Diese Negation ist nicht mit der von Kauppi zu verwechseln.

1. 

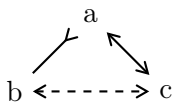
Ein Begriff ist mit sich selbst identisch.

2. 

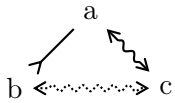
Diversität und Disparität folgen aus einem Begriff und seinem Negat. Diese Regel, wie die *Neue Logik* überhaupt, setzt voraus, dass zu jedem Begriff sein Negat existiert.

3. 

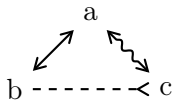
Die Transitivität der Teilidentität. In der Syllogistik ist dies der erwähnte Schluss *Barbara* (das *Dictum de omni).*

4. 

Der syllogistische Schluss: Kein a ist ein c. Alle b sind a. Also ist kein b ein c. (*Dictum de nullo.*)

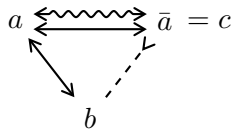
5. 

Die rein inhaltliche Regel: Begriff a enthält Begriff b. c und a haben keinen Begriff gemeinsam. Also haben auch c und b keine gemeinsamen Begriffe.

6. 

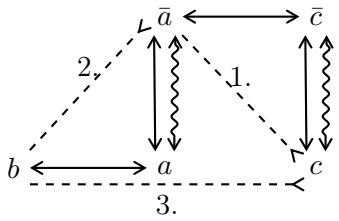
Kein a ist ein b. c und a haben keinen gemeinsamen Inhalt. Also sind alle b c bzw. enthält b den Begriff c.

Die Gültigkeit der letzten Regel, (6), erschließt sich nicht auf Anhieb. Freytag-Löringhoff hat sie auch erst in seinem letzten Buch eingeführt.[23] Da es sich um eine Grundregel handelt, ist eine Herleitung oder ein Beweis nicht möglich. Sie ist nur dann plausibel, wenn die Existenz von negierten Begriffen grundsätzlich eingeräumt wird. Dann enthält ein beliebiger Begriff, der zu einem anderen Begriff divers ist, immer dessen Negat, *Tertium non datur*:



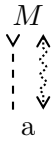
Mit negiertem Begriff ist klar, wohin die Reise geht, vorausgesetzt die Umfänge eines Begriffes und seines Negates sind komplementär. Wenn kein b ein a ist, dann muss b ja ein $\bar{a}$ sein.[24] Ersetzt man nun in dieser Begriffslage $\bar{a}$ durch c ist man schon fast so weit. Freytag-Löringhoff stellt den Zusammenhang dieser Grundregel zu den Negaten auf folgende Weise dar:[25]

[23] Vgl. [FL85].
[24] Der Schluss funktioniert natürlich auch in die andere Richtung, wenn b divers zu $\bar{a}$ ist.
[25] Vgl. [FL85] S. 11. Hier in angepasster Symbolik. Er verwendet die Symbolik aus seinem ersten Logikbuch [FL55].

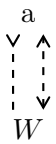


Die mit 1 und 2 gekennzeichneten Identitätsstriche ergeben sich aus dem *Tertium non datur*, der 3. Identitätsstrich folgt aus der Transitivität der Teilidentität. Zum Diversitätspfeil zwischen dem Negat von a und dem von c ist zu bemerken, dass a und c nach Voraussetzung keinen Inhalt gemeinsam haben. Allerdings wäre es möglich, dass der Schnitt ihrer Umfänge nicht leer ist. Das Negat eines Begriffes hat mit diesem jedoch keinen gemeinsamen Umfang (s. o. Definition Diversität). Daher ist auch ausgeschlossen, dass die Negate von a und c einen gemeinsamen Umfang haben können.

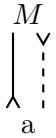
Es folgen die Regeln für das Meinbare M und den Widerspruch W.

7. 

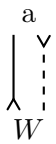
Jeder Begriff enthält den leeren Begriff M. Da das Meinbare ein leerer Begriff ist, kann kein Begriff einen gemeinsamen Inhalt mit diesem teilen.

8. 

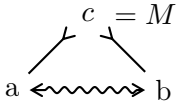
Der widersprüchliche Begriff W enthält jeden Begriff, und wegen seines leeren Begriffsumfangs gilt die Diversität zu jedem anderen Begriff.

9. 

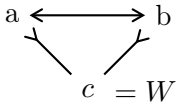
Das Meinbare enthält keinen Begriff.

10. 

Kein Begriff enthält den Widerspruch.

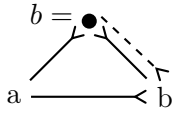
11. 

Das Generalisat inhaltsfremder (disparater) Begriffe ist gleich dem Meinbaren, d. h. dem inhaltsleeren Begriff

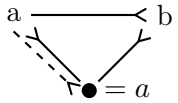
12. 

Das Spezifikat umfangsfremder (diverser) Begriffe ist gleich dem Widerspruch, d. h. es hat keine Extension.

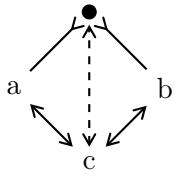
Definierte Begriffe haben gegenüber anderen Begriffen den Vorzug, dass ihr Inhalt exakt bestimmt ist. Unter dieser Voraussetzung gelten die folgenden Regeln:

13. 

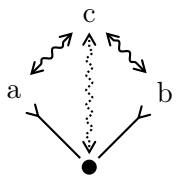
Das Generalisat von Art- und Gattungsbegriff ist der Gattungsbegriff.

14. 

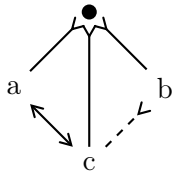
Das Spezifikat von Art- und Gattungsbegriff ist der Artbegriff.

15. 

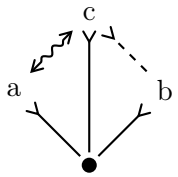
Ein Begriff, der zu zwei Begriffen divers ist, ist auch zu deren Generalisat divers.

16. 

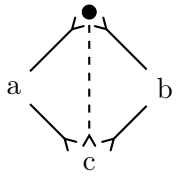
Das Spezifikat kann keinen Begriff enthalten, den seine Begriffe nicht enthalten.

17. 

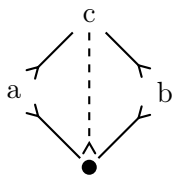
Ein Begriff, der das Generalisat zweier Begriffe enthält, und zu einem der Begriffe divers ist, muss den anderen Begriff enthalten.

18. 

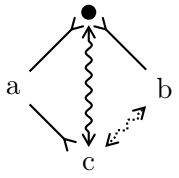
Enthält das Spezifikat einen Begriff zu dem einer seiner Begriffe disparat ist, dann muss ein Begriff des Spezifikats diesen Begriff enthalten.

19. 

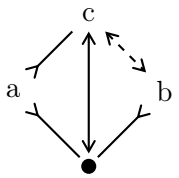
Das Generalisat enthält alle Begriffe seiner Artbegriffe.

20. 

Ein Begriff, der die definierenden Begriffe eines Spezifikats enthält, enthält auch das Spezifikat selbst.

21. 

Wenn ein Begriff zu einem Generalisat disparat ist, und ein definierender Begriff ihn enthält, dann muss er zum anderen Begriff ebenfalls disparat sein.

22. 

Ein Begriff, der divers zu einem Spezifikat ist, und einen definierenden Begriff des Spezifikats enthält, muss divers zu dem anderen definierenden Begriff sein.

Nicht für Begriffe allgemein, aber für ein System aus definierten Begriffen bildet die *Neue Logik* einen booleschen Verband. Dabei setzt man das Spezifikat für $a \sqcap b$ und das Generalisat für $a \sqcup b$, das Negat gleich dem Komplement, das Meinbare gleich dem 1-Element und den Widerspruch gleich dem 0-Element.[26]

Für Individualbegriffe (3.4) gelten ebenfalls besondere Regeln. Es wird angenommen, dass solche Begriffe nicht widerspruchsvoll sein können. Sie liegen daher echt über dem Widerspruch und fallen nicht mit diesem zusammen. Ihre Negate sind nicht inhaltsleer und liegen unter dem Meinbaren, sind aber nicht mit diesem identisch.[27] Verbandstheoretisch gesprochen sind jene die oberen Nachbarn des 0-Elementes (Atome) und diese die unteren Nachbarn des 1-Elementes (Ko-Atome) einer Verbandsstruktur.

23. a^I $\succ$ W

Ein Individualbegriff ist oberer Nachbar des Widerspruchs, denn er lässt sich nicht weiter spezialisieren, d. h. er hat keine weiteren Unterarten.

24. M $\succ$ $\overline{a^I}$

Ein negierter Individualbegriff ist unterer Nachbar des Meinbaren.

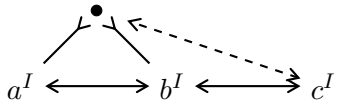
Zwei Individualbegriffe sind entweder identisch oder divers. Aus zwei diversen Begriffen und der Tatsache, dass ein Individualbegriff einen davon nicht enthält, folgt, dass er den anderen enthalten muss.

25. b^I $\succ$ a^I

Zwei Individualbegriffe sind divers oder sie sind identisch.

[26] Vgl. [Pet75] S. 20-27. Dort findet sich auch der entsprechende Beweis.
[27] Vgl. [FLP74].

Ein Generalisat zweier Individualbegriffe kann nie ein Individualbegriff sein. Jedoch gilt, dass eine Generalisierung aus Individualbegriffen nur die Individuen der Individualbegriffe im Umfang enthalten kann.[28]



Man kann, wie hier, das Generalisat aus zwei Individualbegriffen a^I und b^I bilden. Dieser ist aber immer zu einem anderen Individualbegriff c^I divers. Bildet man aus diesen drei Individualbegriffen das Generalisat, setzt sich das Problem mit dem nächsten fort. Daher eignen sich Individualbegriffe nicht zur Bildung allgemeinerer Begriffe, und damit auch nicht zum Aufbau eines Begriffssystems.

3.5. Description Logic

Unter dem Begriff Description Logic (Beschreibungslogik) versteht man eine Familie von klassen- und terminologiebasierten Wissensrepräsentationssystemen. Sie haben ihre Wurzeln in semantischen Netzen und bilden die Grundlage, oder den Kern, des Semantic Web. In diesen Systemen werden den Klassen Beschreibungen, das sind Definitionen, zugeordnet, und Beziehungen zwischen konkreten Individuen spezifiziert. Beschreibungslogiken haben daher sowohl eine intensionale als auch eine extensionale Seite. Insbesondere wird der Formalismus auch dazu verwendet Aussagen über die Individuen des Universums zu ermitteln.

Beschreibungslogiken sind logik-basierte Semantiken, die sich besonders für den Aufbau von Terminologien eignen. Sie werden vor allem mit dem Ziel konstruiert, automatische Ableitungen zu ermöglichen mit denen einerseits die Widerspruchsfreiheit der Terminologie geprüft werden kann und (implizite) Theoreme abgeleitet werden können, andererseits dient sie auch dazu Klassenzugehörigkeit von Individuen zu ermitteln. Diese anwendungsorientierten Aspekte bleiben hier außen vor. Im Folgenden wird vor allem die definitorische Seite betrachtet.[29]

Formale Basis

Die grundlegenden Elemente sind die *atomaren Klassen* und *atomaren Rollen*.[30] Klassen sind einstellige und Rollen zweistellige logische Prädikate. Die

[28] Vgl. [FL85] S. 32 und [FLP74] S. 448f.
[29] Das Folgende basiert hauptsächlich auf [BN02].
[30] In [BN02], S. 50, bedeutet „concept“ Klasse oder Menge von Individuen. Begriffe samt ihrer Definitionen werden als „terminology“ bezeichnet und der Begriff („term“) repräsen-

komplexen Klassen werden aus diesen zusammengesetzt. Wenn nicht anders angegeben, werden die Buchstabe A und B für die atomaren Klassen, und die Buchstaben C und D für komplexe Klassenbeschreibungen verwendet. Die verschiedenen Beschreibungslogiken werden nach ihren Konstruktoren unterschieden. Die grundlegende Sprache wird mit $\mathcal{AL}$ (*Attributive Language*) bezeichnet. Die formale Syntax ist:

$$
\begin{array}{rcll}
C, D & \rightarrow & A \mid & \text{Atomares Konzept} \\
 & & \top \mid & \text{Universalkonzept} \\
 & & \bot \mid & \text{Konzept ohne Inhalt} \\
 & & \neg A \mid & \text{Atomare Negation} \\
 & & C \sqcap D \mid & \text{Schnitt} \\
 & & \forall R.C \mid & \text{Wertbeschränkung} \\
 & & \exists R.\top. & \text{Existenzbeschränkung}
\end{array}
$$

Mit dieser Sprache lässt sich bspw. Folgendes ausdrücken. Wenn *Weiblich* und *Person* atomare Klassen sind, dann beschreiben $\mathsf{Person} \sqcap \mathsf{Weiblich}$ und $\mathsf{Person} \sqcap \neg\mathsf{Weiblich}$ Frauen und Männer. Wenn $\exists\mathsf{hasChild}.\top$ eine atomare Rolle und ebenfalls atomar ist, dann beschreiben $\mathsf{Person} \sqcap \exists\mathsf{hasChild}.\top$ und $\mathsf{Person} \sqcap \mathsf{hasChild}.\mathsf{Female}$ einmal die Menge an Personen, die mindestens ein Kind haben und zweitens die Personen, die nur Töchter haben. Um auszudrücken, dass eine Person kein Kind hat, schreibt man $\mathsf{Person} \sqcap \exists\mathsf{hasChild}.\bot$.

Die Semantik von $\mathcal{AL}$ basiert auf der Interpretation $\mathcal{I}$, die aus einer nichtleeren Menge von Individuen, $\Delta^{\mathcal{I}}$, und einer Interpretationsfunktion, $^{\mathcal{I}}$, besteht, die jeder atomaren Klasse A eine Menge $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ zuordnet, und jeder atomaren Rolle R die zweistellige Relation $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Für die übrigen elementaren Formeln gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
\top^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \\
\bot^{\mathcal{I}} & = & \emptyset \\
(\neg A)^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\exists R.\top)^{\mathcal{I}} & = & \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}}\}.
\end{array}
$$

Zwei Klassen C und D sind äquivalent, $C \equiv D$, wenn gilt $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ für alle Interpretationen $\mathcal{I}$.

tiert „intensional knowledge“ und ist identisch mit seiner Definition. Im Folgenden wird deshalb der Ausdruck „concept“ mit „Klasse“ übersetzt, um Verwechslungen mit der sonst verwendeten Übersetzung von „concept“ mit „Begriff“ zu vermeiden.

Beschreibungslogiken treffen gewisse (logische) Annahmen über die Struktur der Welt. So sind bspw. diese beiden Formeln in jeder Beschreibungslogik gültig: $C \sqcup \neg C \sqsubseteq \top$ und $\bot \sqsubseteq C \sqcap \neg C$. Damit sind alle Beschreibungslogiken begrifflich oder terminologisch betrachtet boolesche Verbände.[31]

Terminologie

Äquivalenz, $\equiv$, und Subsumption, $\sqsubseteq$ sind die grundlegenden Relationen, um Ausdrücke (Terme) zu beschreiben:

$$\begin{aligned} C \sqsubseteq D &= C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \\ R \sqsubseteq S &= R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}} \\ C \equiv D &= C^{\mathcal{I}} \equiv D^{\mathcal{I}} \\ R \equiv S &= R^{\mathcal{I}} \equiv S^{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Mit C und D als Klassen und R und S als Rollen. Alle Äquivalenzen und Subsumptionen bilden die Axiome der Terminologie. Axiome mit atomaren Klassen auf der linken Seite sind die Definitionen.

In Beschreibungslogiken wird also unter Definition eine Äquivalenz verstanden, bei der das linke Symbol der Formel ein atomares Konzept ist, wie in diesem Beispiel

$$\mathsf{Mutter} \equiv \mathsf{Frau} \sqcap \exists \mathsf{hatKind.Person}$$

Das entspricht der mathematisch-logischen Auffassung von Definition bei der das Definiendum nur ein Symbol ist, das durch den Ausdruck rechts vom Definitionszeichen überall, wo es vorkommt, ersetzt werden kann. Subsumptionen, bei denen das linke Symbol eine atomare Klasse ist, werden Spezialisierungen genannt. Sie sind in gewisser Weise unvollständige Definitionen.

Die Axiome einer Terminologien werden in Beschreibungslogiken als TBox bezeichnet. Hier ein Beispiel einer Terminologie von Verwandtschaftsbeziehun-

[31] Die beiden angeführten Formeln sind das Komplementärgesetz; Idempotenz, Kommutativ-, Assoziativgesetz gelten offensichtlich. Distributiv- und Absorptionsgesetze siehe [RKH11], S. 9., 29.

gen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Frau} &\equiv \mathsf{Person} \sqcap \mathsf{Weiblich} \\
\mathsf{Mann} &\equiv \mathsf{Person} \sqcap \neg\mathsf{Frau} \\
\mathsf{Mutter} &\equiv \mathsf{Frau} \sqcap \exists\mathsf{hatKind}.\mathsf{Person} \\
\mathsf{Vater} &\equiv \mathsf{Mann} \sqcap \exists\mathsf{hatKind}.\mathsf{Person} \\
\mathsf{Eltern} &\equiv \mathsf{Mutter} \sqcup \mathsf{Vater} \\
\mathsf{Grossmutter} &\equiv \mathsf{Mutter} \sqcap \exists\mathsf{hatKind}.\mathsf{Eltern} \\
\mathsf{Sohn} &\equiv \mathsf{Eltern}^{-} \sqcap \mathsf{Mann}
\end{aligned}
$$

Assertorische Aussagen

Mit Hilfe der in der Terminologie definierten Klassen und Rollen können Aussagen über konkrete Individuen formuliert werden. Diese sind als logische wahre Behauptungen über einen Anwendungsbereich zu sehen und gehören der sogenannten ABox an. Die Aussagen betreffen entweder Klassen- oder Rollenzugehörigkeit. Für die Verwandtschaftsterminologie seien z. B. Peter und Anne die Kinder von Frank und Julia, und Monika sei die Großmutter von Peter:

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{Vater}(Frank) & \mathsf{Mutter}(Julia) \\
\mathsf{hatKind}(Frank, Peter) & \mathsf{hatKind}(Frank, Anne) \\
\mathsf{hatKind}(Julia, Peter) & \mathsf{hatKind}(Julia, Anne) \\
\mathsf{Grossmutter}(Monika, Peter) &
\end{array}
$$

Aus diesen Fakten lassen sich mit Hilfe der Axiome ableiten, dass Frank ein Mann ist, Julia und Monika Frauen sind, und Monika die Mutter von Frank oder Julia sein muss. Hingegen lässt sich mit diesen Aussagen nicht das Geschlecht der Kinder ableiten, oder wessen Mutter Monika ist.

Hier wird der Anwendungsfall der Beschreibungslogiken, der Aufbau von Wissensbasen, besonders deutlich. Die Axiome dienen dazu im Zusammenspiel mit dem Weltwissen weiteres Wissen generieren zu können. Gleichzeitig ist das System offen für die Aufnahme neuer Fakten (Postulat der offenen Weltbeschreibung). Dazu kommen weitere Funktionen wie die Prüfung der Konsistenz, d. h. der Axiome, und Erfüllbarkeit, d. h. Prüfung der Anwendbarkeit auf das Wissensgebiet.

Die Sprachfamilien der Beschreibungslogiken

Wenn man die Konstruktoren von $\mathcal{AL}$ erweitert, erhält man weitere Sprachen mit mehr Ausdrucksmöglichkeiten. Sie sind in Tabelle 3.4 auf Seite 91 aufgelistet. Je nachdem welche Konstruktoren erlaubt werden, wird die Sprachbezeich-

nung $\mathcal{AL}$ ergänzt um das entsprechende Symbol. $\mathcal{ALCQ}$ z. B. erweitert $\mathcal{AL}$ um den Klassennegator und die Anzahlsbeschränkung. Eigenschaften von Rollenkonstruktoren werden je nachdem, ob sie sich erweiternd oder beschränkend auswirken, durch hochgestellte und durch tiefgestellte Zeichen angezeigt.[32] Eine wichtige Sprachfamilie, die mit OWL 2 DL eng verwandt ist, wird mit $\mathcal{SROIQ}$ bezeichnet, wobei $\mathcal{S}$ für $\mathcal{ALC}$ steht. Die Bezeichnungsvorschriften sind also (historisch bedingt) nicht immer stringent.

Der Nominalkonstruktor entspricht in etwa den bei Kauppi und Freytag-Löringhoff vorgestellten Individualbegriffen. Da die Beschreibungslogiken aber sehr eng bei der klassischen mathematischen Logik bleibt, sind hiermit die Konstanten gemeint, wie man sie aus der Logik kennt.

Die unterschiedlichen Sprachfamilien begründen keine alternativen Begriffssysteme in dem Sinne, wie Begriffssysteme in dieser Arbeit aufgefasst werden. Denn für alle Sprachen gelten die booleschen Verbandsaxiome für die Konstruktion neuer Konzeptklassen.

3.6. Zusammenfassung

Ein System von Begriffen stellt eine Ordnung dar. Darin sind sich die hier vorgestellten Theorien einig. Wenn es aber ein bisschen mehr Struktur sein soll, dann gehen die Antworten doch weit auseinander. Die Formale Begriffsanalyse hat eine bemerkenswerte mathematische Theorie entwickelt und einen besonderen Typus von Verband hervorgebracht. Anhand dieser Theorie lassen sich aus einer Anzahl von gegebenen Begriffen alle möglichen Begriffe des Systems ermitteln. Der Nachteil dieser Lösung ist, dass zu einer Grundmenge von Begriffen die Merkmale und die Gegenstände genau bekannt sein müssen. Wie die Merkmale bestimmt werden können, ist nicht Bestandteil dieser Lösung. Richtig problematisch ist die als bekannt vorausgesetzte Menge von Gegenständen, denen ein Begriff zukommt. Das ist eine typisch mathematische Haltung, die leider auf Begriffe wie sie außerhalb der Mathematik vorkommen, nie zutrifft. Man versuche nur alle Gegenstände aufzuzählen, denen in der Anwendung so einfache Begriffe zukommen wie *Tisch*, *Auto* oder *Haus*. Interessant ist auch, dass eine genauere Analyse der begrifflichen Negation dazu führte, das gut bestellte Feld der Verbandstheorie zu verlassen. Die Negation eines Begriffes war unter Umständen kein Formaler Begriff mehr.

In der Neuen Logik ist der Status von Definitionen explizit untersucht worden. Die wichtigste Erkenntnis für diese Arbeit ist, dass die in einer Definition festgestellten begrifflichen Relationen als konstitutiv für die Struktur des Sys-

[32] [Baa+02], S. 497.

tems angesehen werden. Das bedeutet z. B., dass die begriffliche Summe von *Person* und *Gut* aus der Definition von *Auto* als existierend angenommen werden kann. Des Weiteren ist die Untersuchung über Individualbegriffe und ihr Beitrag zum Begriffssystem von Bedeutung, auch wenn das in dieser Arbeit nur im Kontext der inhaltlich größten Begriffe des Systems eine Rolle spielt. Im Widerspruch zur Formalen Begriffsanalyse wird angenommen, dass die Begriffsstruktur ein boolescher Verband ist. Man kann diese beiden Ansätze nicht einfach so gegenüberstellen, da beide von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen. Aber die Annahme, dass jeder Begriff ein Negat hat, ist gemäß der hier aufgeworfenen Frage zu unreflektiert.

Kauppis Theorie ist im Gegensatz zur Neuen Logik und der Formalen Begriffsanalyse nicht ein klar umrissenes Territorium. Man kann sagen, dass Kauppi in ihrer Arbeit die Voraussetzungen für verschiedene mögliche Systeme untersucht hat. Dabei stellt sie klar heraus, dass vor der Anwendung von Begriffsoperatoren die Existenz der gebildeten Begriffe in Betracht gezogen werden muss. Sie geht davon aus, dass die Definition hier das Entscheidungskriterium liefern kann. Sehr wichtig in diesem Zusammenhang ist ihre Analyse über die begriffliche Negation. Von großem Vorteil für diese Arbeit ist auch die deutliche Trennung der Extension der Begriffe. Diese muss über eigene Axiome mit einem Begriffssystem verknüpft werden. Die Verbindung von Intension und Extension ist praktisch nie als gegeben hinzunehmen. Es gibt keine Inzidenzrelation, um es mit dem Terminus der Formalen Begriffsanalyse zu formulieren, es gibt nur gewisse Rahmenbedingungen. Zusätzlich zu den drei allgemein gültigen Axiomen (3.100), (3.101), (3.114) und der Definition (3.102) (Seiten 53-55), muss man weitere Annahmen zwischen Intension und Extension an exponierten Stellen des Begriffssystems treffen, wie z. B. zu den speziellen – und den individuellen Begriffen – interessanterweise nicht zu den undefinierten Begriffen. Die Verbindung von Intension und Extension ist also weder eine begriffssystemimmanente Angelegenheit noch eine Frage, die rein formal-logisch beantwortet werden kann. Das Formal-logische beschränkt sich auf diese sehr allgemeinen Rahmenbedingungen. Welche Begriffe Widersprüche, d. h. unvereinbar, sind oder nicht, ist gewissermaßen eine Entscheidung, die von außen ins System getragen wird. Das kann man auch als Kritik an dieser Theorie auffassen, so wie das Bertrand Russel in seinem Buch über die Leibnizsche Logik getan hat, wenn er schreibt, dass es sich bei der Feststellung der Unvereinbarkeit um ein synthetisches Urteil a priori handelt.[33]

Auf der Bedeutungsebene eines Lexikons spielt die Anwendung, die Extension, nur eine geringe Rolle. Es wird allgemein vorausgesetzt, dass die Anwendung

[33] Vgl. [Rus71] S. 19, zitiert nach [Kau60] S. 112 Fußnote 1.

der Lexeme nicht nur möglich, sondern tatsächlich vorhanden und relevant ist. Wie und in welchem Umfang, das ist weder Bestandteil der Bedeutungsdefinition noch des Lexikons überhaupt. Dennoch ist hier festzustellen, dass bei rein intensionaler Betrachtung der Begriffe, die Extension nicht ganz außer Acht gelassen werden darf. Der Widerspruch und damit auch die Unvereinbarkeitsbeziehung zwischen Begriffen lassen sich nur erkennen mit Rückgriff auf die Zukommen-Relation. Ebenso haben nicht ganz selten vorkommende quantifizierende Ausdrücke in den Definitionen immer einen Bezug zum Umfang der Begriffe. Diese Bestimmungen lassen sich durchaus begrifflich formulieren, was allerdings ein bisschen überspannt anmuten kann. Das Kapitel 5 bietet dem Leser die Gelegenheit, dies selbst am Beispiel der Definition von *Faser* zu beurteilen.

Name	Syntax	Semantik	
Vereinigung	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{U}$
Existenz-quantifikator	$\exists R.C$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$	$\mathcal{E}$
Anzahlsbeschränkung	$\geq nR$ $\leq nR$ $= nR$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rvert \geq n\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rvert \leq n\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rvert = n\}$	$\mathcal{N}$
Bedingte Anzahlsbeschränkung	$\geq nR.C$ $\leq nR.C$ $= nR.C$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}} \rvert \geq n\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}} \rvert \leq n\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert b \in \Delta^{\mathcal{I}} \rvert (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}} \rvert = n\}$	$\mathcal{Q}$
Inverse	R^{-}	$\{(b,a) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \mid (a,b) \in R^{\mathcal{I}}\}$	$\mathcal{I}$
Konverse	$\neg R$	$\{\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \setminus R^{\mathcal{I}}\}$	–
Rollenverkettung	$R \circ S$	$\{a,c \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge (b,c) \in S^{\mathcal{I}}\}$	–
Rollen-wert-Relation	$R \subset S$ $R = S$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow (a,b) \in S^{\mathcal{I}}\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \leftrightarrow (a,b) \in S^{\mathcal{I}}\}$	$\mathcal{R}$
Gleichheit	$u_1 \doteq u_2$ $u_1 \not\doteq u_2$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b \in \Delta^{\mathcal{I}}.u_1^{\mathcal{I}}(a) = b = u_2^{\mathcal{I}}(a)\}$ $\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b_1, b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}.u_1^{\mathcal{I}}(a) = b_1 \neq b_2 = u_2^{\mathcal{I}}(a)\}$	$\mathcal{F}$
Nominal	I	$I^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} mit \lvert I^{\mathcal{I}} \rvert = 1$	$\mathcal{O}$

Tabelle 3.4.: DL Sprachfamilien mit gängigem Symbol in letzter Spalte.

4. Lexikalisch-Semantische Netze

Semantische Netze sind geprägt von der kognitiven Psychologie und Modellierung. Ihre Entwicklung nimmt in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts ihren Anfang mit dem Ziel, die semantischen Sprachkomponenten in die Sprachverarbeitung zu integrieren, da anzusetzen, wo man mit syntaktischer Analyse allein nicht mehr entscheidend vorankam. Ganz einfach ausgedrückt ist ein semantisches Netz ein Graph mit Knoten, die im weitesten Sinne die Bedeutungen der Wörter repräsentieren, und Kanten, die Beziehungen zwischen diesen Wörtern repräsentieren. Diese Charakterisierung verdeutlicht die besondere Nähe zum Lexikon. Bedeutungen findet man nun mal in einem Bedeutungswörterbuch, und allgemein-linguistisch gesprochen sind die Sememe eng mit den Wörtern einer Sprache verknüpft und daher ein wesentlicher Bestandteil der Lexik. Semantische Netze gehen in der Regel darüber hinaus, und verfolgen auch das Ziel die semantischen Komponenten der Rede (*Parole*) abzubilden. Dieser Aspekt soll hier unberücksichtigt bleiben, deshalb fokussiert dieses Kapitels die lexikalischen Aspekte eines semantischen Netzes ein. Dort liegt bei allen Ansätzen der Hauptteil oder die Wurzel des Netzes. Man kann immer ein semantisches Netz ohne Bezug zur Rede aufstellen, aber nicht umgekehrt. Ein semantisches Netz hat seine Basis immer in der Lexik (*langue*).[1]

Außerhalb der Linguistik werden semantische Netze vor allem als Wissensrepräsentationsformen betrachtet und genutzt. Das Semantic Web basiert ganz entscheidend auf der Idee, die Seiten des Internets inhaltlich zu vernetzen.[2]

Im Folgenden werden allein die definitorischen Aspekte semantischer Netze betrachtet. Die Ansätze werden so interpretiert, dass die Bedeutung tragenden Lexikoneinträge, die Lexeme, Begriffen entsprechen, und ihre Definitionen die Grundlage der begrifflichen Relationen bilden. Der epistemologische Status ist hier also begrifflich im Gegensatz zu kognitiv-psychologisch zu sehen.

[1] Überblick über Geschichte semantischer Netze s. [Hel08], S. 19-24, und [Sow92].
[2] s. a. Kap. 3.5.

4.1. Semantische Relationen in der Lexik

In seiner Arbeit „Semantische Relationen in der Lexik und in Texten“ ([Sko81]) wendet Skorochod'ko die Ergebnisse der Bedeutungsanalyse anhand von Bedeutungswörterbüchern auf die Textanalyse an. Neben einer qualitativen Analyse, welche die Basis bildet, führt er verschiedene Maße ein, um die Analysen quantifizieren zu können. An dieser Stelle wird vor allem auf die Bedeutungsanalyse der Definitionen eingegangen.

Das System der Lexik ergibt sich in diesem Ansatz allein aus den Bedeutungsdefinitionen des Wörterbuches. Das Semem, als Einheit aus Worteintrag und dessen Bedeutung, bildet das Element des lexikalischen Systems. Er macht an dieser Stelle eine wichtige Einschränkung auf Substantive, die er als Träger der grundlegenden nominativen Komponente ansieht und daher auch als Träger des konzeptuellen Bedeutungskerns.[3] Vom Semem unterscheidet er die semantische Relation, welche zwei Sememe miteinander verknüpft. Er bettet diese Auffassung in eine Ontologie ein, die voraussetzt, dass jedem Semem ein Gegenstand entspricht, und jeder semantischen Relation eine Relation zwischen Gegenständen. Er schränkt jedoch ein, dass das lexikalische System nicht vollständig durch diese Beziehung determiniert ist.[4]

Ermittlung von Sememen und Relationen

Die Bedeutungsdefinition eines Wortes (Semem) in einem Wörterbuch wird einer Textanalyse unterzogen. Dabei wird die Definition in Konstituenten auf folgende Weise zerlegt. Als Beispiel dient die Definition von

Nebel – undurchsichtige Luft, die mit Wasserdampf gesättigt, aber auch durch Staub, Rauch, Ruß verunreinigt ist. ([Sko81], S. 11.)

Unmittelbare Konstituenten sind hier

- undurchsichtige Luft
- gesättigt mit Wasserdampf
- verunreinigt durch Staub, Rauch, Ruß

Jede unmittelbare Konstituente wird in einen nominativen Bedeutungsteil, der sich auf einen Gegenstand, eine Handlung, eine Eigenschaft oder dergleichen bezieht, und in einen relationalen Bedeutungsteil zerlegt, der eine Beziehung

[3] [Sko81], S. 3.
[4] [Sko81], S. 4.

zwischen den Gegenständen bezeichnet. Im Beispiel sind folgende nominativen Bestandteile enthalten:

- undurchsichtig- Luft
- sättigen- mit- Wasserdampf
- verunreinigen- durch- Staub, Rauch, Ruß

und folgende relationalen Bestandteile

- Subklasse-sein (Luft oder undurchsichtige Luft)
- Material-sein (gesättigt mit Wasserdampf)
- Resultat-sein (verunreinigt durch Staub, Rauch, Ruß)

Die relationalen Bestandteile treten im Text in verschiedenen Formen auf, als bestimmte Substantive wie „Art“, „Gattung“, „Teil“, Beziehungsverben wie „haben“, „bestehen“, Flexionsendungen und Wortstellung wie „Hans liebt/e Jutta“ (Unterschied in Bedeutung: Jutta liebt/e Hans), Präpositionalphrasen wie „in der Stadt“ u. ä. Relationen kennzeichnende Ausdrücke. Sie können aber auch gar nicht explizit aufgeführt sein. Die Kopula „sein“ steht sehr häufig, besonders im definitorischen Zusammenhang, für die Oberbegriffsbeziehung (Subklasse-sein).

Die nominativen Bestandteile werden weiter analysiert indem ihre Bedeutungen im Wörterbuch aufgesucht, und diese dann dem gleichen Verfahren unterzogen werden. Dieser rekursive Prozess ist beendet, wenn es nur noch Konstituenten gibt, die keine Definition im Lexikon haben. Die Konstituentenanalyse ist die Grundlage für die Bestimmung der semantischen Relationen zwischen den einzelnen Lexikoneinträgen bzw. den Sememen. Die nominativen Bestandteile sind, als die distinktiven semantischen Merkmale, die Elemente des Systems. Das Vorhandensein der Relationen zwischen diesen Elementen ergibt sich zum einen aus der Konstituentenanalyse, die aber noch nichts aussagt über die Art der Relation. Für diese Analyse legt Skorochod'ko eine Liste von 22 zweistelligen Relationen vor, die er für vollständig oder zumindest für ausreichend hält, um alle Relationen der Lexik abzubilden (s. Tabelle 4.1, Seite 112).[5]

[5] [Sko81], S. 13 u. S. 186. Erläuterung der Kodes weiter unten. Durch Addition von 200 auf einen Kode wird die inverse Relation, und durch Addition von 400 die Negation der Relation kodiert.

Darstellungsarten

Skorochod'ko beschreibt drei Darstellungsmöglichkeiten: das semantische Netz, die semantische Tabelle und die Kodierung in einer analytischen Form. Als Beispieldefinitionen dienen:[6]

Koch – Meister in der Zubereitung von Speise.

Küche – ist eine Räumlichkeit mit Kochherd zur Zubereitung von Speise.

Daraus ergibt sich das in Abbildung 4.1 dargestellte semantische Netz. *Meis-*

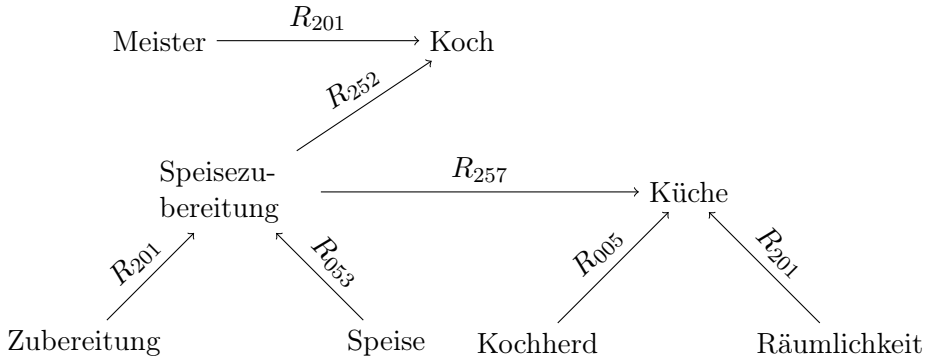


Abbildung 4.1.: Semantisches Netz für *Koch*.

ter, *Räumlichkeit* und *Zubereitung* sind Oberbegriffe. Wird, wie hier, die Relation von den Oberbegriffen zum Unterbegriff kodiert, d. h. der Pfeil geht vom Oberbegriff zum Unterbegriff, dann wird der entsprechende inverse Relationskode als Beschreibung gewählt (R_{201} anstatt R_{001}). Die *Speisezubereitung* findet in der *Küche* statt, daher der Kode R_{057}, jedoch wiederum invers dargestellt (R_{257}); die Aufgabe des *Kochs* ist es, die *Speise zuzubereiten*, was ausgehend von der *Speisezubereitung* durch R_{252} kodiert wird. Der *Kochherd* ist Teil der *Küche* und wird mit dem Kode R_{005} annotiert. Die *Speise* ist das Objekt oder Resultat der *Speisezubereitung*, und die entsprechende Relation ist daher R_{053}. Diese Darstellung stellt nur die unmittelbaren Beziehungen bzw. die unmittelbaren Konstituenten dar; die abgeleiteten Beziehungen, z. B. zwischen *Koch* und *Speise*, ergeben sich über den Pfad zwischen den beiden Knoten.

Die tabellarische Darstellung in 4.2 auf Seite 113 führt die Sememe in den Zeilen und Spalten auf und die Relationen in den einzelnen Zellen der Tabelle,

[6] [Sko81], S. 26.

wobei die Sememe in den Zeilenköpfen die erste Stelle der Relation und die Spaltenköpfe die zweite Stelle kennzeichnen. Sie zeigt jeweils beide Relationsrichtungen auf (siehe z. B. *Koch-Meister* und *Meister-Koch*).[7]

Bei der analytischen Darstellungsweise sind alle Sememe vom Typ X und alle Relationen vom Typ R (daher der Name RX-Kodierung). Die Sememe werden durch Indices voneinander unterschieden, zusätzlich wird ihr Rang durch eine hochgestellte Zahl gekennzeichnet.[8] Die elementaren Sememe werden durch X_i^0 kodiert und die abgeleiteten Sememe dann entsprechend durch X_i^1, X_i^2, X_i^3 .... Die Relationskodes sind diejenigen aus Tabelle 4.1. Angewandt auf die Beispieldefinitionen erhält man:

$$X_a^2 = R_{001} X_b^0 R_{052} X_c^1 \tag{4.1}$$

$$X_f^2 = R_{001} X_g^0 R_{205} X_h^0 R_{057} X_c^1 \tag{4.2}$$

$$X_c^1 = R_{001} X_d^0 R_{253} X_e^0 \tag{4.3}$$

mit $X_a^2 =$ *Koch*, $X_b^0 =$ *Meister*, $X_c^1 =$ *Zubereitung von Speise*, $X_d^0 =$ *Zubereitung*, $X_e^0 =$ *Speise*, $X_f^2 =$ *Küche*, $X_g^0 =$ *Räumlichkeit* und $X_h^0 =$ *Kochherd*.

Das Definiendum besetzt immer die erste Stelle der Relation, so dass *Koch* Unterbegriff zu *Meister* ist, und dass der *Koch* bestimmt ist für die *Zubereitung der Speise*. Bei X_f^2 liest es sich so, dass die *Küche* eine Art *Räumlichkeit* ist, dass sich in ihr ein *Kochherd* befindet (inverse Relation!) und schließlich, dass sie der Ort ist für *Zubereitung von Speise*. Bei der letzten Formel ist die *Zubereitung von Speise* eine Art *Zubereitung*, und das Objekt der Zubereitung ist die *Speise* (wiederum inverse Relation!).

Skorochod'ko ([Sko81], S. 27) behauptet, dass die Kodes für Sememe durch ihre Formel in anderen Formeln, in denen sie vorkommen, substituiert werden können. Dadurch wird z. B. X_c^1 in die Formel für X_a^2 eingesetzt, so dass man erhält

$$X_a^2 = R_{001} X_b^0 R_{052} (R_{001} X_d^0 R_{253} X_e^0) \tag{4.4}$$

Das hat zur Folge, dass der *Koch* auch Unterbegriff zu *Zubereitung* wird. Das Fehlen des Definiendi der substituierten Formel führt dabei zu einer nicht gewollten Fehlinterpretation der Bedeutung.

[7] Es gilt daher immer $a_{ij} = a_{ji} \pm 200$.

[8] Unter dem Rang eines Semems versteht Skorochod'ko den längsten Pfad von diesem Semem zu einem Ausgangslexem von dem es abgeleitet ist ([Sko81], S. 26). In Abbildung 4.1 wäre *Meister* vom Rang 0 und *Koch* vom Rang 2. Wenn man annimmt, dass dieser Ausschnitt eines Lexikons tatsächlich die ganze Lexik darstellte.

Maße

Skorochod'ko hat verschiedene Maße entwickelt, die basierend auf den vorgestellten Analyseverfahren, sowohl die ganze Lexik als auch die Wörter quantitativ abbilden können. Die semantische Kohärenz beschreibt den Grad der Vernetzung der Lexik. Die semantische Kompaktheit kennzeichnet die Stärke der semantischen Relationen in der Lexik. Die semantische Deriviertheit setzt die Anzahl der Ausgangssememe in Zusammenhang zur gesamten Wortanzahl der Lexik. Auf der Wortebene führt Skorochod'ko die Dependenzgruppenkapazität an, als Maß für die Produktivität eines Semems innerhalb der Lexik, den Rang eines Wortes im Netz, die Zahl der semantischen Komponenten eines Semems sowie das systemische Gewicht des Wortes in der Lexik.

Die Dependenzgruppenkapazität eines Wortes ist die Anzahl der Wörter, die von ihm abgeleitet sind. Dieser Wert kennzeichnet die Produktivität eines Wortes in der Lexik. Der Rang eines Wortes ist der Wert der maximalen Ableitungsfolge zu einem der Ausgangssememe dieses Wortes; das Wort mit dem höchsten Rang ist gleich dem Wert des Rangs der Lexik. Zwischen Dependenzgruppenkapazität und Rang besteht folgender Zusammenhang: je kleiner der Rang desto höher die Dependenzgruppenkapazität. Das systemische Gewicht eines Wortes wird definiert durch die Anzahl der Pfade, die von ihm weg als auch zu ihm hin führen. Dieser Wert kennzeichnet die Vernetzung des Wortes in der Lexik.

Semantische Kohärenz

Zur Demonstration seien folgende Definitionen gegeben:[9]

Möbel – undefiniert.

Tisch – Möbelstück mit einer breiten Platte auf hohen Beinen.

Stuhl – Möbel zum Sitzen, mit Rückenlehne, für einen einzelnen Menschen.

Durch das Konstituentenanalyseverfahren ergeben sich zwei Arten von semantischen Verknüpfungen. Ein Semem ist Teil der Definition eines oder mehrerer anderer Sememe, letztere sind abgleitet oder deriviert vom ersteren, oder ein Semem enthält ein oder mehrere Sememe als Bestandteil seiner Definition. Den ersten Fall nennt Skorochod'ko semantische Verknüpfung (s. Abbildung 4.2, (a)), den zweiten semantische Kopplung (s. Abbildung 4.2, (b)). Die semantische Kohärenz basiert auf diesen beiden Beziehungen. Sie geht aus von der kombinatorischen Anzahl von möglichen Paarbildungen aller Wörter t der

[9] Vgl. [Sko81], S. 32.

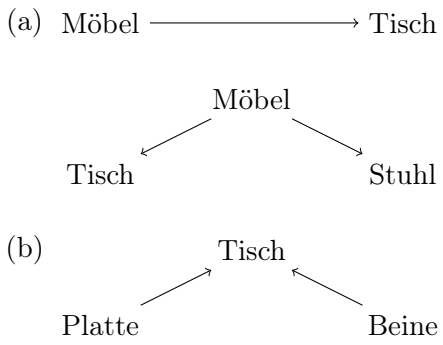


Abbildung 4.2.: Semantische Verknüpfung (a) und semantische Kopplung (b).

Lexik, $t(t-1)/2$, und setzt diese ins Verhältnis zu der Anzahl der Paare, die miteinander in der Lexik semantisch verbunden sind. Skorochod'ko unterscheidet die starke, die schwache sowie die gewichtete semantische Kohärenz.

$$S = \frac{2kn}{t(t-1)} \quad \text{starke semantische Kohärenz} \tag{4.5}$$

$$S' = \frac{2n}{t(t-1)} \quad \text{schwache semantische Kohärenz} \tag{4.6}$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{d} S_i M_i}{t} \quad \text{gewichtete semantische Kohärenz} \tag{4.7}$$

t ist die Anzahl der Wörter (Sememe) des Lexikons, n die Anzahl der Wortpaare, die miteinander gekoppelt oder verknüpft sind, S_i ist die i-te Gruppe semantisch miteinander gekoppelter oder verknüpfter Wörter, M_i die Anzahl der Wörter der i-ten Gruppe, und d schließlich die Anzahl der Gruppen.

Die starke semantische Kohärenz bedeutet, dass es kein Paar von Wörtern gibt, das nicht miteinander gekoppelt oder verknüpft ist; in diesem Falle nimmt k den Wert 1 an, sonst 0. Bei den meisten Lexika, insbesondere den allgemeinsprachlich erklärenden Wörterbüchern, ist $S = 0$.[10] Skorochod'ko beschreibt zusätzlich ein weiteres Verfahren zur Berechnung der semantischen Kohärenz, das

[10] Es ist nicht klar, wie aussagekräftig die starke semantische Kohärenz tatsächlich ist. Sie ist nur dann ungleich Null, wenn es genau ein Ausgangssemem gibt von dem alle anderen Wörter abgeleitet sind und dann ist sie immer gleich Eins. Wenn es mehrere Ausgangssememe gibt, dann kann es auch Semempaare geben, die weder gekoppelt noch miteinander verknüpft sind, so dass $k = 0$. (s. Beispielnetz b in Abbildung 4.3). Tabelle 4 auf S. 53 in [Sko81] zeigt Werte ungleich Eins für die starke semantische Kohärenz für verschiedene Lexika.

Näherungswerte liefert, und erheblich komplexer ist als die gelisteten Formeln (ebd. S. 41). Warum er es anwendet, ist nicht ganz nachvollziehbar. Eventuell war er durch technische Beschränkungen dazu gezwungen.

In Abbildung 4.3 sind drei Beispielnetze a, b und c, letzteres besteht aus den beiden Netzen a und b. Für das Netz a ist die starke semantische Kohärenz 0, da die Semempaare $(2, 3)$, $(1, 5)$ und $(3, 5)$ weder miteinander gekoppelt noch verknüpft sind. Die schwache und gewichtete semantische Kohärenz sind beide $\bar{S} = S' = 2 \times 7/20 = 0,7$. Für das Netz b sind $S = \bar{S} = S' = 1$. Im Netz c ist wiederum $S = 0$ und $S' = 2 \times 17/90 = 0,38$. Die gewichtete semantische Kohärenz für c ist $\bar{S} = (0,7 * 5 + 0,38 * 5)/10 = 0,54$.

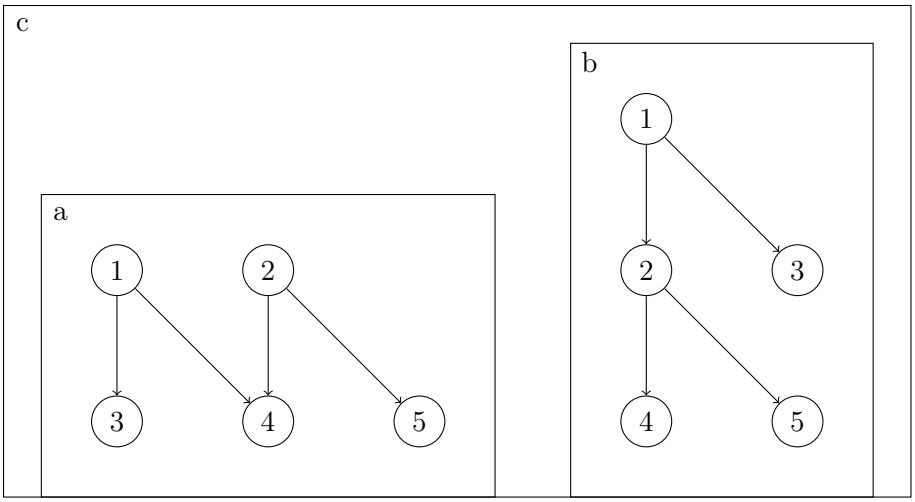


Abbildung 4.3.: Beispielnetze.

Semantische Kompaktheit

Die Stärke einer semantischen Beziehung zwischen zwei Sememen wird durch die Distanz innerhalb der Ableitungskette bestimmt. Ein Semem A, das durch ein Semem B definiert ist, ist mit diesem enger semantisch verbunden als mit einem anderen Semem E, das weiter unten in der Kette vorkommt, z. B. in einer Definitionsfolge $A > B > C > D > E$. Die Distanz kann auch zwischen einem der beiden (A und B) gemeinsamen Sememen bestehen wie in $A > C, B > C$. Auch die semantische Kompaktheit F basiert auf der semantischen Verknüpfung

und Kopplung.

$$F_{ij} = \frac{1}{s+1} \tag{4.8}$$

F_{ij} ist die Stärke zwischen zwei Sememen T_i und T_j, und s ist die Länge der minimalen Kette zur gemeinsamen Konstituente. Zwischen den Sememen 4 und 5 in Netz b in Abbildung 4.3 ist $F_{45} = 1/(2+1) = 0,33$.

Die semantische Kompaktheit K des ganzen Lexikons ergibt sich nach folgender Formel:

$$K = \frac{2F_{min} \sum_{i=1}^{n} F_i}{t(t-1)} \tag{4.9}$$

wobei F_{min} die geringste gemessene Stärke zweier Sememe im Lexikon ist, n und t sind definiert wie bei der Kohärenz. Für die Netze aus Abbildung 4.3 erhält man:

$$\begin{aligned}
K_a &= \frac{2 \cdot 1 \cdot (0,5+1+1+1+1+0,5+0,5)}{20} = 0,55 \\
K_b &= \frac{2 \cdot 1 \cdot (1+1+1+1+0,5+1+1+0,5+0,5+0,5)}{20} = 0,8 \\
K_c &= \frac{2 \cdot 1 \cdot (5,5+8)}{90} = 0,3
\end{aligned}$$

Semantische Deriviertheit

Die Deriviertheit D der Lexik beruht auf dem Verhältnis zwischen Ausgangssememen und terminalen Sememen. Dazu werden diese beiden Formeln eingeführt

$$D_1 = \frac{B}{t} \tag{4.10}$$

$$D_2 = \frac{f}{t} \tag{4.11}$$

Wobei B die Anzahl der Ausgangssememe, f die Anzahl der terminalen Sememe sind, und t, wie oben, die Anzahl der Wörter des Lexikons. Für die Beispielnetze ist $D_{1,a} = 2/5 = 0,4$, $D_{2,a} = D_{2,b} = 3/5 = 0,6$, $D_{1,b} = 1/5 = 0,2$, $D_{1,c} = 3/10 = 0,3$ und $D_{2,c} = 6/10 = 0,6$.

Die derivationelle Aktivität D_a gibt an, wie produktiv die Ausgangssememe sind, bzw. wie stark ihre Beteiligung beim Definieren anderer Sememe ist.[11]

$$D_a = \frac{\sum_{i=1}^{B} z_i^0}{B} \tag{4.12}$$

[11] Skorochod'ko setzt $D_a = t/B$ (S. 48). Das kann jedoch nicht stimmen, wie man leicht an Netz a im Beispielnetz 4.3 erkennen kann. Denn die Dependenzgruppen eines Semems müssen nicht disjunkt sein (und werden es in der Regel auch nicht sein). t/B ist also nur ein Spezialfall, wenn die Dependenzgruppen aller Ausgangssememe disjunkt sind.

Für die Beispielnetze in 4.3 ergeben sich $D_{a,a} = (3+3)/2 = 3$, $D_{a,b} = 5/1 = 5$ und $D_{a,c} = (3+3+5)/3 = 3,67$.

4.2. WordNet

Das WordNet steht für ein konkretes semantisches Lexikon der amerikanisch englischen Sprache, dessen Aufbau vor allem psycho-linguistisch motiviert ist. Neben dem ursprünglichen von George A. Miller gegründeten Projekt gibt es mittlerweile viele Folgeprojekte wie das EuroWordNet Projekt, das in eine eigene Organisation mündete, in dem alle WordNet ähnlichen Projekte vereint und zusammengeführt werden.[12] Einen Überblick aller im WordNet Projekt beteiligten Sprachen findet man auf der Internetseite der Global WordNet Association (GWA).[13] Aktuell werden dort 77 Projekte aufgeführt mit ca. 48 verschiedenen Sprachen und zusätzlich neun mehrsprachigen Projekten.[14]

Die Anfänge von WordNet waren eher pragmatischer Natur.[15] Es sollte ein Lexikontyp sein, der die Möglichkeiten eines Computers voll ausnutzt, wie die Aufbewahrung umfangreicher Informationen mit flexibler Darstellungsweise und vielfältigen Suchalternativen. Das Bild vom flexiblen Navigieren durch große und komplexe Datenstrukturen war eine der Leitideen. Gegenüber den klassischen Formaten sollte WordNet folgende Vorteile bieten: Explizite Kodierung elliptischer Relationen wie der Ober-Unterbegriffsbeziehung, Darstellung von Relationen, die über die Definition hinausgehen wie Begriffe mit gleichem Gattungsbegriff und Artbegriffe eines Wortes, und schließlich sollte das Lexikon die Inhalte kodieren, die für einen (durchschnittlichen) Sprecher der Sprache relevant sind.[16] WordNet enthält in der Version 3.0 ca. 207.000 Wort-Bedeutungspaare.

Der Aufbau des Netzes, seine Relationen und Kategorien, sollen so gewählt sein, dass diese Strukturen entweder in psychologischen Experimenten bestätigt werden können, oder aus psycho-linguistischen Erkenntnissen abgeleitet sind. Diese Grundlagen werden hier nur angedeutet und nicht im Detail ausgeführt.[17]

[12] Zur Unterscheidung von anderen WordNets wird das ursprüngliche WordNet „Princeton WordNet“ genannt. Wenn hier WordNet ohne Zusatz steht, ist stets das Princeton WordNet gemeint.

[13] `http://globalwordnet.org/wordnets-in-the-world`, abgerufen am 16.8.2016.

[14] ebd. Abgefragt am 14.8.2016.

[15] Das wird deutlich, wenn man die Quellen für die Auswahl der Wörter sieht. Brown-Corpus, „Little Basic Book of Synonyms and Antonyms“, „Synonym Finder“, „Roget's International Thesaurus“ und COMLEX ([Fel98a], S. xviiif).

[16] [Mil+90] S. 11.

[17] Zum Beispiel wird die Kodierung der Hyperonymie-Relation für Nomen auf der aus klinischen Experimenten nachgewiesenen Ableitungsfunktionen gegründet. (ebd. S. 15)

Die Wörter des Lexikons werden unterteilt in vier syntaktische Gruppen: Nomen, Verb, Adjektiv und Adverb.[18] Jede Gruppe wird wie eine Einheit behandelt, so dass Relationen nur innerhalb einer Gruppe Wörter verknüpfen.[19]

Synonymie

Die wichtigste Relation in WordNet ist die Synonymie-Relation. Jedem Wort bzw. jedem Semem wird eine Menge von Wörtern zugeordnet, die in verschiedenen Kontexten ohne Änderung der Bedeutung austauschbar sind. Diese Art der Synonymie ist also nicht absolut zu verstehen, sie hat immer Bezug zu einem konkreten Kontext. Eine Menge von Synonymen repräsentiert in WordNet einen lexikalisierten Begriff.[20] Der Anspruch der Synonymmengen (*synsets*) ist daher nur ausgelegt, lexikalisierte Begriffe zu unterscheiden und zu identifizieren. Zwar ist Synonymie eine lexikalische und keine semantische Relation, doch bietet sie die Möglichkeit über die Wortform zum Begriff zu gelangen, und umgekehrt vom lexikalisierten Begriff zu den Wortformen. Semantisch gesehen ist Synonymie hier als eine Art Bedeutungsähnlichkeitsfunktion aufzufassen.

Ein Beispiel aus der WordNet 3.1 online-Version:[21] Suchwort „table“ ergibt folgende Synonymmengen:

1. {table, tabular array},
2. {table} (Hypernym *Möbel (furniture)*),
3. {table} (Hypernym *Möbel (furniture)*, „Gloss“: gedeckter Tisch,
4. {table, mesa},
5. {table} (Hypernym *Versammlung (gathering)*),
6. {table, board}.

Wie man sieht reicht die Synonymmenge allein bei drei von sechs Bedeutungen nicht aus, um die verschiedenen Sememe zu unterscheiden. Das ist nicht nur bei diesem Beispiel so.

[18] Funktionswörter werden nicht berücksichtigt aufgrund der psycho-linguistischen These, dass sie im menschlichen Gehirn an anderer Stelle gespeichert werden (ebd. S. 2).

[19] [Fel98a] S. 9. Diese Einschränkung wurde in den Folgeprojekten aufgehoben (s. weiter unten).

[20] [Fel98a], S. 6 und xx: Synonym-Mengen reichen allerdings nicht aus, um (polyseme) Wörter semantisch zu unterscheiden. WordNet muss auf Definitionen zurückgreifen. Allerdings nennt man sie nicht Definitionen oder Bedeutungen, sondern „Glosses“, Umschreibungen.

[21] `http://wordnetweb.princeton.edu/perl/webwn`, abgefragt am 14.8.2016

Nomen

Die Relation in der Gruppe der Nomen ist die Hyperonymie-, bzw. ihre Inverse, die Hyponymie-Relation. Sie ist eine semantische Relation zwischen lexikalisierten Begriffen. Das Lexikon kodiert diese Relation explizit für jedes Nomen, so dass man von einem Wort ausgehend die Hierarchie rauf, runter und zur ‚Seite' wandern kann. Für das Semem *table 2* von oben erhält man ohne Weiteres die folgende Definitionskette:

> {entity} > {physical entity} > {object, physical objet} {whole, unit} > {artifact, artefact} > {instrumentality, instrumentation} > {furnishing} > {furniture, piece of furniture, article of furniture} > {table}

Die direkten Hyponyme (aus Platzgründen):
{table} > ...

> {altar, communian table, Lord's table}, {booth}, {breakfast table}, {card table}, {card table (casino)}, {coffee table, cocktail table}, {conference table}, {console table, console}, {counter}, {desk}, {dressing table, dresser, vanity, toilet table}, {drop leaf table}, {gaming table}, {gueridon}, {kitchen table}, {operating table}, {Parsons table}, {pedestal table}, {pier table}, {platen}, {pool table, billiard table, snooker table}, {stand}, {table-tennis table, ping-pong table, pingpong table}, {tea table}, {trestle table}, {working table, work table}, {round table, King Arthur's Round Table}.

Lexikalisierte Begriffe mit gleichem Hyperonym (Gattungsbegriff) wie *table*, {furniture} > ...

> {baby bed, baby's bed}, {bedroom furniture}, {bedstead, bedframe}, {bookcase}, {buffer, counter sideboard}, {cabinet}, {chest of drawers, chest, bureau, dresser}, {dining-room furniture}, {etagere}, {fitment}, {hallstand}, {lamp}, {lawn furniture}, {nest}, {office furniture}, {seat}, {sectional}, {Sheraton}, {sleeper}, {wall unit}, {wardrobe, closet, press}, {washstand, wash-hand stand}.

Und das ist nicht einmal die vollständige (Sub-)Hierarchie des Begriffes *table*.

Die finalen Oberbegriffe, auch semantische Primärbegriffe oder Primbegriffe genannt, in WordNet sind:[22]

[22] [Mil+90], S. 16. Das sind die undefinierten Begriffe.

{act, action, activity}	{natural object}
{animal, fauna}	{natural phenomenon}
{artifact}	{person, human being}
{attribute, property}	{plant flora}
{body, corpus}	{possession}
{cognition, knowledge}	{quantity, amount}
{communication}	{relation}
{event, happening}	{shape}
{feeling, emotion}	{state, condition}
{food}	{substance}
{group, collection}	{time}
{location, place}	{process}
{motive}	

Um den Angaben einer klassischen Definitionsstruktur näher zu kommen, führt WordNet eine weitere Relation für Nomen ein, die Teil-Ganzes-Relation, Part-Meronym-Relation genannt. Der Begriff *table 2* z. B. hat in der Relation „part-meronym“: *leg*, *table top* und *table ware*. Art-bildende Unterschiede werden dagegen nicht als eigene Relation kodiert, sie sind nur implizit als Teil der „Glosses“ vorhanden. Wieder zeigt sich, wie hoffnungslos es ist, auf eine klassische Definition zu verzichten, wenn es um die Wortbedeutung geht.

Eine weitere lexikalische Relation, Antonymie, wird bei Nomen expliziert kodiert, wenn vorhanden, z. B. *victory* - *defeat*. Abbildung 4.4 zeigt ein semantisches Netz mit den Nomen-Relationen.[23]

In einigen Fällen wird die Strenge Grenze der Relationen zwischen den Wortarten durchbrochen. Nomen, die Quantitäten bezeichnen wie z. B. *speed* haben eine explizite Attribut-Relation, die auf die Werte der Quantität verweist verweist, in diesem Fall sind das *fast* und *slow*.

Adjektive und Adverbien

Adjektive werden in WordNet grob in zwei Klassen aufgeteilt, deskriptiv und relational. Die ersteren kodieren typischerweise Werte von Attributen; die letzteren modifizieren ihr Nomen im Sinne einer Klassifikation, wie bei *man* - *criminal man*. Ihre grundlegende Beziehung ist Antonymie wie in *fast* - *slow* oder *light* - *heavy*. Da diese Relation sehr speziell ist, und nur die beiden Extreme einer Ordnung abbilden kann, gibt es eine weitere wichtige Relation, die Ähnlichkeit. Über diese kann dann eine indirekte Antonymie zwischen zwei Adjektiven

[23] [Mil+90], S. 25.

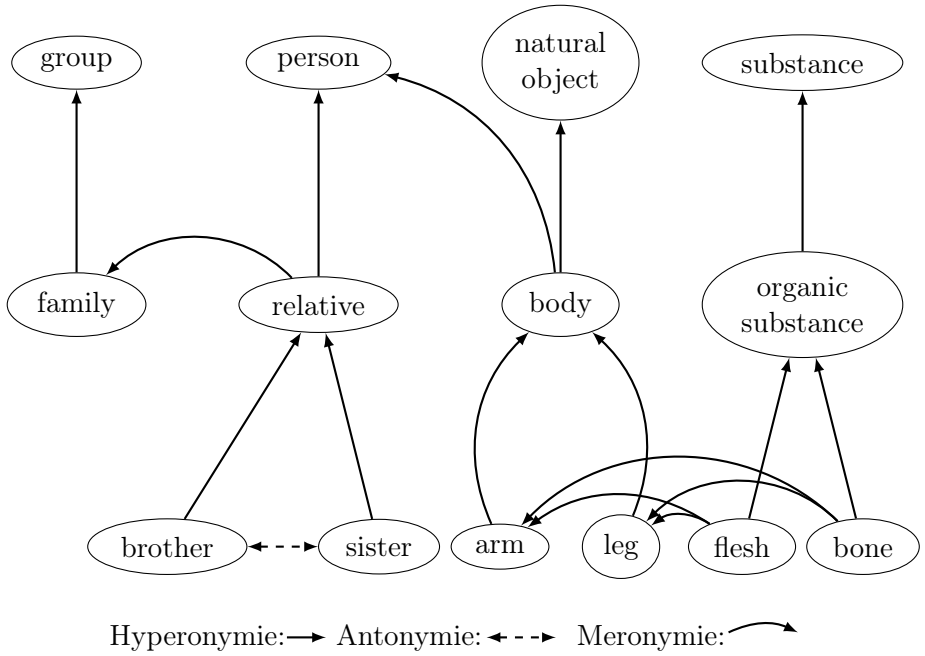


Abbildung 4.4.: Semantisches Netz in WordNet.

hergeleitet werden, wie in Abbildung 4.5 dargestellt.[24]

Attributive Begriffe, die Werte von quantitativen Begriffen wie Größe, Geschwindigkeit u. ä. sind, werden, wie bei den Nomen erwähnt, über die Attribut-Relation mit diesen verknüpft. Was jedoch nicht bedeutet, dass diese Attribute in den artbildenden Unterschieden, z. B. in der Definition von *Kanarienvogel*, wie „ein Kanarienvogel ist gelb“ als Relation in WordNet kodiert werden. *Gelb* wird nur zum Nomen *color* in Relation gesetzt.

Adverbien haben keine spezielle Relation. Sie werden meistens in Bezug gesetzt zum Adjektiv von dem sie hergeleitet sind.

Verben

Im Unterschied zu den vorgestellten Wortgruppen werden für die Verben modifizierte Relationen eingeführt. Alle Verben werden in 15 verschiedene Domänen eingeteilt:[25]

[24] [Fel98a], S. 51.
[25] [Fel98b], S. 70.

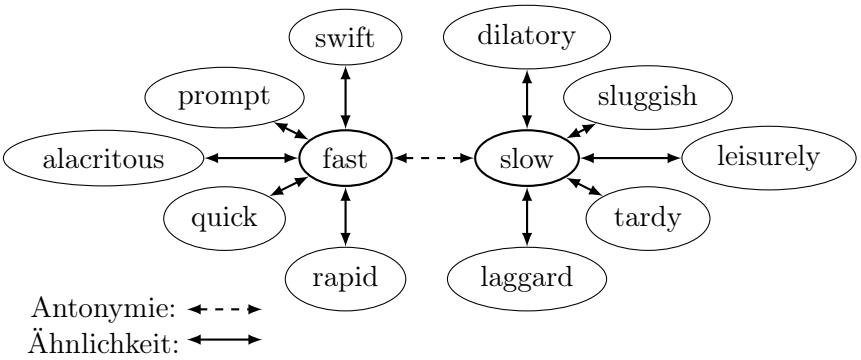


Abbildung 4.5.: Antonympaar *fast* - *slow*.

{change}	{bodily care and functions}
{cognition}	{communication}
{competition}	{consumption}
{contact}	{creation}
{emotion}	{motion}
{perception}	{possession}
{social interaction}	{weather}
{states}	

Die grundlegende Beziehung der Verben beruht nach Fellbaum auf der lexikalischen Schlussfolgerung (*entailment*). Zwei Verben V_1 und V_2 stehen in dieser Beziehung zueinander, wenn aus einem Satz „someone V_1“ logisch folgt, dass „someone V_2“, z. B. folgt aus dem Satz „someone is snoring“ der Satz „someone is sleeping“. Diese Relation wird nicht als äquivalent zur Ober-Unterbegriffsrelation angesehen, weshalb sie einen eigenen Namen erhält, die Troponymie-Relation. Diese Relation ersetzt die Hyponymie-Relation während die Hyperonymie-Relation auch für die Verben gilt. Wenn es unabhängig von der Troponymie-Relation eine logische Beziehung zwischen zwei Verben gibt, wie bei *walk* und *step*, dann wird diese ebenfalls über eine eigene Relation kodiert, Schlussfolgerung (*entailment*): aus „someone walks“ kann man schließen dass „someone steps“.

Darüber hinaus können Verben auch die Antonymie-Relation (hier Opposition genannt) und eine Ursachen-Relation aufweisen

Euro- und Global WordNet

Das Ziel von EuroWordNet (und der Folgeprojekte) ist der Aufbau einer multilingualen Datenbank. Die einzelnen Projekte arbeiten autonom, und konstruieren ihre jeweiligen eigenen WordNet-Systeme größtenteils nach eigener Maßgabe mit Hilfe der in der jeweiligen Sprache verfügbaren und bewährten lexikalischen Quellen. Um diese miteinander zu verbinden, wird ein vermittelndes Modul verwendet, der Inter-Lingual Index (ILI). Dessen Aufgabe ist es, die *synsets* der einzelnen Sprachen miteinander zu verbinden. ILI benutzt dazu als Startpunkt alle *synsets* des Princeton WordNet, so dass die *synsets* der Einzelsprachen mit denen des ILI verknüpft werden können. Um Vergleichbarkeit herzustellen, werden eine Top-Ontologie und verschiedene Domain-Ontologien angelegt, die mit den ILI Einträgen gekoppelt sind. Die Top-Ontologie hat die Aufgabe einen Rahmen bereitzustellen mit dessen Hilfe die verschiedenen Begriffe der verschiedenen Sprachen vergleichbar gemacht werden können. Die Domain-Ontologien sind praktischen Anwendungen vorbehalten wie Information Retrieval. Abbildung 4.6 auf Seite 109 zeigt das Ganze im Überblick.[26]

Die vom Princeton WordNet vorgegebene Beschränkung der Relationen auf Wortarten wird in EuroWordNet aufgegeben.[27] Zusätzlich werden weitere Relationen eingeführt, ihre Gesamtzahl beträgt 64. Die Relationen werden spezifiziert für Wortart und Datentyp. Datentyp bedeutet hier WordNet-Synonymmenge oder ILI Eintrag. Neu sind auch die beiden Merkmale Konjunktion und Disjunktion zur Unterscheidung, ob alle in der Relation stehenden Wörter eine Einheit bilden im Hinblick auf das Bezugswort. Z. B. dass die Teil-Ganzes-Beziehung zwischen *Flugzeug* und seinen Teilen, *Tragfläche*, *Fahrgestell*, *Triebwerk* und *Cockpit*, zusammen das Flugzeug bilden; hingegen bei *Flugzeug* und *Propellerantrieb* und *Düsenantrieb* dies nicht gilt. Tabelle 4.3 auf Seite 114 zeigt einen Ausschnitt der Relationen. Hier wird auch die Synonymie-Relation weiter ausgebaut. Denn die Princeton WordNet Synonymie-Relation erwies sich als nicht praktikabel für andere Sprachen, bzw. bei der Zusammenführung von Lexika verschiedener Sprachen.

Um die vielen Projekte mit ihren sehr unterschiedlichen Bedingungen in Bezug auf die Sprachtypologie, der linguistischen Tradition und der verfügbaren lexikalischen Quellen zu koordinieren, wird eine gemeinsame lexikalisch-konzeptuelle Basis benötigt, auf die sich alle Projekte beziehen können. Dazu werden Basisbegriffe, *base concepts* (BC), für verschiedene Sprachen ermittelt.[28]

[26] [Vos98], S. 8.

[27] [Alo+98], S. 26. Es ist auch nicht nachvollziehbar, Begriffsbeziehungen auf Wortarten einzuschränken.

[28] Nicht zu verwechseln mit Roschs „Basic Categories“.

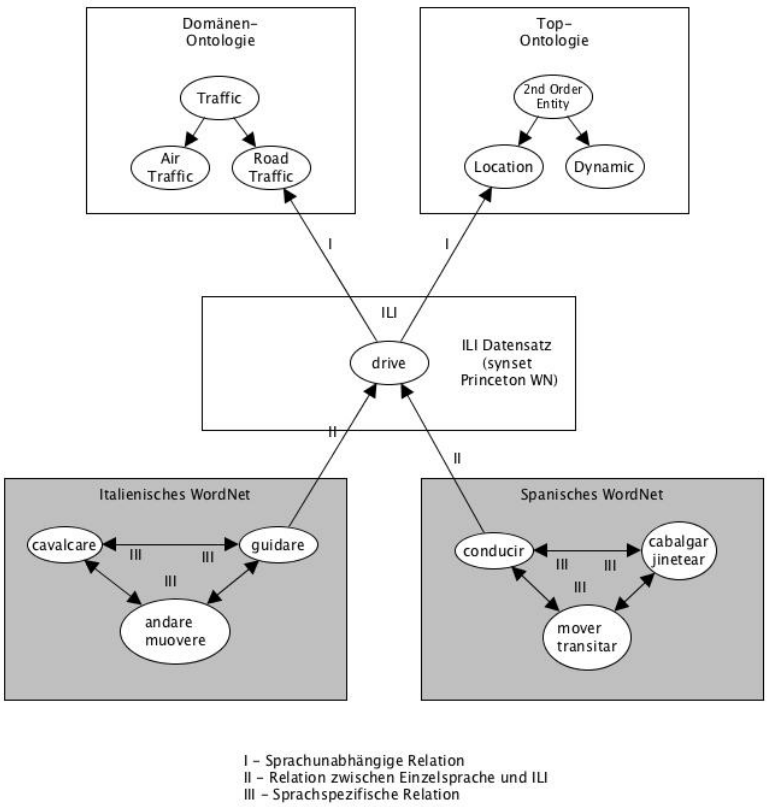


Abbildung 4.6.: Inter-Lingual Index.

Kriterien für Basisbegriffe sind ein hoher Rang in der Hierarchie (Hyperonymie-/Hyponymie-Relation), und möglichst viele semantische Relationen zu anderen lexikalisierten Begriffen. Das Gewicht W_i eines Begriffes errechnet sich dann aus der Anzahl aller seiner Unterbegriffe u_i im Verhältnis zu seiner eigenen Position in der Hierarchie (h_i), und im Verhältnis zur Größe der Hierarchie, bzw. Länge der Definitionskette k_i, in welcher der Begriff ein Glied ist:[29]

$$W_i = \frac{u_i k_i}{h_i} \tag{4.13}$$

Die Anzahl der Unterbegriffe als Kennzeichen für Produktivität ist selbstver-

[29] [Rod+98], S. 55.

ständlich. Man möchte zusätzlich möglichst allgemeine Begriffe erhalten, die sich gut als Oberbegriffe eignen, um andere Begriffe zu definieren. Aus der mit W_i bewerteten Liste der Wörter werden 20% der Wörter mit den höchsten W-Werten als BCs gewählt. Von den ca. 2500 BCs wurden diejenigen ausgewählt, die sich für alle Sprachen als Ausgangsbegriffe zur Bildung von WordNets eignen, die sogenannten *Common Basic Concepts* (CBC). Die endgültige Liste von CBCs besteht aus 1024 Begriffen. Ein BC wird in die Liste der CBCs aufgenommen, wenn es mindestens in zwei Sprachen als BC mit entsprechend hohem Gewicht ermittelt wurde. Wenn ein BC kein CBC ist, wird es als *Local Basic Concepts* (LBC) bezeichnet.[30] Die CBCs werden mit Hilfe der Top-Ontologie (Abbildung 4.7, Seite 115) definiert. Für diese werden dann in den Einzelsprachprojekten die *synsets* erzeugt und mit dem ILI verknüpft. Die Ontologie dient hier also dazu eine sprachunabhängige Bedeutungsdefinition bereitzustellen. Z. B. wird das CBC *fruit* als *Comestible*, *Object*, *Part* und *Plant* definiert. Die Verteilung der CBCs auf die Basisbegriffe der Ontologie zeigt Tabelle 4.4 auf seite 114.[31]

4.3. Zusammenfassung

Semantische Netze waren und sind in der Linguistik das Forschungsgebiet zur Darstellung der Bedeutung von Wörtern bzw. Lexemen. Motivation war zu Beginn der Entwicklung vor allem der Versuch die kognitive Struktur abzubilden. Diese wurde hier zwar nicht explizit dargelegt, es ist aber erstaunlich, wie wenig man davon im Ergebnis wiederfindet. Dieser Ansatz gepaart mit einer oft nur implizit vorausgesetzten tief verankerten Geringschätzung der gewöhnlichen Bedeutungsdefinition – mit Ausnahme von Skorochod'kos Ansatz, weswegen dieser auch so ausführlich vorgestellt wurde – disqualifiziert semantische Netze geradezu für eine Analyse von Bedeutungsdefinitionen. Heutzutage ist ihre Ausprägung vor allem pragmatisch orientiert, zur Darstellung von (Sprach-)Wissen in KI-Systemen wie z. B. Multinet, die dazu dienen, die morphologische und die syntaktische Sprachanalyse um die lexikalische Komponente zu ergänzen.[32]

Der entscheidende Kritikpunkt an den Verfahren sind die mehr oder weniger willkürlich gewählten lexikalischen Relationen. Skorochod'ko bildet hier eine rühmliche Ausnahme. Er setzt auf konkrete, echte Bedeutungsanalysen, jedoch

[30] Eine weitere Kategorie, die *Global Basic Concepts* (GBC), sind diejenigen Begriffe, die BCs in allen Sprachen sind (s. `http://globalwordnet.org/gwa-base-concepts/`, abgerufen am 16.8.2016).

[31] ebd. S. 66.

[32] Vgl. [Hel08].

erstellt er das Netz letztlich auch nur mit Hilfe von a priori festgesetzten Relationen. WordNet und andere dagegen, meinen sich von der Bedeutung komplett lösen zu können, indem sie sich bei ihrer Arbeit zwar auf Bedeutungswörterbücher und Sprecherkompetenz stützen, um letztlich ebenfalls nur die selbst definierten Relationen zu kodieren. Die Benutzung der Wörterbücher hat hier fast keinen systematischen Status mehr. Bis auf die Hyperonym- und Hyponymierelationen sind die Anzahl der Relationen, und vor allem ihre Definitionen, sehr unterschiedlich. Die Beschreibungslogiken, die in dieser Arbeit unter den Begriffstheorien einsortiert wurden, sehen sich hier auch als die Weiterentwicklungsstufe der semantischen Netze, die diesen Missstand überwunden hat.

Ein weiterer Grund, der semantische Netze ungeeignet macht, Bedeutungsdefinitionen zu analysieren, ist das ontologische Basisverständnis. Skorochod'ko sieht eine 1:1-Beziehung zwischen Wort und Gegenstand, und die semantischen Relationen als Abbilder von Gegenstandsrelationen. WordNet und andere aktuellere Netzdarstellungen bauen dagegen auf ontologische Grundmodelle. Dies hat zur Folge, dass begriffliche Strukturen von vornherein nur nach diesem Muster beurteilt werden können, und verhindert damit ebenfalls die Ermittlung von nicht-lexikalisierten Begriffen. Aus pragmatischen Gründen ist das verständlich, wie man bei den verschiedenen WordNet-Projekten leicht nachvollziehen kann. Kulturell und begrifflich bedeutet das eine Ausschaltung jedweder Unterschiede. Für den westlich geprägten Kulturraum mögen die Auswirkungen nicht so dramatisch sein. Würde man jedoch die Bedeutungsdefinitionen von Sprachen anderer semantisch ferner liegender Kulturen untersuchen, ist schwer vorstellbar, dass man so die Bedeutungen der Wörter dieser Sprachen adäquat erfassen könnte.

Kode	Relation	Erläuterung
001	Subklasse-sein	Ober- Unterbegriffsbeziehung
002	Teil-sein	Teil-Ganzes Beziehung
003	Bestimmt-sein-für-Verwendung	Verwendungszweck
004.	sich-über-etwas-befinden	Lage
005	sich-innerhalb-von-etwas-befinden	Lage
007	früher-stattfinden	zeitliche Beziehung
030	parallel-sein	Lage
031	gleich-sein	Gleichheit in Bezug zu einem Messwert
032	identisch-sein	Identität, (auch Synonymie)
033	gleichzeitig-stattfinden	zeitliche Beziehung
050	Subjekt-sein	Das Agens in einer Beziehung
051	Potentielles-Subjekt-sein	Fähigkeit das Agens in einer Beziehung zu sein
052	bestimmt-sein-für	Zweck, Bestimmung
053	Objekt-sein	Das Patiens in einer Beziehung
054	Potentielles-Objekt-sein	Fähigkeit das Patiens in einer Beziehung zu sein
055	Resultat-sein	Ergebnis eines Prozesses
056	Voraussetzung-sein	notwendige Bedingung
057	Ort-sein	räumliche Beziehung
060	Material-sein	Stoffangabe
061	Attribut-sein	Eigenschaft, Beschaffenheit
062	Maß-sein	Maßangabe
063	Menge-sein	Mengenangabe

Tabelle 4.1.: Skorochod'kos semantische Beziehungen.

	Meister	Koch	Zubereitung	Speise	Speisezubereitung	Kochherd	Räumlichkeit	Küche
Meister		201						
Koch	001				052			
Zubereitung					201			
Speise					053			
Speisezubereitung		252	001	253				257
Kochherd								005
Räumlichkeit								201
Küche					057	205	001	

Tabelle 4.2.: Semantische Tabelle für *Koch*.

Relationsart	Wortart	Etiketten	Datentypen
NEAR_SY-NONYM	N<>N, V<>V		WM<>WM
XPOS_-NEAR_SY-NONYM	N<>N, N<>AdjAdv, V<>AdjAdv		WM<>WM
HAS_HYP-ERONYM	N>N, V>V	dis, con	WM<>WM
HAS_HYPO-NYM	N>N, V>V		WM<>WM
XPOS_HAS_-HYPER-ONYM	N>V, N>AdjAdv, V>AdjAdv, V>N, AdjAdv>N, AdjAdv>V	dis, con	WM<>WM
XPOS_-HAS_-HYONYM	N>V, N>AdjAdv, V>AdjAdv, V>N, AdjAdv>N, AdjAdv>V	dis	WM<>WM
...	...	...	...

Tabelle 4.3.: Ausschnitt Relationentabelle EWN.

	Nomen	Verb	Summe
Entitäten 1. Ordnung	491		491
Entitäten 2. Ordnung	272	228	500
Entitäten 3. Ordnung	33		33
Summe	796	228	1024

Tabelle 4.4.: Verteilung CBCs auf Top-Level Ontologie und Wortarten.

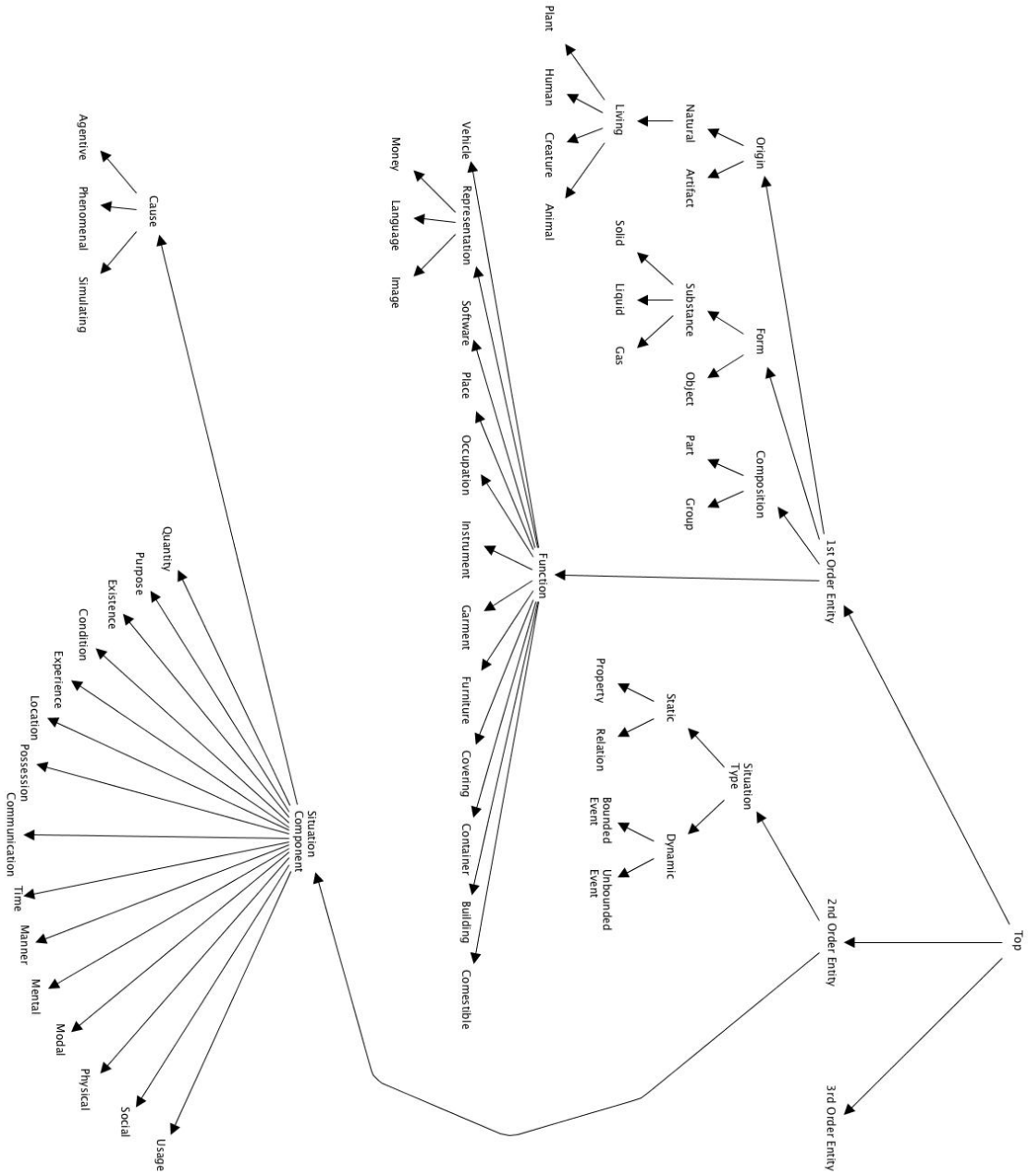


Abbildung 4.7.: EuroWordNets Top-Ontologie.

5. Bedeutungen und Begriffe

Die semantischen Netze sind, wie eben besprochen, wenig geeignet, Begriffsstrukturen in der Lexik aufzudecken. Die Formale Begriffsanalyse scheint auf den ersten Blick genau das zu sein, was diese Arbeit braucht. Sie hat jedoch einen entscheidenen Nachteil. Ein Formaler Begriff besteht immer aus Attributen und Gegenständen. Gerade die Menge der Gegenstände ist aber bei Lexemen, und ebenso im alltäglichen Gebrauch der Begriffe, eher unbestimmt. Wo die Formale Begriffsanalyse auf Lexeme angewendet wird, entfernt sich die Begriffsauffassung ganz entscheidend von dem, was man unter einem Begriff versteht. In [LLL10] z. B. werden die Lexeme zu Gegenständen, und die Attribute werden anhand der Definitionen oder nach eigener Kompetenz bestimmt. [Pri98] wendet die Formale Begriffsanalyse ebenfalls auf Bedeutungsdefinitionen von Lexika an, und führt dazu einen Konnotativen und einen Denotativen Kontext ein. Ersterer berücksichtigt Stilangaben zum Lexem, letzterer enthält zusätzliche Informationen über ein Thema, das den Mitgliedern einer Gruppe von Sprechern bekannt ist.[1] Diese Informationen kommen nicht aus den Bedeutungsdefinitionen selbst. Die Definitionen werden also ergänzt mit ‚Weltwissen' über die mit den Lexemen zu bezeichnenden ‚Gegenstände'. Damit verlässt man jedoch die vorliegenden Definitionen, und fügt ihnen auf mehr oder weniger willkürliche Weise systembedingte Angaben hinzu, damit es zum vorgegebenen Modell passt. Das hat nun nichts mehr mit dem Begriff zu tun, den diese Arbeit zu ermitteln versucht. Die Bedeutungsanalyse muss sich daher auf die Intension beschränken.

Die durch die Bedeutungsdefinitionen kodierten Begriffe bilden eine Ordnung. Das ist die einzige allgemein gültige Voraussetzung. Sehr verlockend ist die Möglichkeit, Ordnungen über Vervollständigungen in umfassendere Strukturen, den Verbänden, einzubetten. Das hat wiederum den Nachteil, dass gewisse Existenzannahmen über Suprema und Infima im Begriffssystem getroffen werden müssen. Das ist a priori nicht zulässig. Ob das Begriffssystem eine Verbandsstruktur bildet oder nicht, muss sich empirisch bestätigen. Es bleibt daher kein anderer Weg, als eine Methode zu finden, die Begriffsstruktur aus der Definition zu entwickeln.

[1] [Pri98], S. 19.

Die Begriffe werden im Lexikon in den Bedeutungsdefinitionen kodiert. Bedeutungsdefinitionen sind erstmal ganz gewöhnliche Sätze, wie sie auch in einem konkreten Text oder in gesprochener Rede vorkommen können. Der entscheidende Unterschied ist der Kontext. In einem Text, oder als gesprochene Rede, haben Teile des Satzes einen Bezug zu einer konkreten Situation, einem Geschehen oder bestimmten Gegenständen. Dieser konkrete Bezug fehlt in der Bedeutungsdefinition.

Im Folgenden werden einige Bedeutungsdefinitionen beispielhaft analysiert. Einen Zusammenhang zwischen Wortarten und Begriffen gibt es im Grunde nicht, jedoch lassen sich gewisse Tendenzen feststellen. Nomen lassen sich am ehesten als einstellige Begriffe repräsentieren; Verben bilden eher mehrstellige Begriffe und weniger eine ausgeprägte Ordnungsstruktur; Adjektive sind typischerweise Eigenschaftsbegriffe bei der eine Stelle durch einen Wert bestimmt wird. Die Bedeutung von Adverbien oder Partikel lassen sich fast gar nicht begrifflich erfassen. Hier scheint es eher so zu sein, dass sie eine bestehende Relation um eine Stelle erweitern oder, dass sie eine Stelle näher bestimmen. Die begriffliche Analyse ist sicher geeignet sehr viel einer Bedeutung zu erfassen, aber auch sie hat ihre Grenzen.

5.1. Bedeutungsanalyse

Die in Kapitel 3 vorgestellten Begriffstheorien wurden bisher nicht auf konkrete Lexika oder auch nur Teile solcher konsequent angewandt. Wenn man bedenkt, dass Begriff und Definition untrennbar miteinander verbunden sind, ist das in der Tat etwas verwunderlich. Es ist jedoch möglich eine begriffliche Analyse der Bedeutungsdefinitionen anhand von ganz gewöhnlichen Bedeutungswörterbüchern durchzuführen.[2] Das soll eine exemplarische Analyse verschiedener Definitionen zeigen. Ziel ist es, die sprachlich gegebene Bedeutungsdefinition so vollständig wie möglich in eine Begriffsstruktur zu überführen. Die Bedeutungsdefinition erfährt keine Bewertung, ob sie gut oder schlecht definiert ist.[3] Sie wird hingenommen wie sie ist, und begrifflich interpretiert. Entscheidend sind diese Punkte:

- Identifikation aller Begriffe der sprachlichen Oberflächenstruktur,

[2] Wobei eine minimale Anforderung an die Definitionen ist, dass sie sich an der klassischen Definitionstheorie nach Gattungsbegriffen und Artunterschieden orientiert. Abweichungen davon sind bis zu einem gewissen Grade tolerierbar.

[3] Eine solche Bewertung ist angebracht bei der Auswahl des Lexikons selbst. Danach aber muss die Analyse so strikt wie möglich einer Methode folgen, die ausschließlich auf die gegebene Definition Bezug nimmt. Sie sollte insbesondere keine vermeintlichen Verbesserungen oder Korrekturen im Sinne *ihrer* Methode vornehmen.

- Motivation für die Existenz von Begriffen, die nicht in der sprachlichen Oberflächenstruktur vorkommen,
- Auflösung der logischen Satzverknüpfungen in die begriffliche Struktur (z. B. und, oder, wenn-dann),
- Umsetzung von quantifizierenden Ausdrücken (z. B. meist, manchmal, immer, einige, alle, ...),
- Umsetzung von Ausdrücken, die logisch als freie Variablen angesehen werden können (z. B. *irgendeine* Länge).

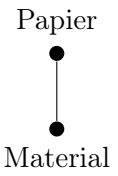
Eine Definition nennt immer eine Reihe von Begriffen sozusagen beim Namen, andere Begriffe sind vielleicht nicht unmittelbar aus dem Text der Definition ersichtlich. Hier ist die entscheidende Frage nach der Rechtfertigung für die Annahme eines Begriffes zu beantworten.

5.2. Nomen

Den Anfang macht die Bedeutung von Papier. Hier nochmals die Definition:

Papier – aus Fasern vorwiegend pflanzlicher Herkunft, auch von Stoffresten, Lumpen durch ein best. Verfahren hergestelltes dünnes, flächiges Material, das zum Beschreiben, Bedrucken und Verpacken dient. ([Kla])

Die zentrale Struktur ist die Oberbegriffsbeziehung. Papier ist ein Material. Das ist die Enthält-Relation: Der Begriff *Papier* enthält den Begriff *Material*.

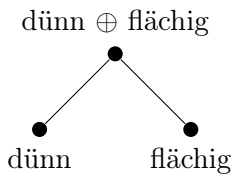


Um diesen Begriff gruppieren sich die Differenzbegriffe *Dünn* und *Flächig*: Das Material Papier ist dünn und flächig. Enthält nun der Begriff *Papier* auch die Begriffe *Dünn* und *Flächig*? Was ist denn „Dünn“? Seine Definition lautet: von geringer Stärke. Und „Stärke“ wiederum: Dicke, Durchmesser. Letztlich gelangt man bei beiden Merkmalen auf einen Begriff wie *Ausdehnung*. „Dünn“ und „flächig“ haben also eine eigene Ordnungsstruktur, und werden daher über eine Relation mit dem Begriff *Papier* verbunden.[4]

Die einfache Ordnungsstruktur der Enthält-Relation ist also schon bei *Material* am Ende. Die Verknüpfung der Differenzbegriffe mit dem Definiendum *Papier* erfolgt über die zweistellige Relation *Ausdehnung*, denn Papier hat die Ausdehnungseigenschaften dünn und flächig zu sein. Damit ist aber noch nicht entschieden, wie das im Detail aussieht. Die beiden Begriffe *Dünn* und *Flächig* gehören nach dieser Definition notwendig zum Begriff *Papier*. Begrifflich entsteht diese Notwendigkeit durch die Summenbildung. Wenn ein Begriff einem

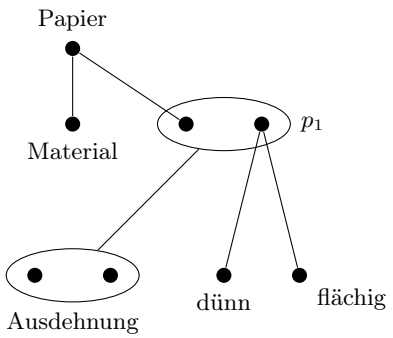
[4] Um die Analyse hier abzukürzen, wird der allgemeinste Oberbegriff *Ausdehnung* gewählt : dünn - Stärke - Durchmesser - Länge - Ausdehnung. Eine genauere Analyse von „dünn“ und „flächig“ erfolgt weiter unten im Kapitel 5.4.

Individuum zukommt, dann kommen alle in ihm enthaltenen Begriffe ebenfalls diesem Individuum zu. Hier ist nun die erste Entscheidung über die Gültigkeit eines neuen Begriffes zu treffen, der nicht explizit in der Definition und eventuell auch im ganzen Lexikon nicht genannt wird: die Summe der beiden Begriffe *Dünn* und *Flächig*.



Die Bedeutungsdefinition und auch der Anwendungstest, der zwei oder mehr Begriffe einem Individuum erfolgreich beilegt, legen das nahe. Denn die Theorie (Axiom (3.114)) formuliert, dass zwei Begriffe, die nicht dem gleichen Individuum zukommen können, unvereinbar sein müssen. Daraus folgt formal mindestens, dass ein Begriff diese beiden Begriffe und damit deren Summe enthält, wenn die beiden Begriffe demselben Gegenstand zukommen.

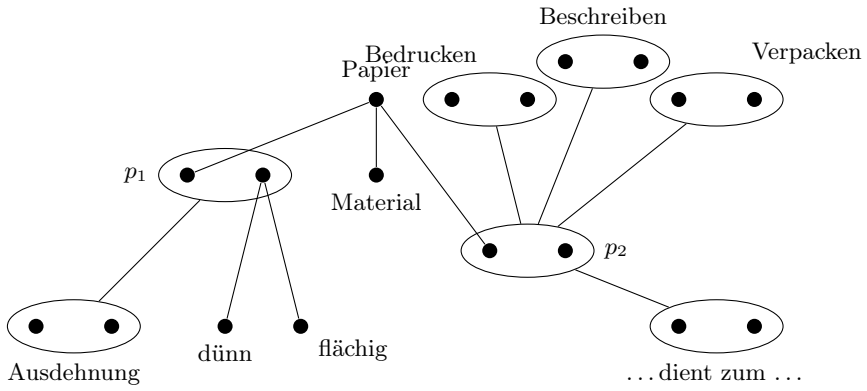
Die nächste Frage ist, wie sich diese Summe, der Begriff *Papier* und die Relation *Ausdehnung* zueinander verhalten? Die Relation *Ausdehnung* hat (mindestens) zwei Stellen. Beide dürfen weder *Papier* noch *Dünn* und *Flächig* enthalten, denn sonst kämen diese Begriffe allen Individuen zu, die irgendwelche Ausdehnungen haben. Es muss ein neuer speziellerer Ausdehnungsbegriff existieren, p_1, dessen zweite Stelle die Summe von *Dünn* und *Flächig* ist.



Der Begriff *Papier* enthält die erste Stelle des neuen Begriffes p_1. Die neue Relation ist nötig, um die durch die Definition behauptete Zusammengehörigkeit der Begriffe *Papier*, *Dünn* und *Flächig* zum Ausdruck zu bringen. Denn so bekommt jedes Individuum, dem der Begriff *Papier* beigelegt wird, auch zwingend die angeführten Eigenschaften. Das nebenstehende Diagramm verdeutlicht den Zusammenhang.

Damit ist der klassische Teil der Definition bestehend aus dem Gattungsbegriff und den artbildenden Unterschieden abgeschlossen. *Papier* wird weiter durch seine Verwendungsmöglichkeiten definiert. Dabei wird eine Aufzählung angegeben. In der Anwendung erfüllt *Papier* nicht all diese Anwendungen gleichzeitig: Es *dient zum* Bedrucken, oder zum Beschreiben, oder zum Verpacken. In Relation zu *Papier* gibt es etwas, was diese drei Begriffe verbindet, und das ist ihr Produkt. Da es zweistellige Begriffe sind, muss auch das Produkt zweistellig sein. Die Definition schließlich rechtfertigt die Existenz dieses Be-

griffes, p_2, der wiederum den allgemeineren Begriff *Dient-zum* enthält.[5] *Papier* enthält die erste Stelle dieses Begriffes. Hier das erweiterte Diagramm dazu.



Es geht weiter mit dem *Herstellungsverfahren*. Papier wird nach einem bestimmten Verfahren aus Fasern hergestellt. Diese Relation ist fünfstellig, wie sich bei der Analyse des Lexems *Herstellen 2.1* (Formel (5.5)) weiter unten zeigen wird. An dieser Stelle relevant ist nur eine Unterrelation mit drei Stellen. Aufgrund der Definition ist auch hier ein spezieller Herstellungsbegriff, p_3, zu postulieren. Die Verfahrensart gehört zum Herstellungsbegriff dazu, deshalb ist der Begriff in der zweiten Stelle von *Herstellen* enthalten.[6] Dabei enthält der Begriff *Papier* die dritte Stelle, das Ergebnis des Herstellens. Wieder fordert die Notwendigkeit der Definition, dass die erste Stelle dieses Begriffes den Begriff *Faser* enthält. Denn durch echtes Enthalten ist gewährleistet, dass der Begriff *Faser* in der Anwendung nicht zwingend mit dem *Herstellen* aus der Definition von *Papier* verknüpft ist. Zusätzlich ist noch die Herkunft der Faser als weitere Relation angegeben. Die Faser wird aus Pflanzen, Stoffresten oder Lumpen gewonnen. Diese Relation, p_4, ist gar nicht mit *Papier* verknüpft, sie wird über den Begriff *Faser* vermittelt, den sie wiederum auf der ersten Stelle enthält. Der Begriff *Faser* wird erst über eine ganze Kette anderer Begriffe aktiviert. Logisch denkbar wäre auch, dass er ganz oben stünde und die Begriffe $p_3(1)$, $p_4(1)$ enthielte. Der Grund für die gewählte Struktur ist allein, dass diese Definition von *Papier* nicht *seine* Definition ist. Es wäre auch nicht korrekt den

[5] Eine andere Möglichkeit wäre *Dient-zum* gleich als *Zweck* zu interpretieren. Solch eine Entscheidung sollte aber erst nach Analyse vieler Definitionen erfolgen. Diese Beispiele sollen aber gerade zeigen, dass es keinen Zwang gibt, gewisse ‚ontologische' Relationen *vor* der Analyse als gegeben vorauszusetzen.

[6] Die Definition von Herstellen formuliert „etwas industriell oder von Hand gewerbsmäßig hervorbringen". Wird *Verfahren* nicht zur Definition von *Herstellen* gehörig erachtet, dann muss man den Begriff unter die zweite Stelle von p_3 hängen.

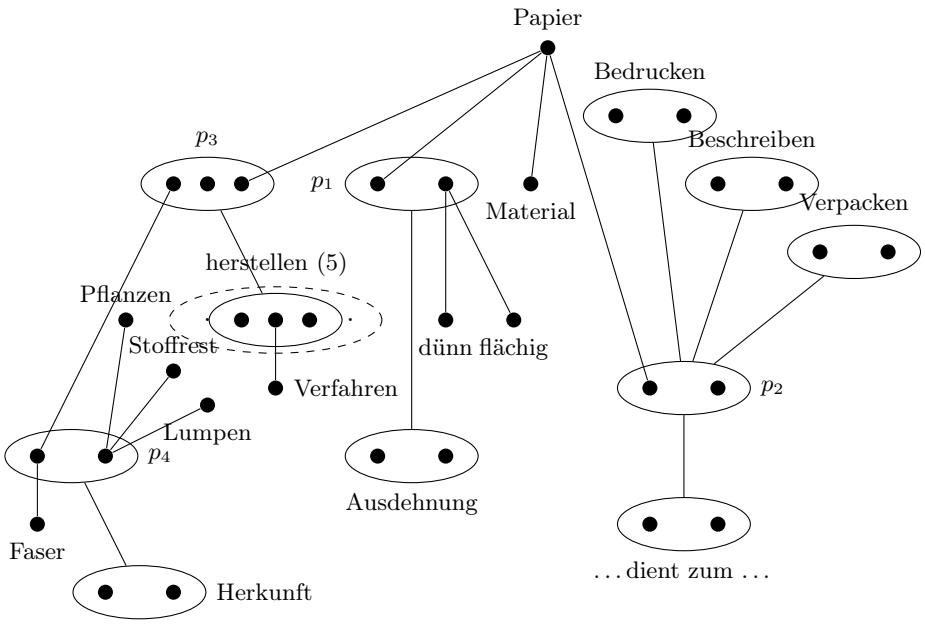


Abbildung 5.1.: Diagramm für Begriffsstruktur von Papier.

Begriff *Faser* unter die erste Stelle von p_3 zu setzen. Denn dann verlöre p_4 die begriffliche Einheit, d. h. Summe, zu *Herkunft (1)* und *Faser* auf der 1. Stelle.

Ebenso wie bei den Verwendungsmöglichkeiten von Papier ist die Herkunft der Faser alternativ formuliert: Eine Faser wird aus Pflanzen, oder Stoffresten, oder Lumpen hergestellt. Abbildung 5.1 stellt das vollständige Diagramm der Begriffsstruktur der Definition von Papier dar.

Tabelle 5.1 auf Seite 123 zeigt eine äquivalente Darstellung als Kreuztabelle.[7]

Betrachtet man das vollständige Diagramm fällt auf, wie das Definiendum, hier *Papier*, die Begriffe seiner Bedeutungserklärung beherrscht. Erstaunlich ist, wie viele neue und auch nicht-lexikalisierte Begriffe angenommen werden müssen, besonders bei den höherstelligen Relationen. Man muss es noch einmal ganz deutlich sagen: die Existenzen dieser Begriffe sind allein aus der Ordnungsstruktur der Begriffe und der konkreten Definition abgeleitet. Nach Berücksichtigung

[7] [Sko81], S. 24f, schlägt bei seiner Analyse lexikalischer Relationen ebenfalls die Darstellung in Tabellenform als Variante vor. Er hat sogar eine Kreuztabelle (die andere enthält in der Zelle als Wert eine der 22 Relationen). Bei seiner Kreuztabelle geht aber die Information, in welcher Relation die Wörter (Lexeme) zueinander stehen, verloren, während hier die Tabellendarstellung äquivalent zur grafischen oder auch formalisierten Darstellung ist.

$\vert\rangle$	Stelle(n)	Papier	Material	Faser	dünn	flächig	Pflanze	Stoffrest	Lumpen	Bedrucken	Beschriften	Verpacken	p_1			Ausdehnung	p_4			Herkunft	p_3				herstellen			p_2			dient zum	Verfahren
Stelle(n)		1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1.	2.	2	2	1.	2.	2	3	1.	2.	3.	3	2.	2	1.	2.	2	1
Papier	1	×	×											×										×				×			
Material	1		×																												
Faser	1			×																											
dünn	1				×																										
flächig	1					×																									
Pflanze	1						×												×												
Stoffrest	1							×											×												
Lumpen	1								×										×												
Bedrucken	2									×																	×				
Beschriften	2										×																×				
Verpacken	2											×															×				
p_1	2												×			×															
	1.													×																	
	2.				×	×									×																
Ausdehnung	2															×															
p_4	2																×			×											
	1.			×														×													
	2.																		×												
Herkunft	2																			×											
p_3	3																				×				×						
	1.																	×				×									
	2.																						×								
	3.																							×							
herstellen	3																								×						
	2.																									×					×
p_2	2																										×			×	
	1.																											×			
	2.																												×		
dient zum	2																													×	
Verfahren	1																														×

Tabelle 5.1.: Papier-Definition als Kreuztabelle.

weiterer oder sogar aller Bedeutungsdefinitionen des konkreten Lexikons kann es sich ergeben, dass Begriffe noch ein wenig verrutschen, aber das würde nicht die grundlegende Tendenz der Verhältnisse ändern. Bsplw. könnte der Begriff *Faser* gleich der ersten Stelle von p_3 oder p_4 sein (falls seine Definition das so formuliert, was sie in diesem Fall nicht tut). Andererseits wird die Relation p_1 immer sehr speziell für *Papier* sein und nicht für andere Begriffe, so dass es nahezu ausgeschlossen ist, dass sie sich später als identisch mit *Ausdehnung* erweist.

Die Ordnungsstruktur der Begriffe hat wegen ihrer Bedeutung in der Anwendung eine bevorzugte Richtung, und das ist die Enthält-Relation (größer-als). Mit ihrer Hilfe aktiviert der Begriff seine Inhalte, ohne dass dies auf andere Begriffe abfärbt. Mit *Papier* wird *Faser* aktiviert, weil diese Definition es nun einmal so formuliert. Von der *Faser* gelangt man aber auf diese Weise nicht zum *Papier*; *Faser* hat seine eigene Struktur. Die Anwendung eines Begriffes aktiviert alle in ihm enthaltenen Begriffe; die Ordnungsstruktur beleuchtet das ganze Netz. Dies ist ein besonderer Vorteil dieser Analyse.

Auf der anderen Seite erlaubt die Einheitlichkeit der Ordnungsstruktur eine echte Netzdarstellung der ganzen Lexik. Denn alle begrifflichen Relationen beruhen letztlich auf Enthalten-sein von Begriffen und den Unterrelationen, also dem Zusammenschluss niederstelligerer Begriffe in den höherstelligen.

Als nächstes die Begriffsanalyse der Definition von Faser.

Faser einem Faden ähnliches, feines, dünnes Gebilde von unterschiedlicher Länge, das meist versponnen werden kann. ([Kla])

Der Oberbegriff ist *Gebilde*, und die Artunterschiede sind *Dünn* und *Fein*. Weil letzterer als „dünn und zart“ definiert ist, kann man von der gleichen Relation wie für *Dünn* ausgehen, die oben schon als *Ausdehnung* analysiert wurde. Weiter wird angegeben, dass Fasern Gebilde unterschiedlicher Länge sind. Extensional-logisch betrachtet handelt es sich bei der „unterschiedlichen Länge“ um eine freie Variable. Wie kann man das nun begrifflich ausdrücken? Eine Länge ist eine Oberrelation von *Ausdehnung*, sie ist „räumliche Ausdehnung in einer Richtung“. *Faser* enthält die erste Stelle dieser Relation, aber ohne eine Beschränkung der zweiten Stelle, den konkreten Wert der Länge.[8] Bei der Relation *Verspinnen* wird mit der Einschränkung *meist* quantifiziert. Die Beziehung von *Faser* zur ersten Stelle von *Verspinnen* ist daher nicht zwingend: Es gibt *einige* Fasern, die versponnen werden. Dies lässt sich begrifflich durch Annahme eines spezielleren Begriffes, *Faser (2)*, von *Faser* kodieren, der die erste Stelle

[8] Eine genauere Analyse muss auch die Angabe „Richtung“ berücksichtigen. Das wird weiter unten nachgeholt.

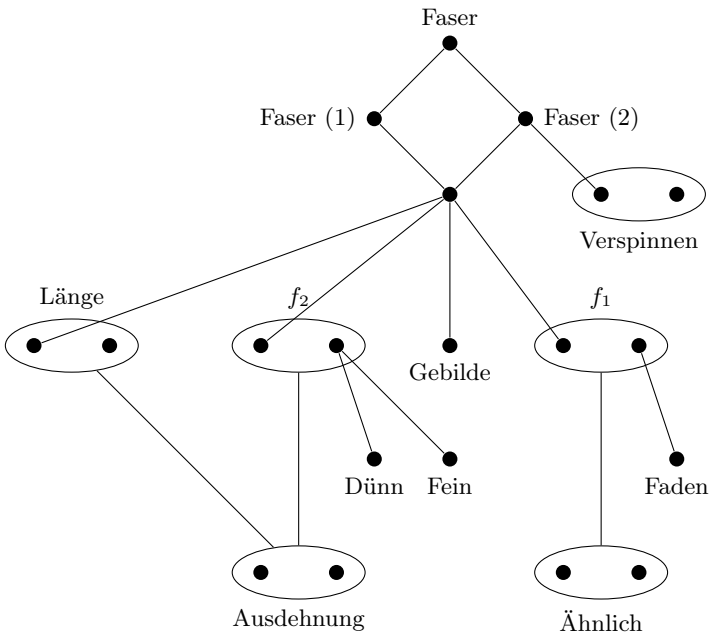


Abbildung 5.2.: Diagramm für Begriffsstruktur von Faser.

von *Verspinnen* enthält und das Produkt des übrigen Inhaltes von *Faser*. Der ‚restliche' Faser-Begriff wird zur Unterscheidung *Faser (1)* bezeichnet.[9] Auf diese Weise wird bei der Anwendung von *Faser* nicht zwingend die erste Stelle von *Verspinnen* aktiviert.[10] Es gibt jetzt zwei Faser-Begriffe, die ein gemeinsames Produkt haben. Um die von der Definition geforderte Einheit nicht zu zerstören, wird ein neuer Oberbegriff über die beiden Unterbegriffe gesetzt. Dieser wird, da er das Definiendum ist, mit „Faser" bezeichnet. Als Letztes die Angabe, dass eine Faser einem Faden ähnlich ist. Das wird als eine ganz gewöhnliche Relation dargestellt, auch hier wieder als eine eigene spezielle *Ähnlich*-Relation, f_1, für *Faser*. Abbildung 5.2 zeigt das vollständige Diagramm. Im Vergleich

[9] Es reicht nicht aus *Faser (1)* gleich dem Produkt zu setzen. Verbinden sich zwei Begriffsgraphen, z. B. der von Papier und der von Faser, dann müssen beide Faser-Begriffe unabhängig voneinander aktiviert werden können. Aus diesem Grund ist es notwendig, dass *Faser (1)* nicht in *Faser (2)* enthalten ist.

[10] Diese Idee zur begrifflichen Umsetzung des Existenzquantors hat Leibniz in seiner Schrift *Generales Inquisitiones* formuliert und angewendet (zitiert nach [Kau60] S. 176.). „Einige A sind B" wird zu „AY est B", wobei AY die begriffliche Summe von A und eines beliebigen Y ist, das einen beliebigen Artbegriff von A darstellt.

der Begriffsstruktur der Definition von *Faser* mit dem Teil der Begriffsstruktur von Papier, der sich auf *Faser* bezieht, wird deutlich, dass man darauf achten muss, wie und in welchen Definitionen ein Begriff verwendet wird, und wie er im System explizit definiert ist. Bei der Verwendung eines Begriffes (z. B. *Faser*) in der Definition eines anderen Begriffes (z. B. *Papier*) tritt ersterer eher als Summand denn als Summe in den Verknüpfungen auf. Bei *Papier* und *Faser* bedeutet das, dass *Papier Faser* in seine Ordnungsstruktur einbettet, nämlich über die Enthält-Relation und die R-logische Relationen. Dagegen wird durch die Aufzählung der Begriffe *Pflanzen*, *Stoffreste* und *Lumpen* ein diesen gemeinsamer Begriff, das Produkt, angenommen. Dadurch werden diese drei Begriffe in der Definition von *Papier* mitbestimmt, weil die Enthält-Relation selbst definitorischen Charakter hat.[11] Grundsätzlich sollte man das Mitdefinieren von anderen Begriffen als dem Definiendum in einer Definition vermeiden, so wie bei Verwendung von *Faser* in der Definition von *Papier*; bei den drei anderen Begriffen, *Pflanzen*, *Stoffrest* und *Lumpen*, hatte man wegen der Notwendigkeit der Produktbildung keine andere Möglichkeit.[12]

Die Verbindung zweier Begriffsgraphen a und b, z. B. von *Papier* und *Faser*, ist nun trivial. Jeder Knoten k_b (=„Faser"-Knoten im Graph von *Papier*), der auf den Graphen b verweist, wird durch den maximalen Knoten k_{max} (=„Faser"-Knoten im Graph von *Faser*) des Graphen b ersetzt, oder man fügt den Graphen b unter den von a, und zieht eine Kante von jedem Knoten k_b zum maximalen Knoten k_{max} des Graphen b.

Als letztes Beispiel die Definition von Auto, die hier wiederholt wird:

Auto – von einem Motor angetriebenes Fahrzeug mit offener oder geschlossener Karosserie (das zum Befördern von Personen oder Gütern auf Straßen dient). ([Dud])

Der Oberbegriff ist *Fahrzeug*. Das Auto unterscheidet sich von anderen Fahrzeugen durch den Antrieb. Dieser Unterschied ist wieder eine eigene Relation, deren erste Stelle im Begriff *Auto* enthalten ist. Der andere Unterschied ist, dass ein Auto eine offene oder geschlossene Karosserie hat. Offensichtlich zwei gegensätzliche Begriffe. Gegensätzliche Begriffe sind zwar unvereinbar, d. h. sie können nicht im gleichen Begriff enthalten sein. Sie können dagegen gemeinsame Begriffe haben.[13] Die Definition impliziert, dass es etwas Gemeinsames gibt.

[11] Nur in der Definition des Grundwortes von *Stoffrest*, *Stoff*, findet sich die Relation zu *Faser* explizit wieder: „aus ... Fasern ... hergestelltes Gewebe".

[12] In [Dwd] wurde die Definition gegenüber dem [Kla] genau an dieser Stelle verändert: Papier - besonders durch Verfilzung und Verleimung von Pflanzenfasern gewonnenes dünnes, flächiges Material, das vorwiegend zum Beschreiben, Bedrucken und Verpacken dient.

[13] Siehe oben Kapitel 3.2.

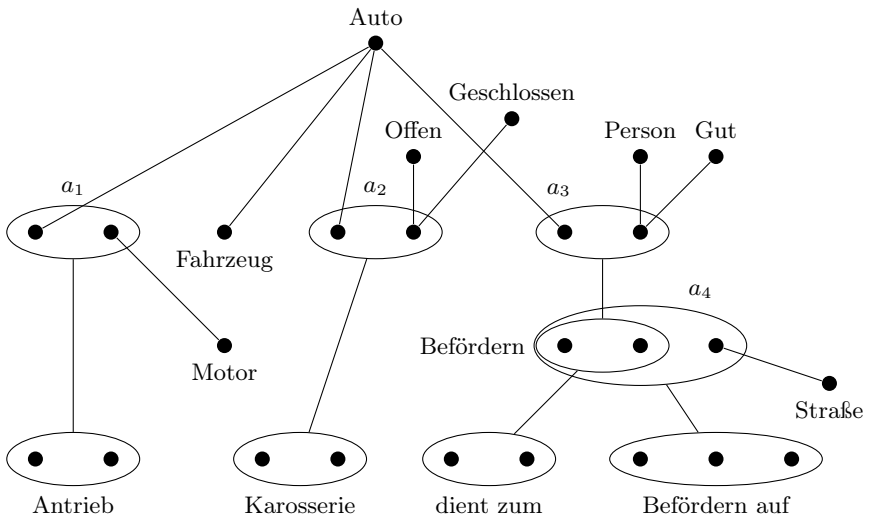


Abbildung 5.3.: Diagramm für Begriffsstruktur von Auto.

Deshalb ist das Produkt dieser beiden Begriffe die zweite Stelle des speziellen Karosserie-Begriffs, a_2.[14] Im letzten Teil wird ein Zweck angegeben. Autos dienen zum Befördern von Personen und Gütern. Wie in der Definition von Papier wird hier der Ausdruck „dient zum“ verwendet. Jedoch im Unterschied dazu führt die Definition von Auto diesen Zweck konkreter aus und erweitert ihn. Das Auto dient zum Befördern von Personen oder Gütern. *Auto* enthält die erste Stelle von *Befördern*, und die zweite Stelle von *Befördern* ist gleich dem Produkt von *Person* und *Gut*, bzw. in diesem enthalten. *Befördern* ist deshalb in einem speziellen Auto-Beförderungsbegriff, a_3, enthalten, und enthält seinerseits die Relation *Dient-zum*. Der Auto-Beförderungsbegriff selbst ist Teil einer dreistelligen Relation, a_4, die den Transportweg auf Straßen beschränkt. Abbildung 5.3 zeigt das vollständige Diagramm.

5.3. Verben

Alle Definitionen aus [Kla]:

[14] Ontologen sind vermutlich geneigt, Karosserie-Auto als Teil-Ganzes-Relation abzubilden. Das wäre hier auch eine adäquate Möglichkeit. Dieses Verfahren ist jedoch vollkommen indifferent gegenüber irgendwelchen Meronymie-Theorien. Es werden keine ontologischen Relationen, oder vergleichbare metasprachliche Artefakte, quasi von außen auf die im Lexikon kodierten Begriffe projiziert.

herstellen (2.1) etw. industriell oder von Hand gewerbsmäßig hervorbringen, fertigen.

hervorbringen (2) etw., jmdn. entstehen lassen.

fertigen (1) etw. herstellen, anfertigen.

entstehen beginnen zu bestehen, zu sein.

entstehen hervorgerufen werden, sich ergeben.[15]

hervorrufen (2) etw. verursachen, bewirken, auslösen.

verursachen die Ursache von etwas sein, etw. bewirken.

bewirken etw. herbeiführen, verursachen.

auslösen (1) etw. wirksam werden lassen, bewirken

auslösen (b) etw. hervorrufen, herbeiführen.

herbeiführen etw. bewirken, Wirklichkeit werden lassen.

anfertigen etw. herstellen.

befördern (1) etw., jmdn. an einen Ort schaffen, etw., jmdn. transportieren.

schaffen (4) etw., jmdn. an einen bestimmten Ort bringen, von einem bestimmten Ort entfernen.

transportieren (1) etw., jmdn. befördern, an einen anderen Ort bringen.

bringen (1) etw. (in die Hand) nehmen und an einen Ort tragen, jmdm. übergeben.

nehmen (1a) etw., jmdn. (in einer bestimmten Absicht) ergreifen, erfassen.

nehmen (1b) etw., jmdn. ergreifen, von seinem Platz entfernen und zu sich heranholen, mit sich mitführen.

Hier noch die die weiteren Bedeutungen des Homonyms *herstellen (2)*:

herstellen (2.2) etw. schaffen, zustande bringen.

herstellen (2.3) etw. wieder in den ursprünglichen Zustand bringen, wiederherstellen.

[15] Keine explizit nummerierte Unterteilung vorhanden.

Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt gegebene Lage, Verfassung, in der sich jmd., etw. befindet.

Die Bedeutungsdefinitionen der Verben führen einen allgemeineren Begriff im Sinne eines Gattungsbegriffes zur Erläuterung an (herstellen – fertigen, hervorbringen, transportieren – befördern), aber weit wichtiger ist die Nennung der Mitspieler des Verbs. Dabei wird in diesem Lexikon zumindest das Subjekt ausgelassen. Die Gattungsbegriffe sind nicht so präzise angegeben, wie bei den Nomen. Es kommt rasch zu Zirkeldefinition (z. B. herstellen – fertigen – herstellen). Die Definitionen erscheinen als Teilsätze, d. h. Sätze ohne Subjekt, in denen die Mitspieler möglichst allgemein paraphrasiert sind. Begrifflich bedeutet das dreierlei. Die Verben kodieren meist Relationen, also mehrstellige Begriffe. Zweitens sind diese Stellen sehr wenig bestimmt, also begrifflich unterbestimmt. Und zuletzt bedeutet die fehlende Bestimmung der zumindest sprachlich wichtigsten Subjektstelle, dass diese Relationen leicht in R-logischer Richtung – wenn man so will in horizontaler Richtung im Gegensatz zur vertikalen Richtung der Ordnungsstruktur – erweiterbar sind. Die grammatischen Objekte werden meist nur durch die Ausdrücke *jmd.* und *etw.* gekennzeichnet. Hierbei handelt es sich zwar nicht um unbestimmte Begriffe, aber um *gering bestimmte Begriffe*, d. h. Begriffe mit wenig Inhalt.

Begrifflich, so scheint es, ist so ziemlich jeder Begriff entweder mit *Etwas* oder mit *Jemand* vereinbar, sofern man bereit ist, diese Ausdrücke begrifflich zu interpretieren. Die Frage ist, kann man diese Begriffe dann für jedes Vorkommen von *jmd.* und *etw.* verwenden? Für *Jemand* kann man begrifflich sagen, dass er *personifizierbar* ist, und für *Etwas* kann man sagen, dass es sächlich oder *versächlichbar* ist. Es sind also nicht einfach Personen und Dinge, sondern alles das, was die Sprache – auch metaphorisch – wie eine Person, oder eine Sache auffassen kann. Damit hat man begrifflich erfasst, was die Sprache ermöglicht. Das sind regelrechte Brückenbegriffe zwischen (begrifflicher) Logik und Sprache. Man muss immer im Auge behalten, dass metaphorisch verwendete Ausdrücke einen logischen Kern haben. Das bedeutet, dass die Eignung eines Ausdrucks zur metaphorischen Verwendung im Begriff liegen muss, und das ist die *geringe Bestimmung* des Begriffs.

Die gering bestimmten Begriffe der Verben erhalten im Rede-Kontext durch Beschränkung ihren je spezifischeren Begriffsinhalt. So ergeben sich die völlig verschiedenen Arten der Verwendung, wie z. B. bei *Transportieren*: „Er transportierte den Schrank mit dem Wagen seiner Eltern“, im Vergleich zu „Das Blut transportiert den Sauerstoff in die Körperzellen“. Nach der obigen Definition ist die Bedeutung von *Transportieren* in beiden Sätzen die gleiche, und allein durch Beschränkung begrifflich auf den Kontext angepasst.

Soweit die Charakterisierung der Verbdefinitionen. Eine Analyse des polysemen Verbs *herstellen (2)* erfolgt nun im Lichte dieser Erkenntnisse. Die Bedeutung 2.1 entspricht fast der Verwendung in der Papier-Definition, wo Papier aus verschiedenen möglichen Materialien hergestellt wird. In 2.1. fehlt eine Stelle für Ausgangsmaterial. Der Begriff *Herstellen*, wie er für die Definition von Papier verwendet wird, ist daher nicht-lexikalisiert. Zuerst der Begriff, wie er sich aus der Definition von 2.1 ergibt:

$$\underset{4}{herstellen} \,/\, \overset{Jemand}{1}\ \overset{industriell\otimes händisch}{2}\ \overset{Etwas}{3}\ \overset{Erwerb}{4} \tag{5.1}$$

Wie schon erwähnt, wird die erste Stelle in der Definition unterschlagen. Um den Begriff hier besser zu erfassen, wird ergänzt, dass *Jemand* etwas herstellt.[16] Die Annahme wird getroffen, dass der Begriff *Jemand* (s. o.) etwas Personifizierbares enthält. Die zweite Stelle ist durch das Produkt von *Industriell* und *von-Hand-gefertigt* bestimmt. Man könnte dieses Produkt als Verfahren bezeichnen, so wie es die Papier-Definition tut. Der dort verwendete Begriff von *herstellen* ergibt sich als:[17]

$$\underset{4}{herstellen} \,/\, \overset{Jemand}{1}\ \overset{AMat}{2}\ \overset{Verfahren}{3}\ \overset{EMat}{4} \tag{5.2}$$

Wobei *AMat* und *EMat* die Begriffe für Ausgangs- und Endmaterial repräsentieren. Hier fehlt der Hinweis auf die Gewerbsmäßigkeit. Unter Berücksichtigung der gesamten Definition von Papier kann man davon ausgehen, dass dieser Begriff mit einbezogen ist. Es geht dabei um die gewerbsmäßige Papierherstellung.

Die Definition 2.2 von *Herstellen* hat weniger Stellen. Es wird nur gesagt, dass jemand etwas herstellt:

$$\underset{2}{herstellen} \,/\, \overset{Jemand}{1}\ \overset{Etwas}{2} \tag{5.3}$$

Die Begriffe zu 2.1 und 2.2, und der in Papier vorkommenden Variante, sind Unterrelationen eines in dieser Form nicht-lexikalisierten fünfstelligen Begriffes, und diesem *untergeordnet* (3.172):

$$\underset{5}{herstellen} \,/\, \overset{Jemand}{1}\ \overset{AMat}{2}\ \overset{Verfahren}{3}\ \overset{EMat}{4}\ \overset{Erwerb}{5} \tag{5.4}$$

[16] Diese Stelle kann später entfernt werden. Es ändert sich nur die Stellenzahl.

[17] Beim Herstellen-Begriff in der Papier-Definition wurde die erste Stelle nicht berücksichtigt, um die Analyse einfacher zu halten.

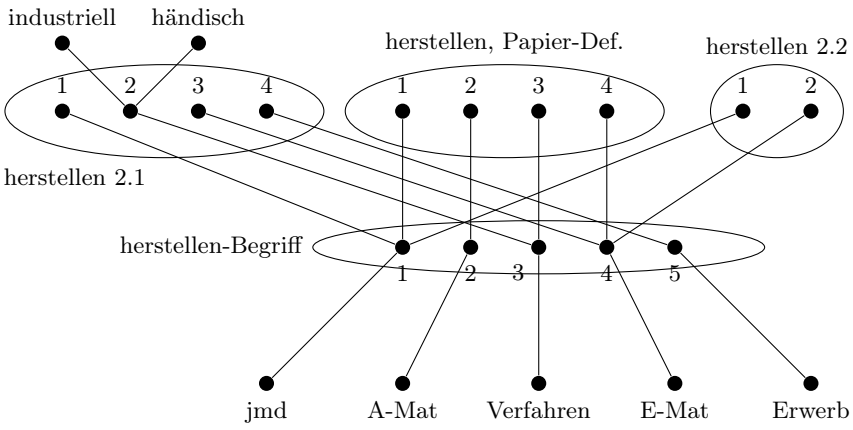


Abbildung 5.4.: Begriffsstruktur der Polyseme 2.1 und 2.2 des Verbs *herstellen*.

Die Bedeutung 2.1 lässt sich dann als Unterrelation dieser Relation so darstellen:

$$\underset{4}{herstellen} = /^{\cup}{}_{1,3,4,5}\ \underset{5}{herstellen}\ /^{\substack{Jemand\ AMat\ Verfahren\ EMat\ Erwerb \\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}} \tag{5.5}$$

und 2.2 so:

$$\underset{2}{herstellen} = /^{\cup}{}_{1,4}\ \underset{5}{herstellen}\ /^{\substack{Jemand\ AMat\ Verfahren\ EMat\ Erwerb \\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}} \tag{5.6}$$

Der in der Papier-Definition verwendete Herstellungsbegriff wäre danach

$$\underset{4}{herstellen} = /^{\cup}{}_{1,2,3,4}\ \underset{5}{herstellen}\ /^{\substack{Jemand\ AMat\ Verfahren\ EMat\ Erwerb \\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}} \tag{5.7}$$

Das Ganze diagrammatisch dargestellt in Abbildung 5.4 und als Tabelle in 5.2 auf Seite 132.

Die letzte Definition des Polysems 2.3 bringt etwas ganz Neues ins Spiel. Es geht um das Wiederherstellen von ‚Etwas' und diesmal ist von Zuständen die Rede. Am problematischsten ist der Bezug auf etwas, was vorher einmal da war, und jetzt nicht mehr. Es gibt also einen ehemaligen Zustand und einen aktuellen Zustand. Für die Bedeutung dieses Lexems ist die Definition von Zustand ganz zentral. Bei *Zustand* handelt es sich um einen dreistelligen Begriff: Jemand oder Etwas befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer bestimmten Verfassung oder Lage:

$$\underset{3}{Zustand}\ /^{\substack{Jmd\otimes Etw\ \ Zeit\ \ Verfassung\otimes Lage \\ 1\qquad 2\qquad 3}}$$

⊵	stelle(n)	herstellen						herstellen 2.1					herstellen 2.2			industriell	händisch	jmd	A-Mat	Verfahren	E-Mat	Erwerb
stelle(n)		5	1.	2.	3.	4.	5.	4	1.	2.	3.	4.	2	1.	2.	1	1	1	1	1	1	1
herstellen	5	×																				
	1.		×															×				
	2.			×															×			
	3.				×															×		
	4.					×															×	
	5.						×															×
herstellen 2.1	4							×														
	1.		×						×													
	2.				×					×												
	3.					×					×											
	4.						×					×										
herstellen 2.2	2												×									
	1.		×											×								
	2.					×									×							
industriell	1									×						×						
händisch	1									×							×					
jmd	1																	×				
A-Mat	1																		×			
Verfahren	1																			×		
E-Mat	1																				×	
Erwerb	1																					×

Tabelle 5.2.: Kreuztabelle der Polyseme 2.1 und 2.2 des Verbs *herstellen*.

Die Bedeutung von *herstellen (2.3)* verknüpft drei Zustände miteinander. Einen ursprünglichen Zustand, dann einen aktuellen, der sich vom ursprünglichen unterscheidet, und schließlich einen neuen Zustand, der dem ursprünglichen gleicht oder diesem nahekommt. Ein praktisches Beispiel: „Schloss Monaise wurde in den 90er Jahren wiederhergestellt“. Das Schloss wurde in den 1780er Jahren erbaut, verfiel dann und wurde vor nicht allzu langer Zeit restauriert. Erste Stelle ist das Schloss Monaise, zweite und dritte Stelle sind Zeitpunkt und Zustand im 18. Jahrhundert. Das entspricht dem Zustands-Begriff. Dieser wird jetzt erweitert zum Herstellungsbegriff. Vierte und fünfte Stelle sind Zeitpunkt (oder Zeitraum) und Zustand vor der Restaurierung. Sechste und siebte Stelle bilden dann die Unterrelation nach der Restaurierung. Zusätzlich wird Identität von neuem Zustand, also die siebte Stelle, und ursprünglichem Zustand, die dritte Stelle, bestimmt. Nimmt man es ganz genau, müsste man vermutlich von Ähnlichkeit sprechen, denn genauso wie es damals war, hat man das Schloss sicher nicht wiederhergestellt. Es geht in einer Definition nicht um diese Art von Angemessenheit. Hier fordert die Definition, dass ursprünglicher und neuer Zustand denselben Wert, Gegenstand, oder besser, Bezug aufweisen, dies wird durch die besondere Relation der Identität sichergestellt. Es ist durchaus vorstellbar, dass der Begriff des *Wiederherstellens* sich so weiterentwickeln könnte, dass die Renovierung des Schlosses nicht mehr als eine angemessene Wiederherstellung angesehen wird. In diesem Fall hätte sich der Zustandsbegriff so verändert, dass er einen anderen Wert für den alten und für den neuen Zustand hätte. Hier der Begriff für *herstellen (2.3)* (mit ZP=Zeitpunkt, Z=Zustand, f=früher, n=neuer, sp=später) :

$$\underset{7}{herstellen} \,/\, {}^{1}\,{}^{fZP}_{2}\;{}^{fZ\oplus \mathrm{I}_1}_{3}\;{}^{spZP}_{4}\;{}^{spZ}_{5}\;{}^{nZP}_{6}\;{}^{nZ\oplus \mathrm{I}_2}_{7}$$

Um die Beziehungen der Stellen untereinander und ihre Einheit besser zu verdeutlichen, hier die Formel mit Hilfe von Unterrelationen:[18]

$$\underset{7}{herstellen} = \mathrm{I} \oplus$$
$$/^{u}{}_{3,7}\underset{7}{herstellen'} \,/\, {}^{/^{u}{}_{1}\;{}^{Zustand}_{1}}\;{}^{/^{u}{}_{2,3}\;{}^{Zustand}_{2\;3}}\;{}^{/^{u}{}_{2,3}\;{}^{Zustand}_{4\;5}}\;{}^{/^{u}{}_{2,3}\;{}^{Zustand}_{6\;7}} \tag{5.8}$$

Die Bedeutungsdefinition hat rein sprachlich betrachtet große Ähnlichkeit mit 2.2 und 2.1. Die Verwendung des lexikalisierten Begriffes *Zustand* trägt

[18] Die zeitlichen Beziehungen der drei Zustände sind hier nicht begrifflich dargestellt. Das würde die Darstellung zu unübersichtlich machen. Eine begriffliche Skalierung, wie in der Formalen Begriffsanalyse, ist eine Möglichkeit dies zu bewerkstelligen.

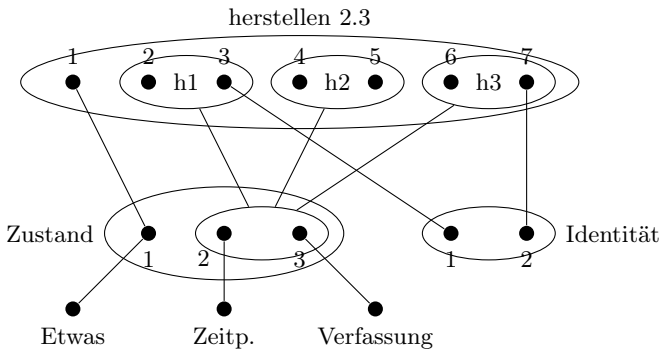


Abbildung 5.5.: Begriffsstruktur des Polysems *herstellen (2.3)*.

jedoch erheblich zur begrifflichen Differenzierung bei. Das Diagramm dazu ist in Abbildung 5.5.

Als Ergebnis dieser Analyse muss die Tabellendarstellung für Unterrelationen erweitert werden. Diese Begriffe fassen lediglich die Stellen eines höherstelligen Begriffes zusammen. Es handelt sich also nicht um die Ordnungsrelation ($\geq$), sondern um Darstellung von Einheiten oder Identitäten innerhalb eines Begriffes. Die Stellen des Begriffes und seiner Unterrelationen sind identisch. Dies wird in Tabelle 5.3 auf Seite 135 so dargestellt, dass die Unterrelationen wie Begriffe eingetragen, und die Stellen dieser Unterrelation auf der linken Seite des höherstelligen Begriffs angekreuzt werden.[19]

Zurück zur Ordnungsstruktur der Lexeme von *Herstellen*. In der Definition von 2.1 kommen die zwei Lexeme *hervorbringen* und *fertigen* vor. Letzteres führt zu einem Zirkel, und wird deshalb nicht beachtet. Ersteres bedeutet „etw. jmdn. entstehen lassen“ wie in „dieser Strauch bringt große Früchte hervor“ ([Dwd]). Von was ist das ein Gattungsbegriff? Erstmal sind die beteiligten Stellen zu klären. Der Text der Definition selbst gibt wieder nicht viel her. Wenn etwas entsteht, dann war es zu einem Zeitpunkt vorher nicht existent oder in einer anderen Form, es muss daher aus etwas entstanden sein. Nach dieser Interpretation entspricht das Entstandene der vierten Stelle des nicht-lexikalisierten fünfstelligen Herstellen-Begriffes, und das, aus dem etwas entstanden ist, der zweiten Stelle des Begriffes. Man kann aber auch argumentieren, dass das Ent-

[19] Wenn in einer Unterrelation die Reihenfolge der Begriffe gegenüber dem höherstelligen Begriff vertauscht ist, dann legt man in der gleichen Zeile der „U-Rel.“ nach links Spalten mit den Stellen an, und setzt die Kreuze entsprechend. Ansonsten gilt die Reihenfolge der Stellen so wie sie im höherstelligen Begriff vorkommen.

			$\models$	Stelle(n)	h_1	h_2	h_3	herstellen 2.3								z_1	Zustand				Id			Etwas	Zeitpunkt	Verfassung
←	U-Rel.		Stelle(n)		2	2	2	5	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	2	3	1.	2.	3.	2	1.	2.	1	1	1
		h_1		2	×											×										
	h_2			2		×										×										
h_3				2			×									×										
			herstellen 2.3	7				×																		
				1.					×									×								
		×		2.						×																
		×		3.							×											×				
	×			4.								×														
	×			5.									×													
×				6.										×												
×				7.											×								×			
		z_1		2												×										
			Zustand	3													×									
				1.														×						×		
		×		2.															×						×	
		×		3.																×						×
			Id	2																	×					
				1.																		×				
				2.																			×			
			Etwas	1																				×		
			Zeitpunkt	1																					×	
			Verfassung	1																						×

Tabelle 5.3.: Kreuztabelle des Polysems *herstellen (2.3)*.

standene ein Zustand sei. Dann wäre *hervorbringen* eine Unterrelation des siebenstelligen Herstellen-Begriffes. Der Zustand des Entstandenen wäre dann die sechste und siebte Stelle. Das Ganze ist sehr unscharf, von einer Gattungsbeziehung zu sprechen fällt schwer. Die Definitionen bemühen sich zwar sehr, allgemein zu bleiben, aber der Blick auf die Definitionskette beginnend bei *herstellen 2.1* in Abbildung 5.6 zeigt, dass es hier kaum möglich ist, die Abstraktionsschritte (i. S. der Enthält-Relation) zu erkennen.

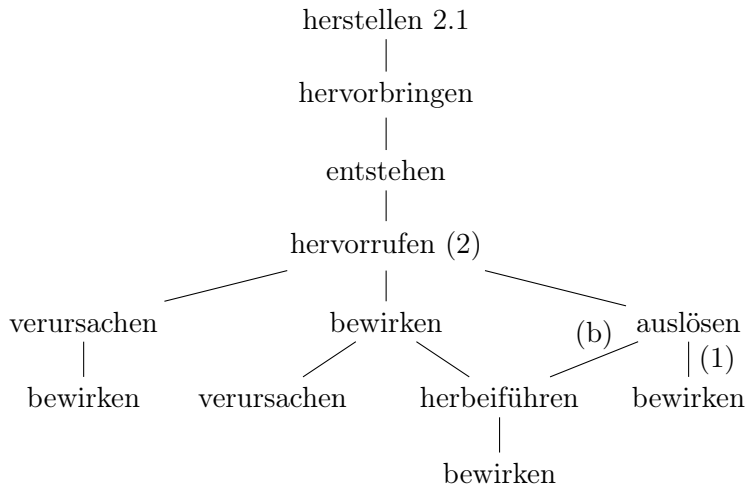


Abbildung 5.6.: Definitionsketten von *herstellen 2.1*.

Es scheint, dass die einzelnen Lexeme vielmehr nur Bereiche einer größeren, umfassenderen Relation aktivieren. Diese größere Relation müsste in der Lage sein, sowohl die Herstellung von Gegenständen als auch die Zustandsänderungen zu umfassen. „Hervorbringen“ aktiviert begrifflich das *Verfahren*, „entstehen“ und „herbeiführen“ zielen mehr auf das Ergebnis als Resultat eines Verfahrens oder Vorgangs, „verursachen“ und „bewirken“ sind eher auf ein Ausgangsmaterial oder einen Anfangszustand bezogen. Verben passen sich nach dieser Analyse nicht einfach in das Ordnungsschema der Enthält-Relation ein.[20] Sie repräsentieren eher die R-logische Struktur der höherstelligen Begriffe des Lexikons. Dem widerspricht nicht die Tatsache, dass bestimmte sehr detaillierte Lexemdefinitionen wie *herstellen 2.1* vorkommen, denn durch die größere Bestimmung der einzelnen Stellen lassen sie sich, im begrifflichen Sinne, einfa-

[20] Dies hat Fellbaum ([Fel98a]) bei ihrer Analyse der Verben durchaus richtig erkannt. Allerdings zieht sie daraus ganz andere Schlüsse, wie im Kapitel 4.2 dargelegt.

cher definieren. Man erkennt sozusagen das sehr allgemein bleibende begriffliche Schema erst in der Konkretisierung.

5.4. Adjektive

gewerbsmäßig auf regelmäßigen Erwerb gerichtet.

dünn von geringer Stärke.

flächig Fläche, Flach.

flach in der Breite ausgedehnt und ohne (größere) Erhebung, eben.

gering (1) klein, nicht sehr groß.

klein (1) von geringem Ausmaß, nicht umfangreich an räumlicher und zeitlicher Ausdehnung, an Höhe, Gewicht, Zahl und Wert.

Die entsprechenden Definitionsketten, die fast immer in Substantive übergehen.

Stärke (3) Dicke, Durchmesser.

Dicke (undefiniert)

Durchmesser Länge einer Geraden durch den Mittelpunkt einer regelmäßigen Figur.

Länge (1) räumliche Ausdehnung in einer Richtung.

Fläche nach Länge und Breite flach ausgedehnter Bereich.

Breite messbare Ausdehnung einer Fläche in Querrichtung.

Ausdehnung (2) Ausmaß, Größe.

Ausmaß (1) Ausdehnung, Abmessungen.

Größe (1) messbare Ausdehnung einer Fläche, eines Körpers.

Die Definitionen der Adjektive haben, wie die Verben, nur eine sehr schwache Ordnungsstruktur. Ähnlich wie bei den Verben spielt sich das begriffliche Moment in der R-logischen Struktur ab. Im Unterschied zu den Verben sind die durch die Adjektive kodierten Relationen von eher geringerer Stelligkeit,

während die Verben voll anwendbare Begriffe kodieren. Die Adjektive bestimmen also nur Teilaspekte, die erst im Zusammenspiel mit weiteren Stellen eines Begriffes überhaupt anwendbar sind.

Die erste Definition, *gewerbsmäßig*, wurde oben schon als fünfte Stelle im Herstellen-Begriff integriert. Der Text der Definition ist hier eindeutig, das Lexem *Erwerb* kommt explizit vor, die anderen Textteile deuten den begrifflichen Kontext an.

Das Lexem *dünn* hat als Oberbegriff *Stärke*, ein Substantiv. Hier die Definitionskette und Kennzeichnung durch = bei begrifflicher Gleichheit:

dünn ≥ Stärke = Durchmesser ≥ Länge ≥ Ausdehnung = Größe

Wenn man die Definitionen zusammenfasst, erhält man in etwa, dass *dünn* die *geringe Länge einer Geraden durch den Mittelpunkt einer regelmäßigen Figur* ist. Die umständliche Formulierung ist recht komplex. Hier sollte man vereinfachen und „Gerade durch den Mittelpunkt einer regelmäßigen Figur“ durch den Begriff *Höhe* ersetzen, denn dass scheint offensichtlich gemeint zu sein. Das Adjektiv „dünn“ enthält daher drei Stellen im höherstelligen Begriff *Ausdehnung* (siehe Abbildung 5.7, Seite 139):

$$\underset{3}{dünn} \, / \, \overset{\substack{Längenwert \\ 1}}{} \; \overset{\substack{Räumlich \\ 2}}{} \; \overset{\substack{Höhe \\ 3}}{} \tag{5.9}$$

$$\underset{4}{Ausdehnung} \, / \, \overset{\substack{Wert \\ 1}}{} \; \overset{\substack{Mass \\ 2}}{} \; \overset{\substack{Messrichtung \\ 3}}{} \; \overset{\substack{Messgegenstand \\ 4}}{} \tag{5.10}$$

$$dünn \geq \; /^{u}{}_{1,2,3} Ausdehnung \tag{5.11}$$

Der Begriff *flächig* ist noch einmal komplexer, denn es gibt zwei Dimensionen der Ausdehnung, Länge und Breite. *Flächig* vereint diese beiden in einem Begriff. Eine Stelle für die Länge und einen für die Breite. Deshalb ist es ein fünfstelliger Begriff, wobei je zwei Stellen eine Unterrelation eines Begriffes von Ausdehnung sind und eine Stelle bestimmt, dass es sich um ein räumliches Maß handelt (siehe Abbildung 5.8, Seite 139):

$$\underset{5}{flächig} \, / \, \overset{\substack{Längenwert \\ 1}}{} \; \overset{\substack{Längsrichtung \\ 1}}{} \; \overset{\substack{Breitenwert \\ 3}}{} \; \overset{\substack{Querrichtung \\ 4}}{} \; \overset{\substack{Räumlich \\ 5}}{} \tag{5.12}$$

$$/^{u}{}_{1,2} flächig \geq \; /^{u}{}_{1,2} Ausdehnung \tag{5.13}$$

$$/^{u}{}_{3,4} flächig \geq \; /^{u}{}_{1,2} Ausdehnung \tag{5.14}$$

$$/^{u}{}_{5} flächig \geq \; /^{u}{}_{3} Ausdehnung \tag{5.15}$$

In der oben analysierten Definition von Papier wurde eine vereinfachte begriffliche Repräsentation gewählt. Unter Berücksichtigung der hier durchgeführten

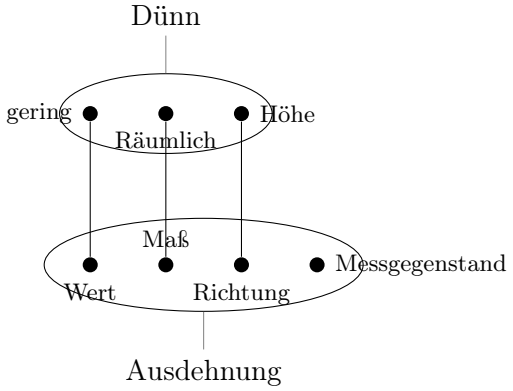


Abbildung 5.7.: Der Begriff *dünn*.

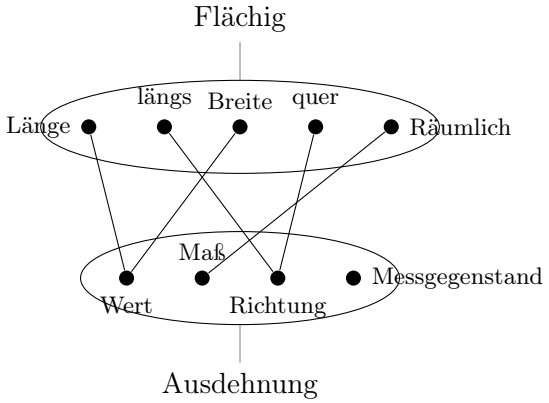


Abbildung 5.8.: Der Begriff *flächig*.

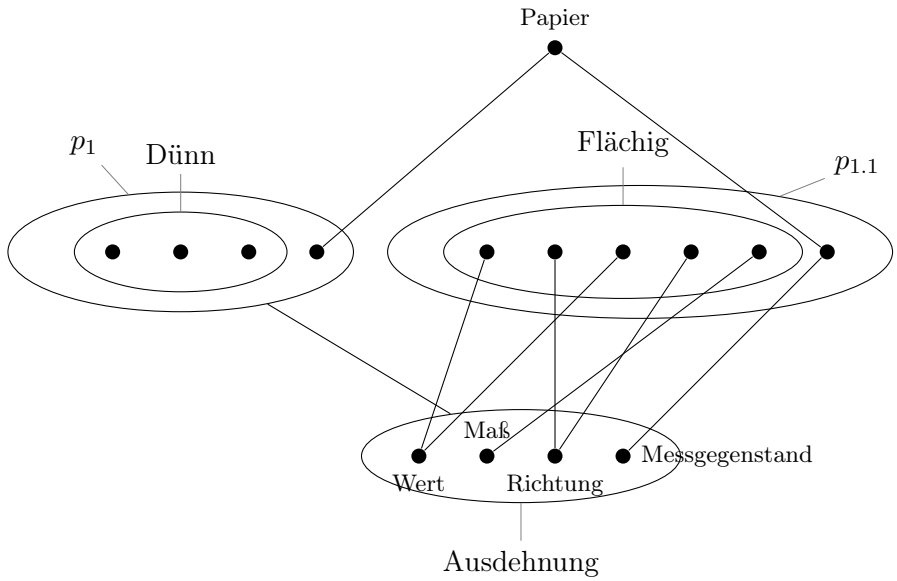


Abbildung 5.9.: *Papier*-(Teil-)Begriffsstruktur mit definitionsgemäßer Struktur für *dünn* und *flächig*.

Begriffsanalysen für *dünn* und *flächig* wird in Abbildung 5.9 auf Seite 140 die gemäß der Bedeutungsdefinitionen sich ergebende Struktur dargestellt. Es ist nur der sich ändernde Teil des Graphen dargestellt. Die neuen Begriffe sind in Anlehnung an die erste Version mit p_1 und $p_{1.1}$ bezeichnet. Diese ersetzen den p_1-Ausdehnungsbegriff.

Im Vergleich zu *dünn* ist beim Lexem *klein* die Definitionshierarchie flach. Hier ist alles in eine Definition gepackt: *Klein* ist ein bestimmter Wert für zeitliche und räumliche Ausdehnung, und weiter auch für Höhe, Gewicht usw. Hierbei ist der Wert, den *klein* repräsentiert, als Teil einer begrifflichen Skalierung aller Werte für zeitliche und räumliche Ausdehnung, als auch von Höhe, Gewicht usw. zu bestimmen.

Die negative Bestimmung „nicht umfangreich“ drückt begrifflich das gleiche aus wie „gering“, und wird hier nicht weiter betrachtet.[21] Der Begriff *Gering* legt einen Wert fest, wobei Bezugsmaße der Raum, die Zeit, die Zahl, oder ein Gewicht sein kann. Sie alle müssen etwas gemeinsam haben. Die Aufzählung scheint nicht vollständig. Da auch der Begriff *Wert* aufgelistet ist, ist offensichtlich jede Art von Messbarkeit gemeint, es geht um alle möglichen Wer-

[21] Zu negativen Bedeutungselementen und ihrer Interpretation s. Kap. 5.6.

te. Begrifflich ganz anders zu betrachten ist der Begriff *Höhe*. Als räumliche Ausdehnung bräuchte er nicht explizit erwähnt zu werden. Vermutlich ist in dieser sehr kompakten Definition eine weitere spezifischere Bedeutung mitkodiert. *Klein* bedeutet auch „von geringer Höhe“, so wie man sagt: ein kleines Tier, ein kleiner Tisch. Ähnlich wie bei *Faser* wird dies durch eine Zweiteilung der Struktur erreicht. Der sprachliche Kontext aktiviert dann entweder die eine oder andere Begriffsstruktur. Die spezifischere Bedeutung (Klein 2, siehe Abbildung 5.10, Seite 142) könnte man auch weglassen, da sie begrifflich nichts Neues hinzufügt. Denn der spezifischere Begriff enthält den weniger spezifischeren, oder extensional ausgedrückt: der allgemeinere Begriff (Klein 1) umfasst den spezifischeren Begriff (Klein 2). Hier die entsprechenden Formeln:[22]

$$\underset{2}{klein}^1 \, / \, ^{gering}_{1} \tag{5.16}$$

$$\underset{3}{klein}^2 \, / \, ^{gering}_{1} \tag{5.17}$$

$$/^{\text{ü}}{}_1 klein^1 = /^{\text{ü}}{}_1 klein^2 \tag{5.18}$$

$$\underset{2}{klein}^1 \geq /^{\text{ü}}{}_{1,2} Ausdehnung \tag{5.19}$$

$$/^{\text{ü}}{}_2 klein^1 \geq Gewicht \otimes Zahl \otimes Zeit \otimes Raum \tag{5.20}$$

$$\underset{3}{klein}^2 \geq /^{\text{ü}}{}_{1,2,3} Ausdehnung \tag{5.21}$$

$$/^{\text{ü}}{}_2 klein^2 \geq Raum \tag{5.22}$$

$$/^{\text{ü}}{}_3 klein^2 \geq Höhe \tag{5.23}$$

Wie man sieht, bilden Adjektive eher Unterrelationen von höherstelligen Relationen. Das ist oft nicht leicht zu erkennen, insbesondere wenn sich die vollständige Bedeutung über die ganze Definitionskette zieht, wie das bei *dünn* der Fall ist. Hierdurch ist die einzelne Definition fast unverständlich. Die Bedeutungserklärung „von geringer Stärke“ für *dünn* hat wenig Bestimmendes. Die Bestimmung über die Definitionskette ist nicht nur unpraktisch, in den anderen Definitionen fehlt der Bezug zum Ausgangslexem, den man sich erst konstruieren muss. Das erschwert nicht nur eine Begriffsanalyse, sondern ist auch in der Praxis wenig hilfreich, die Bedeutung einfach und klar zu erfassen. Im Gegensatz dazu erläutert die Definition von *klein* die Begriffsstruktur vollständig in

[22] Die Identität der ersten Stelle der beiden Begriffe lässt sich im Diagramm nur umständlich darstellen. Dort ist der Begriff nur in den beiden ersten Stellen von $klein^1$ und $klein^2$ enthalten.

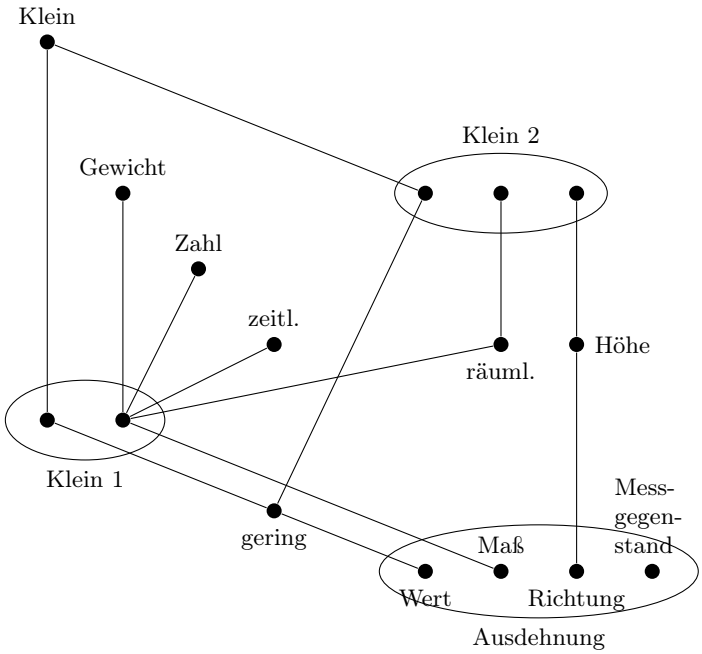


Abbildung 5.10.: Der Begriff *Klein*.

einer Definition. Das erleichtert die Identifikation aller Begriffsstellen erheblich, die Zusammenhänge der Stellen treten deutlich hervor.

5.5. Adverbien, Partikel

plötzlich unerwartet, überraschend, sehr schnell eintretend

sofort (1) drückt aus, dass sich die Handlung unmittelbar an eine andere, sich aus Zusammenhang und Situation ergebende Handlung anschließt, und somit in kürzester Zeit folgt; unmittelbar darauf. . . . ohne Zeitverlust, Verzögerung, unverzüglich (oft in Befehlen und Bitten).

danach (a) nach diesem Vorgang (Antonym zu davor).

erst (I1) bezeichnet in der zeitlichen Abfolge das, was am Anfang steht; zuerst.

erst (I2) gibt an, dass etwas nicht, wie erwartet, vor dem im Satz genannten Zeitpunkt liegt; nicht eher als.

erst gibt an, dass etwas nicht, wie erwartet, über einer im Satz genannten Größe liegt; nicht mehr als.

besonders (a) von anderem gesondert, abweichend.

Die Adverbien und Partikel sind begrifflich schwer zu fassen. Die Definitionen sind oft durch eine Aufzählung von Partizipien oder Adjektiven formuliert, oder sogar metasprachlich. Da wird Bezug genommen auf die Sprachformen selbst: den Sätzen und Satzarten (Bitten, Befehle), in denen sie vorkommen. Die Bedeutungen erscheinen wie begriffliche Splitter oder Fragmente. Ein R-logisches Muster lässt sich hier nur schwer ausmachen. Das Begriffliche, das durch Partikel kodiert wird, scheint eher lose, ähnlich einer flüchtigen chemischen Verbindung, mit anderen Begriffen die R-logischen Stellen zu erweitern, oder die eine Relation in der konkreten Rede mit einer anderen Relation zu verbinden. Der begriffliche Gehalt der Partikel ist daher als eher gering einzustufen. Allerdings kann er in der konkreten Rede zu beeindruckenden Effekten führen. Man darf die Partikel nicht unterschätzen wie dieser Beispielsatz mit der Partikel *nur* deutlich zeigt: „Sie ist *nur* eine Hausfrau“.

5.6. Negierte Bedeutungsbestandteile

Zum Abschluss ein Blick auf negierte Angaben. Dieses Beispiel zeigt den Vorteil der Kauppischen Interpretation der begrifflichen Negation, die sich, posi-

tiv formuliert, nur auf Unvereinbarkeit beruft, und negativ formuliert, fordert, dass Begriff und Negat nicht gleichen Gegenständen zukommen können. In der traditionellen Definitionstheorie und in der Lexikographie gilt die Negation in einer Definition als schlechter Stil.[23] Dies ist aus intensionaler oder begrifflicher Sicht sehr gut nachvollziehbar, wie die Kapitel zu Kauppi und die Formale Begriffsanalyse gezeigt haben. Man sollte sie daher bei der Definition von Begriffen vermeiden, wie im Folgenden anhand der Brot-Beispiele aus Wikipedia gezeigt wird. Die beiden Definitionen von Münsterländer Stuten und Paderborner Landbrot enthalten negierte Angaben. Das erstere Brot hat „keine Seitenkruste“, das letztere hat „krustenlose Seiten“.[24] Was wird hier genau negiert? Bei allen Brot-Definitionen werden nur zwei Relationen für die Krusten benutzt: explizit die Seite des Brotes und die Kruste im Allgemeinen. Es sind also zwei mehrstellige Relationen im Spiel, die man so paraphrasieren kann: „Brot X hat eine Kruste“ (zweistellig) und „Brot X hat Kruste an der Seite“ (dreistellig). Die dreistellige Relation wird negiert. Folgt man strikt den in den Definitionen verwendeten Begriffen, ist der Begriff *Seite* hier als Gegensatz zu *vorne* und *hinten* zu verstehen. Es scheint keine Begriffe für die Vorder-, Rück-, Unter- und Hinterseite des Brotes zu geben in diesem (Sub-)System von Brot-Begriffen. Ein Brot hat eine Kruste, ohne weitere Beschränkung, oder aber nur an der Oberseite, d. h. keine Seitenkruste. Nimmt man einen ‚positiven‘ dreistelligen Begriff *Brot-mit-Seitenkruste* an, der mit *Brot-mit-Kruste-oben* unvereinbar ist, dann ist die Negation „. . . hat keine Seitenkruste“ (bzw. der Quotient aus diesem und „. . . hat eine Kruste“) gleich dem Begriff *Brot-mit-Kruste-oben*, wie in Abbildung 5.11 auf Seite 145 dargestellt. Allerdings sieht es nicht so aus, als ob die Relation *Brot-mit-Seitenkruste* beim Definieren von Brotbegriffen irgendeine Relevanz hätte. Das negative Definieren führt also mehr in die Irre, als dass es hilft einen Begriff scharf abzugrenzen. Man benötigt daher nur den allgemeineren zweistelligen Begriff und den spezielleren dreistelligen Begriff mit Angabe, dass die Kruste sich an der Oberseite bildet.

5.7. Zusammenfassung

Nach dieser kleinen Feldstudie der Begriffsanalyse anhand von Bedeutungsdefinitionen folgt eine Aufarbeitung der dabei gewonnen Erkenntnisse und eine

[23] Vgl. [Pla04] S. 348-350, 262a-263d.

[24] Angeschobene Brote stehen im Backofen Seite an Seite, und bekommen an diesen Stellen während des Backvorgangs keine Kruste. Das ist aber eine Information, die nicht diesen Definitionen entstammt. Das Kommissbrot ist ebenfalls angeschoben, enthält aber keinen Hinweis auf die fehlende Seitenkruste.

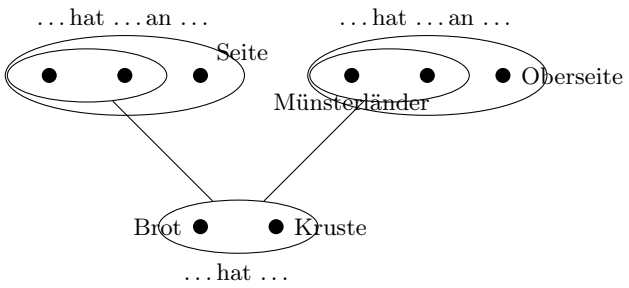


Abbildung 5.11.: Diagramm „keine Seitenkruste“.

Bewertung der gesetzten Ziele. Das Folgende bezieht sich auf die eingangs bei der Bedeutungsanalyse aufgestellten Kriterien.

Die Identifikation der Begriffe in der Oberflächenstruktur der Bedeutungen war vor allem bei den Nomen sehr einfach. Das klassische Definitionsschema, Gattungsbegriff und artbildende Unterschiede, kommt dort am häufigsten zur Anwendung. Allerdings finden sich die interessanteren begrifflichen Aspekte mehr in den Relationen zu anderen Begriffen. Bei den anderen Wortarten, von den Verben über die Adjektive und bis zu den Partikeln, ist die Oberflächenstruktur aus begrifflicher Sicht immer weniger augenscheinlich. Dem Verb liegt oft ein nicht-lexikalisierter vielstelliger Begriff zu Grunde, und die Bedeutungsdefinition kodiert davon nur die Unterrelation. Beim Adjektiv ist das noch einmal extremer ausgeprägt, und eine begriffliche Analyse für die Partikel ist fast nicht möglich. Für Verben und Adjektive ist das klassische Definitionsschema nicht nur weniger gut geeignet, sondern führt bei strikter Anwendung zu nahezu bedeutungslosen Definitionen. Man muss sich die Bedeutung eines Lexems dann mühevoll über die Definitionskette ermitteln (s. o. *dünn* vs. *klein*).

Das führt nahtlos über in das zweite Kriterium, die Motivation neue nicht-lexikalisierte Begriffe zu setzen, die nicht in der Definition eines Lexems vorkommen. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Das klassische Definitionsschema führt zu einer Aufteilung der Bedeutung eines Lexems über die ganze Definitionskette vor allem bei Verben und Adjektiven.
- Begriffe, die das Lexem über höherstellige Begriffe in Relation zu anderen Begriffen setzen (*Papier* - *Herstellungsverfahren*).
- Die Bedeutung verwendet eine Liste von Begriffen, die eine begriffliche Summe oder ein begriffliches Produkt darstellen.

Der erste Fall ergibt sich aus der Unangemessenheit des klassischen Definitionsverfahrens für bestimmte Wortarten. Im zweiten Fall ist die Motivation, einen neuen Begriff anzunehmen (z. B. a_1 in *Auto*) als den, der in der Definition selbst erwähnt wird (*Antrieb*), dass Stellen dieses neuen Begriffes in der Definition bestimmt sind (Enthält-Relation). Denn das Definiens sollte nur das Definiendum bestimmen, und nicht die Begriffe, die es zur Definition heranzieht. Ansonsten müsste man im Lexikon nicht nur die Bedeutungsdefinition des Lexems betrachten, sondern auch die Definitionen aller Lexeme, die den Begriff des betrachteten Lexems in ihren Definitionen mitbestimmen (Lokalität der Definition). Im letzten Fall ergibt sich die Notwendigkeit einen neuen Begriff zu bilden aus der Aufzählung innerhalb der Definition selbst. Dabei ist nie sicher, ob diese Aufzählungen vollständig sind oder nicht. Wenn es sich um ein begriffliches Produkt handelt (z. B. *offen* und *geschlossen* in *Auto*), dann bestimmt die Definition diese beiden Begriffe außerhalb deren eigenen Definitionen mit. Da aber die Definition nun einmal so formuliert ist, wird das respektiert und entsprechend kodiert. Die Summenbildung dagegen ist unproblematisch. Weil die Summe ihre Summanden enthält, werden die Summanden nicht durch die Definition des anderen Begriffs bestimmt.

Am Beginn der Bedeutungsanalyse eines Lexikons müssen relativ viele neue Begriffe gesetzt werden. Im weiteren Verlauf der Analyse ist zu erwarten, dass einmal postulierte Begriffe durchaus wiederverwendet werden können. Bei den nicht-lexikalisierten Begriffen ist es nicht nötig, darauf zu achten, dass eine Definition sie nicht mitdefiniert, denn die nicht-lexikalisierten Begriffe werden durch die Definitionen implizit bestimmt, in denen sie vorkommen.

Die letzten beiden Kriterien betrafen die Quantifizierung und die Verwendung von Begriffen als logische Variablen. Das ließ sich sehr gut begrifflich darstellen, und vor allem adäquater als mit extensional-logischen Mitteln. Da die Begriffsanalyse hier kein Modell voraussetzen muss, um das korrekt formalisieren zu können. Es wird z. B. einfach der Begriff *Länge* aktiviert, ohne die Angabe eines Wertes. Die Variable wird also durch Unbestimmtheit der Stelle ausgedrückt. Die Quantifizierung führt zu Bildung eines eigenen Begriffes genau dann, wenn die Allgemeingültigkeit eingeschränkt ist (z. B. *Faser (2)*).

Das übergeordnete Ziel, die Begriffsstruktur so adäquat wie möglich nur nach Maßgabe der Definitionen zu erstellen, ist schwieriger zu bewerten. Die Analyse der Bedeutungen ist tatsächlich nicht einfach, und Bedarf nicht nur eines guten Verständnisses der Begriffstheorie, auch praktisch ist sie nicht leicht durchzuführen. An einigen Stellen ist es notwendig, eigene Interpretationen zu bemühen, um begriffliche Klarheit zu erreichen (z. B.: „Gerade durch den Mittelpunkt einer regelmäßigen Figur“). Interpretationsarbeit ist es auch, alle Stellen eines höherstelligen Begriffes zu ermitteln. Hat man das jedoch einmal erreicht,

geht die Analyse der Bedeutungsdefinition, deren Begriff eine Unterrelation darstellt, geschmeidig von der Hand. Man beobachtet den Effekt, dass das Erkennen der Begriffsstruktur das Verständnis der Bedeutung fördert. Aus diesen Gründen ist eine automatische Extraktion von Begriffen durch Sprachanalysen auf Morphem- und Syntaxebene aus den Definitionen nur sehr bedingt möglich.

Was die Darstellung der Begriffsstruktur anbelangt, gibt es drei äquivalente Alternativen, die je nach Zweck einsetzbar sind:

- Die Kreuztabelle.
- Die formale Syntax nach Kauppi.
- Das erweiterte Hasse-Diagramm.

Die Kodierung der Begriffe in tabellarischer Form ermöglicht eine vollständige begriffliche Repräsentation des Lexikons. Diese Repräsentation kann andere sprachliche Analysen auf begrifflich-semantischer Ebene sehr effektiv unterstützen. Die formal syntaktische Darstellung der Begriffsstruktur eignet sich sehr gut für die Analyse einer konkreten Definition. Man sollte hier vielleicht auf eine andere Notation als die von Kauppi zurückgreifen. Zur Illustration hat sich das erweiterte Hasse-Diagramm gut bewährt. Sein Nachteil, den alle diagrammatischen Darstellungen teilen, ist der Verlust der Übersichtlichkeit bei einer größeren Anzahl von Elementen. Sehr unschön wird die Darstellung, wenn ein Begriff an mehreren Relationen beteiligt ist. Die Mehrfachbezeichnung des Begriffes ist einfach nicht akzeptabel, zu leicht werden die einzelnen, eigentlich identischen, Begriffsknoten als eigenständige Begriffe aufgefasst.

Abschließend kann man sagen, dass das klassische Definitionsschema zu starr ist, um die Bedeutungen der Lexeme in angemessener Weise zu bestimmen. Die reine Ordnungsstruktur (Enthält-Relation, $\geq$) ist ebenfalls schnell ausgereizt. Woher kommt das? Je mehr Begriffe in einer Ordnungsstruktur zusammen sind, desto enger ist ihr logischer Zusammenhang. Genau das ist aber vermutlich nicht angemessen. Man benötigt Begriffe, die loser gekoppelt sind, und auf verschiedener – logischer – Weise miteinander in Verbindung treten können. Das ist der Hauptgrund, warum die klassische Definitionslehre nur auf eine kleine Menge von Lexemen, im Vergleich zur Gesamtmenge der Lexeme des Lexikons, einsetzbar ist. Das klassische Verfahren ist wegen der logischen Strenge geeignet für Fachterminologien, die eher kleine Vokabelumfänge haben, und sich auch auf Nomen und wenige Verben beschränken. In einem vollumfänglichen Lexikon einer Sprache bricht die Begriffsstruktur aus der Dominanz der Ordnungsstruktur aus in höherstellige Systeme. Das schafft einen neuen logischen, aber insgesamt lockereren, Zusammenhang durch Bestimmung der Stellen. Die Beziehung der

Stellen untereinander ist hier nur durch die Zusammengehörigkeit zum selben Begriff bestimmt. Das erlaubt es, praktisch jeden Begriff mit jedem anderen in Beziehung zu setzen. Nichtsdestoweniger handelt es sich um eine logische Beziehung, sie ist im Gegensatz zur Ordnungsstruktur befreit von der Transitivität der Enthält-Relation. Um es einfach zu sagen, man kann schnell zwei Begriffe nebeneinander stellen, ohne in irgendwelche logischen Kalamitäten zu geraten, wie Widersprüche, oder unerwünschte logische Folgebeziehungen durch Ober-Unterbegriffsbeziehung. Es ist das Wechselspiel zwischen den Ordnungsstrukturen innerhalb der Begriffssysteme, und ihre Verbindung untereinander über die Stellen ihrer Begriffe, welches das Begriffsnetz des Lexikons kennzeichnet. Jedes Lexem erhält so einerseits seine Bedeutung aus dem Begriffsnetz des Lexikons, und trägt andererseits seinen Anteil an der Begriffsstruktur durch seine eigene Bedeutung bei.

6. Fazit und Ausblick

Die zentrale Erkenntnis dieser Arbeit ist, dass Begriffe untereinander eine Ordnungsstruktur bilden, und dass ein Begriffssystem ein System aus verschiedenen Subsystemen von Ordnungen ist. Diese Subsysteme sind durch die einheitliche Stellenzahl ihrer Begriffe gekennzeichnet; sie sind miteinander dadurch verbunden, dass die höherstelligen Begriffe auf die niedrigerstelligen Begriffe aufbauen. Die in der Einführung vorgestellten Definitionsketten erscheinen jetzt als ein kleiner Ausschnitt aus einem (meist einstelligem) Subsystem des vollständigen Begriffssystems. Eine isolierte Betrachtung der Definitionskette scheint daher wenig sinnvoll, vielmehr müssen sie in ihrem Zusammenhang des Ordnungssystems gesehen werden. Der ordnungstheoretische Rahmen der Begriffe ist der kleinste gemeinsame Nenner aller in Kapitel 3 vorgestellten Begriffstheorien. Interessanterweise gab es bisher keine vergleichende Gegenüberstellung von begriffstheoretischen Ansätzen.

Theoretische Ansätze haben bisweilen den Nachteil, ihre Systeme unter dem Diktat ihrer Axiome bis zur Unbrauchbarkeit einzuschränken. Alle vorgestellten Ansätze machen bestimmte Voraussetzungen darüber, wie neue Begriffe gebildet werden dürfen. Axiomatisch wird bestimmt, dass begriffliche Operatoren wie das Produkt, die Summe oder die Negation immer sinnvoll angewandt werden dürfen, und damit – möglicherweise – ein neuer dritter Begriff aus zwei anderen entsteht.[1] Besonders beliebt ist der boolesche Verband, wobei die Operatoren ohne Rücksicht auf die tatsächliche Struktur der Begriffe angewendet werden; Begriffssysteme werden geradezu mit booleschen Verbänden identifiziert. Auch die bezüglich der Existenz der Begriffe präzisere Formale Begriffsanalyse muss bei der Einführung der Negation und Opposition den Formalen Begriff aufgeben und Halbbegriffe einführen. Als Ergebnis muss man festhalten, dass auf Begriffen, wie sie sich aus den Bedeutungsdefinitionen ergeben, keine allgemein gültigen Operatoren anwendbar sind.[2] Vielmehr ist die ‚Berechnung' neuer Begriffe ein empirisches Verfahren, das in jedem Fall rechtfertigen muss,

[1] Kauppi hinterfragt als Einzige die begriffsbildenden Axiome; jedoch auch sie geht davon aus, dass ein konkretes Begriffssystem a priori axiomatisch definiert werden könne.

[2] Erst nach der vollständigen Analyse eines Begriffssystems ist eine Überprüfung der Anwendbarkeit der Begriffsoperatoren möglich. A priori ist eine Annahme der Gültigkeit von Operatoren rein hypothetisch.

dass der so ermittelte Begriff tatsächlich gültig ist, oder besser, dass er existiert. Die einzige verlässliche Quelle zur Ermittlung von Begriffen sind Definitionen, d. h. Bedeutungserklärungen, ob als Einträge eines professionellen Bedeutungswörterbuches oder als Angaben eines oder mehrerer kompetenter Sprecher; es müssen nur Definitionen sein.

Nach der empirischen Ermittlung des Begriffssystems ist eine interessante Fragestellung, wie weit ein Begriffs-Subsystem, d. h. eine Ordnung von Begriffen gleicher Stellenzahl, von einem vollständigen Verband entfernt ist. Hier sind vor allem die irreduziblen Begriffe des Systems von Interesse. Diese Begriffe müssen in einem Begriffssystem besonders wichtig sein; reduzible Begriffe sind dagegen, verbandstheoretisch betrachtet, redundant.

Das Begriffssystem als Ordnungsstruktur ermöglicht eine klare Trennung von Begriff und sprachlichem Zeichen. Das verbindende Glied zwischen beiden ist die Bedeutung, welche die Ordnungsstruktur in Textform kodiert. Die Lexik ist die Stelle im Sprachsystem, welche die Bedeutung der Zeichen als eins seiner wichtigsten Zwecke beinhaltet. Durch die Trennung von Begriff und Zeichen ist es jetzt möglich, lexikalische Lücken auf Basis der Ordnungsstruktur zu ermitteln. Das haben die Beispiel-Analysen in Kapitel 5 sehr deutlich gezeigt. Eine 1:1 Entsprechung zwischen Wörtern bzw. Lexemen und Begriffen kann es nicht geben, denn sonst bräuchte es keine anderen sprachlichen Mittel jenseits der Lexik zur Kommunikation.

Es konnte auch gezeigt werden, dass die Bedeutungserklärungen in einem Wörterbuch begrifflich weit komplexer sind, und weit mehr Informationen beinhalten als nur den Gattungsbegriff. Diese Informationen sind nichts anderes als weitere Begriffe, zu denen der definierte Begriff in Beziehung steht. Durch dieses Verfahren ist es nun möglich, alle begrifflichen Relationen zwischen den Lexemen aufzudecken und zu kodieren. Der strukturelle Aspekt der semantischen Relationen geht dabei in der Ordnungsrelation auf; die inhaltliche Seite der semantischen Relationen, die bisher immer Bedeutungen *ad-placitum* gewesen sind, ergeben sich jetzt allein aus der Bedeutungsdefinition der Wörter. Das herauszuarbeiten, war das Ziel dieser Arbeit. Abbildung 6.1 auf Seite 151 fasst die Ergebnisse in Form eines Konzept-Diagramms zusammen.

Nachdem der Zusammenhang zwischen Lexemen und Begriffen über die Bedeutungsanalyse geklärt wurde, stellt sich die Frage, wie man beide Systeme, Lexikon und Begriffe, miteinander vergleichen kann. Zum Abschluss werden mögliche Ansätze für weiterführende Untersuchungen skizziert, die über den in dieser Arbeit gesteckten Rahmen hinausgehen.

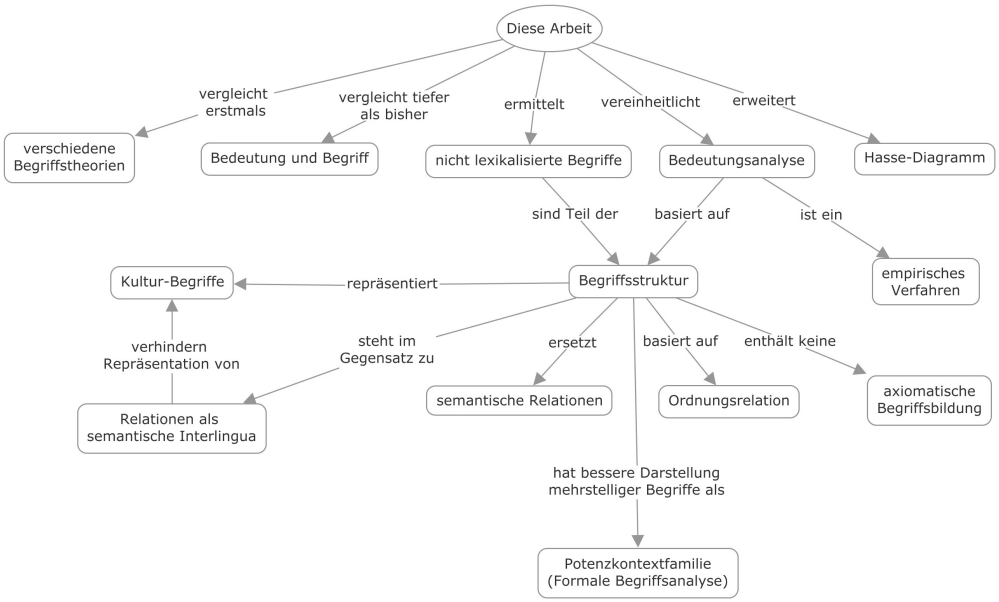


Abbildung 6.1.: Ergebnisse der Arbeit im Überblick.

6.1. Quantitative Untersuchungen

Als Einstieg in die quantitative Analyse der Begriffe stellt sich die Frage, wie viele verschiedene Begriffssysteme mit einem gegebenen Inventar an Begriffen möglich sind. Die Beantwortung dieser Frage ist ein ungelöstes mathematisches Problem, eine allgemein gültige Formel zur Berechnung aller möglichen Ordnungen bei n Elementen konnte bis heute nicht gefunden werden. Es gibt nur konstruktive Verfahren für eine relativ kleine Anzahl von Elementen. Für isomorphe Halbordnungen sind die Anzahlen der Strukturen nur bis $n = 16$ bekannt. Bei acht Begriffen hat man schon 16999 Möglichkeiten strukturell verschiedener Systeme. Selbst wenn man bei dieser Ordnung nur Strukturen zählt, in denen alle Elemente miteinander verbunden sind, d. h. dass es keine isolierten Elemente gibt, ist die Anzahl mit 14512 immer noch sehr hoch. Tabelle 6.1 stellt die beiden Verteilungen und die Differenz zwischen ihnen dar.[3] Jedes n-stellige Begriffssystem hat also schon eine große Bandbreite an Möglichkeiten. Kommt nun noch die Verbindung über die höherstelligen Begriffssysteme hinzu, dann explodieren die Möglichkeiten geradezu. Zu dieser Art der Verteilung gibt es,

[3] Die Folgen A000112 und A000608 in [Sloa].

so weit das im Rahmen dieser Arbeit festgestellt werden konnte, noch keine Untersuchungen.

n	A112	A608	A112-A608
0	1	1	0
1	1	1	0
2	2	1	1
3	5	3	2
4	16	10	6
5	63	44	19
6	318	238	80
7	2.045	1.650	395
8	16.999	14.512	2.487
9	183.231	163.341	19.890
10	2.567.284	2.360.719	206.565
11	46.749.427	43.944.974	2.804.453
12	1.104.891.746	1.055.019.099	49.872.647
13	33.823.827.452	32.664.984.238	1.158.843.214
14	1.338.193.159.771	1.303.143.553.205	35.049.606.566
15	68.275.077.901.156	66.900.392.672.168	1.374.685.228.988
16	4.483.130.665.195.080	4.413.439.778.321.680	69.690.886.873.400

Tabelle 6.1.: Isomorphe Ordnungen mit n Elementen: A112 alle Kombinationen, A608 nur verbundene Elemente.

Mit dem Ziel die verschiedenstelligen Begriffssysteme genauer zu untersuchen, sind folgende Fragestellungen von Interesse:

- Was ist die höchste Stellenzahl, die ein Begriffssystem erreicht? Man kann davon ausgehen, dass es nicht sehr viele Stellen sein können. Dafür spricht nicht allein die Kapazitätsgrenze menschlicher Kognitionsfähigkeiten. Mehrstellige Begriffe müssen relativ inhaltsarm sein, d. h. sehr allgemein sein, wenn sie in der Lage sein sollen, andere Begriffe logisch miteinander in Bezug zu setzen. Sie können aber nicht vollkommen inhaltsleer sein.

- Wie verteilen sich die Begriffe auf die einzelnen Stellensysteme? Nach den ersten Untersuchungen scheint es so zu sein, dass die niederstelligeren Begriffe den Hauptanteil bilden. In den bisherigen, bedingt vergleichbaren

Untersuchungen, wurde auf die Stellenzahl nicht eingegangen. Die Anzahl der einstelligen Begriffe ist vermutlich weit geringer als man annehmen würde, auch wenn sie sicherlich den größten Anteil bilden.

- Wie ist die Verteilung der Begriffe eines Systems, die untereinander in Verbindung stehen? Für ein beliebiges Paar solcher Begriffe gilt, dass sie nicht isoliert sind (s. o. Kauppis Formel (3.8) auf Seite 39).
- Gibt es daneben weitere Muster an Ordnungsstrukturen, die besonders charakteristisch für Begriffssysteme sind?

Im Kapitel 4 wurden kognitiv-psychologische Aspekte weitgehend ausgeblendet. Es zeigte sich, dass die kognitiv-psychologischen Fundamente in den Resultaten dieser Theorien kaum zu erkennen sind. Die hier ausgearbeitete Bedeutungsanalyse erlaubt es weit besser, den Einfluss der kognitiven Limitierungen zu untersuchen. Jetzt lassen sich die Fragen in einer leicht nachprüfbaren Form formulieren:

- Wie ist das Verhältnis von Begriffs- und Lexeminventar? Wie groß ist der Einfluss des Begriffssystems auf die Lexik einer Sprache?
- Wie viele Stellen können in einem Begriff maximal enthalten sein? Was sind die kognitiv-sprachlichen Rahmenparameter, die diese Größe beeinflussen? Diese Fragen hängen direkt mit der Fragestellung nach der maximal vorkommenden Stellenzahl der Begriffe zusammen, und können zur Klärung dieser Frage wesentlich beitragen.
- Wie ist das Verhältnis von lexikalisierten und nicht-lexikalisierten Begriffen? Nicht-lexikalisierte Begriffe bedeuten für das Individuum einen höheren Kodier- und Dekodieraufwand beim Sprechen bzw. beim Zuhören; lexikalisierte Begriffe sind in diesem Sinne als gebrauchsfertige Begriffe zu verstehen.
- Da man es mit Ordnungsstrukturen zu tun hat, kann man fragen, ob die Begriffsstrukturen gewisse Muster aufweisen, die man kognitiv bewerten kann. Werden Ordnungen mit bestimmten Merkmalen bevorzugt? Eine interessante verbandstheoretisch motivierte Frage ist, ob, und wie viele irreduzible Begriffe es im System gibt? Reduzible Begriffe sind interpretierbar als redundante Speicherung von Gedächtnisinformationen.

Die klare Trennung zwischen Begriffen und sprachlicher Form beeinflusst auch linguistische Fragestellungen. Die Bedeutungsanalyse geht von den Bedeutungsdefinitionen des Lexikons aus, um das Begriffssystem zu ermitteln. In den Fragen wurde schon die Verbindung zur Sprachtypologie angeschnitten.

- Wie beeinflusst der Typus einer Sprache die Bedeutungsanalyse? In einer Sprache mit typologisch bedingtem umfangreichen Lexikon stehen mehr Bedeutungsdefinitionen zur Verfügung als in einer Sprache mit typologisch bedingtem kleineren Lexikon. Die Bedeutungsdefinitionen repräsentieren aber nie das ganze Begriffssystem. Also hat man im ersten Fall einen systematisch bedingt besseren Zugang als im zweiten Fall. Da diese Methode ganz wesentlich von den Bedeutungsdefinitionen des Lexikons abhängt, muss der Sprachbau bei der Bewertung des Begriffssystems berücksichtigt werden.

- Welche begriffliche Struktur liegt der Polysemie zu Grunde? Es ist naheliegend, dass es zwischen Polysemie und Begriffen einen engen Zusammenhang geben muss. Es scheint so zu sein, dass Polyseme die Unterrelationen einer sehr komplexen, oft nicht-lexikalisierten, Super-Relation kodieren.[4]

- In den verschiedenen WordNet-Projekten wurden die Hyperonymie- und Hyponymie-Relationen vollständig kodiert. Kann man hieraus Ordnungsstrukturen ableiten und einfache Begriffssysteme erstellen und vergleichen? Auch wenn die Stellenzahl von Begriffen in den einzelnen Projekten nicht berücksichtigt wurde, kann so eine Untersuchung interessante Ergebnisse liefern. Die WordNets sind besonders gut geeignet für vergleichende Studien, da es verschiedene Sprach-Netze sind, die nach einem fast gleichen Verfahren erstellt und kodiert wurden.

6.2. Anwendungsgebiete

In den meisten Untersuchungen und Begriffstheorien werden Begriffe als Hilfsmittel zur Klassifikation der physikalischen Welt betrachtet. In dieser Rolle klassifizieren Begriffe die Umwelt in Dingliches, Lebendiges, Grünes, Blaues, Großes, Kleines usw. Viele ganz alltägliche Begriffe haben jedoch sehr spezielle Anwendungsgebiete. Ein gutes Beispiel sind Sprach-Begriffe, oder einfacher: die Grammatik. Begriffe wie *Nomen*, *Verb*, *Präposition*, *Subjekt*, *Prädikat*, *Haupt-* und *Nebensatz* bilden ein eigenes System. Das Anwendungsgebiet, oder die Extension dieser Begriffe, sind sprachliche Konstrukte. Jede Begriffsstruktur bildet

[4] vgl. Definition von „Haus“ mit einer Polysemie von 12 oder „Schule“ mit einer Polysemie von 6 ([Dwd]), und oben die Analyse des Begriffs *Herstellungsverfahren*. Die Polysemie von „Haus“ enthält allerdings auch die Bedeutung, als Bezeichnung für einen Menschen, wie in „altes Haus“. Hier kann die Begriffsanalyse die Abgrenzung von Polysemen unterstützen. Denn diese Bedeutung kann nicht eine Unterrelation des Begriffs von *Haus* im Sinne einer Relation *Lehrgebäude* sein.

zusammen mit seinem Anwendungsgebiet ein System.[5] Wenn das Begriffssystem in einem weiter gefassten Sinne aus der Einheit von Intension und Extension betrachtet wird, dann erweitert sich der Blickwinkel auf den Zweck, für den ein Begriffssystem entwickelt wurde. Die Grammatik wäre dann ein Begriffssystem mit Begriffen, die sich auf sprachliche Elemente beziehen. Seine Extension wäre dann der Satzbau, die Wortarten usw. Neben der Grammatik wäre ein weiteres wichtiges Sprach-Begriffssystem eins, das sich mit der Übersetzung von einer Sprache in eine andere befasst. Die Begriffe wären ähnlich dem grammatischen System (im weitesten Sinne inklusive Phonologie, Phonetik, Morphologie, Syntax und Lexik), ergänzt um mehrstellige Begriffe, die Beziehungen zwischen den beiden unterschiedlichen Grammatiken herstellen. Die Extension eines solchen Systems wären (im weitesten Sinne) die beiden Sprachen.

Den Sprach-Begriffssystemen zugehörig muss man auch die Stilangaben und Adress- und Referenzterminologien ansehen. Begriffe wie *Umgangssprachlich*, *formell* usw. kodieren in welchem Textzusammenhang ein Wort oder eine Phrase verwendet wird. Adress- und Referenzterminologien kodieren mit Hilfe entsprechender Begriffe, welches Wort man wählen muss, wenn man z. B. einen Verwandten oder Fremden anspricht. Ein anderes Wort für diesen Verwandten bei gleichem Sprecher kann angebracht sein, wenn der Sprecher zu einer dritten Person über diesen Verwandten redet.

Eine ganz andere Art von Begriffssystem ist das ‚Begriffs-Begriffssystem', oder die Begriffe der zweiten Intentionen, wie es die Scholastiker nannten.[6] Das sind Begriffe, wie sie vor allem in dieser Arbeit verwendet wurden: *Gattung*, *Art*, *Ober-*, *Unterbegriff*, *Differenzbegriff*, *n-stelliger Begriff* usw. Ihr Anwendungsgebiet sind andere Begriffe. Dabei handelt es sich nicht um die Begriffsrelation des Enthaltens. Wenn der Begriff *Nomen* vom Wort „Haus" ausgesagt wird, dann ist das analog dazu zu sehen, wenn der Begriff *Haus* bezogen auf ein konkretes Haus verwendet wird.

Die aus der Logik bekannten Modalitäten stellen ein weiteres Anwendungsgebiet von Begriffen dar. Modale Begriffe des *Glaubens*, *Meinens*, *Möglichen*, *Notwendigen* u. ä. bilden dabei das Begriffssystem. Dieses wird angewendet auf logische Aussagen (Propositionen).[7]

[5] In dieser Arbeit wird der Terminus „Begriffssystem" nur für die intensionale Ordnung der Begriffsstruktur verwendet. Die Bedeutungsdefinitionen spezifizieren nur die intensionale Seite eines weiter gefassten (Begriffs-)Systembegriffs.

[6] Vgl. [Boc02] S. 176-179.

[7] Von den typischen Modalitäten sind die Begriffe zu unterscheiden, die sich auf die Rede beziehen. Gemeint sind Lexeme wie „Sprechen", „Sagen", „Fragen", und alle Lexeme mit denen man eine indirekte Rede einleiten kann. Weil die Extension nicht nur logische Entitäten umfassen kann, sondern eben auch nur Zitate. Die Grenze zwischen Proposition und Rede ist hier sehr unscharf.

Die Trennung von Intension und Extension ist die Grundlage dafür, dass ein Begriffssystem auf alles das angewendet werden kann, auf das man sich beziehen kann. Zeichensysteme machen diesbezüglich keine Einschränkungen. Der Bezug muss nur mit Hilfe des Zeichensystems möglich sein. Die oft angeführte Existenzfrage ist für den Bezug nicht zwingend notwendig. Man kann ein Märchen genauso falsch oder richtig verstehen, wie eine gewöhnliche Wegbeschreibung. In dieser großen Flexibilität von Begriffen gründen sich Stärke und Schwäche von Begriffssystemen: Es gibt nicht *das* Begriffssystem.

6.3. Anthropologie

Ein weiterer Punkt soll nicht unerwähnt bleiben, den diese Arbeit zwar gar nicht thematisiert hat, der aber gerade heutzutage, in Zeiten des Semantic Web und WordNet, unbedingt von großer Wichtigkeit ist. In beiden wird der Begriff als etwas Universelles angesehen. In Top-Ontologien laufen alle Begriffe zusammen, sie sind so etwas wie der kleinste gemeinsame Nenner des menschlichen Wissens. Aus informationstechnischer Sicht ist so eine Standardisierung der Begriffe wünschenswert. Das führt aber auch zu einer Verarmung des Denkens. Begriffe sind sehr stark kulturell geprägt. Verwandtschaftsbeziehungen z. B. waren lange Zeit ein zentraler Gegenstand anthropologischer Untersuchungen. In anderen Kulturen unterscheiden sie sich sehr stark von einer westlich geprägten Auffassung von Familie. In vielen Polynesischen Sprachen gibt es nur ein Wort für alle weiblichen Angehörigen der eigenen Abstammungslinie. Die Menschen dieser Kulturen haben durchaus einen Begriff für die Beziehung zwischen einer Frau und dem Kind, das sie geboren hat, aber das spielt in ihrer Kultur keine vergleichbar herausragende Rolle wie in unserer Kultur. Sie haben daher nicht nur keine spezielle Vokabel für die Person, die wir „Mutter“ nennen würden, sondern eben auch nicht unseren Begriff von *Mutter*. Es wäre also sehr unpassend, wollte man die Verwandtschaftsbeziehungen in einem Begriffssystem kodieren wollen, das die moderne westliche Auffassung von Familie repräsentiert.[8] Man kann sich leicht vorstellen, dass verschiedene Kulturen auch in anderen Bereichen ganz andere Begriffssysteme entwickelt haben. Man muss daher sagen, dass mit dem Aussterben eines Volkes nicht nur seine Sprache und Kultur für immer verloren geht, sondern eben auch sein Begriffssystem. Kann man das Begriffssystem empirisch ermitteln und formal darstellen, so gibt es auch eine kleine Chance, die Kultur dieses Volkes zu erhalten.

Die hier eingeführte Bedeutungsanalyse gibt keine universellen oder impliziten Voraussetzungen vor. Um zwei Begriffssysteme miteinander zu vergleichen,

[8] [Sch72], S. 14.

bzw. aufeinander abzubilden (was nicht das Gleiche ist wie *Übersetzen*), muss ein drittes Begriffssystem etabliert werden, dessen Extension die beiden zu vergleichenden Begriffssysteme sind.

6.4. Begriffs-Werkbank

Zum Abschluss sei noch ein ganz praktisch ausgerichtetes Software-Projekt skizziert. Wie die Bedeutungsanalyse gezeigt hat, können die Begriffe nicht maschinell ermittelt werden. Sicher ist es möglich über einen entsprechenden Parser, gute Begriffskandidaten im Bedeutungstext zu identifizieren. Es wird viel manuelle Arbeit nötig sein, diese Begriffe zu bestätigen, und vor allem diejenigen zu finden, die nicht durch Parsen ermittelt werden können, weil sie nicht lexikalisiert sind. Davon gab es ja nicht wenige.

Eine Software zur Analyse von Begriffen benötigt als Datenrohmaterial das Lexikon mit seinen Lexemen, Wortartinformationen und natürlich den Bedeutungstexten. Dann markieren die Benutzer welcher Textteil in der Bedeutungsdefinition der Gattungsbegriff ist, kodieren den markierten Text als Gattungsbegriff, notieren seine Stellenzahl und damit auch die Stellenzahl des Begriffes des zu definierenden Lexems, denn diese beiden Begriffe müssen in ihrer Stellenzahl übereinstimmen. Sie verfahren mit der Bedeutung so, wie das im Kapitel über Bedeutungsanalyse durchgeführt wurde, bis die ganze Definition des Lexems erfasst ist. Das Programm erstellt dabei die Ordnungsstruktur. Im weiteren Verlauf der Kodierung kann das Programm die Bearbeiter beim Vorschlagen von schon erkannten Begriffen unterstützen. Falls ein Parser verwendet wird, kann das Programm auch diesem seine begrifflich-semantischen Informationen zur Verfügung stellen, um die manuelle Kodierung und Automatisierung, wo möglich, zu unterstützen. Aus dem Prozess resultiert eine riesige Kreuztabelle über alle Bedeutungen des Lexikons. Die Größe der Kreuztabelle muss nicht beunruhigen. Kreuztabellen lassen sich sehr effizient im Speicher abbilden, und ermöglichen schnelle Zugriffszeiten.

Abbildung 6.2 auf Seite 159 zeigt einen Informationsmodellentwurf in UML für ein solches Software-Projekt. Die zentrale Klasse ist `Lexicon`. Die Software ist in der Lage mehrere Lexika zu verwalten. Jede Instanz von `Lexicon` enthält neben den bibliographischen Angaben des Lexikons auch die im jeweiligen Lexikon vorkommenden Wortarten (`Wordform`, `PartOfSpeech`). Es gibt eine allgemeine Klasse für alle Lexikoneinträge, das `LexiconItem`, mit Lemma und Homonymnummer. Davon abgeleitet sind die eigentlichen Lexeme als `LexiconEntry` und die undefinierten Begriffe, `Indefinables`. Jedes Lexem, `Lexeme`, ist Teil eines Lexikoneintrags, `LexiconEntry`. Es hat eine Polysemnummer, seine Be-

deutung als reinen Text und seine `Definition`. Diese wiederum besteht aus dem `Definiendum` und dem `Definiens`. Das Definiens ist einfach eine Liste von `LexiconItems`. Als Ergebnis der Textanalyse können sie mit Textteilen der Bedeutung verknüpft werden, was hier nicht modelliert ist. Das `Definiendum` ist ein Begriff, `Concept`. Über das `Concept` wird die Ordnungsstruktur durch rekursive Referenzen abgebildet. Das ist im Grunde eine äquivalente Struktur wie sie z. B. Tabelle 5.3 auf Seite 135 zeigt. Dazu enthält die Klasse die Stelligkeit des Begriffs und Referenzen für die Enthält- und Enthalten-Relationen. Die Klasse kennzeichnet undefinierte und nicht-lexikalisierte Begriffe. Wie erwähnt sind die nicht-lexikalisierten Begriffe in diesem Modell Teil des Lexikons.

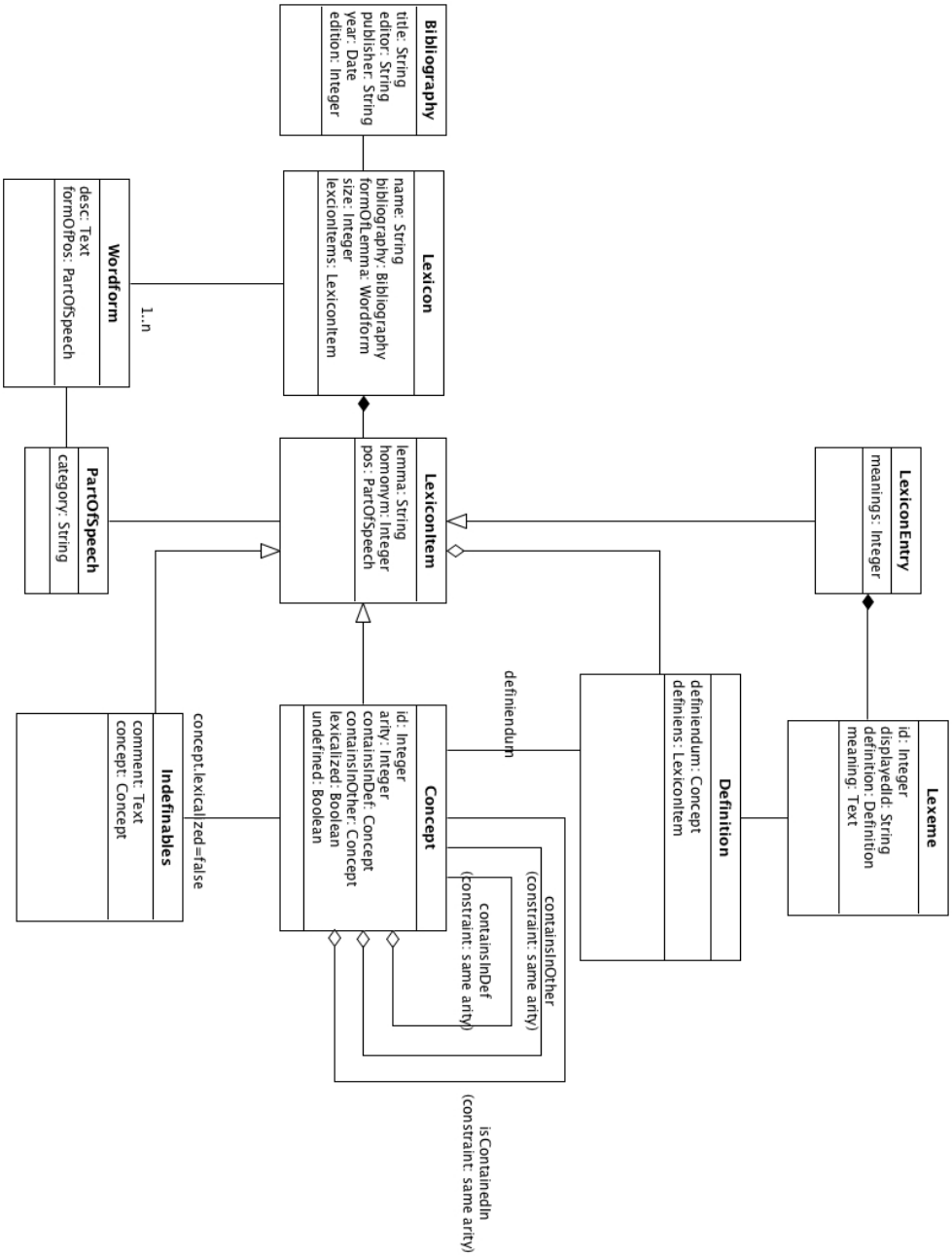


Abbildung 6.2.: Informationsmodell Begriffs-Werkbank.

A. Symbole

$\neg$	aussagenlogische Negation, begriffliche Negation (Formale Begriffsanalyse)	17, 72
$\lrcorner$	Opposition (Formale Begriffsanalyse)	72
$\wedge$	aussagenlogisches Und	17
$\vee$	aussagenlogisches Oder	17
$\rightarrow$	aussagenlogische Implikation (Subjunktion)	17
$\leftrightarrow$	aussagenlogische Äquivalenz (Bisubjunktion)	17
$\exists$	prädikatenlogischer Existenzquantor	17
$\forall$	prädikatenlogischer Allquantor	17
$\curlywedge$	begriffliche Vereinbarkeit (Kauppi)	39
$\curlyvee$	begriffliche Unvereinbarkeit (Kauppi)	39
H	begriffliche Vergleichbarkeit (Kauppi)	39
$\not\mathsf{H}$	begriffliche Unvergleichbarkeit (Kauppi)	39
$/$	Begriffsbestimmung (Kauppi)	58
$/^{\wedge}$	Begriffsbeschränkung (Kauppi)	58
$/^{\cup}$	begriffliche Unterrelation (Kauppi)	58
$\otimes$	begriffliches Produkt (Kauppi)	41
$\oplus$	begriffliche Summe (Kauppi)	42
$\oslash$	begrifflicher Quotient (Kauppi)	48
$\ominus$	begriffliche Differenz (Kauppi)	44
$\bar{a}$	begriffliche Negation(Kauppi)	45
$a^{\bar{D}}$	a ist ein undefinierter, minimaler Begriff (Kauppi)	50
G	Der generelle Begriff (Kauppi)	50
a^S	a ist ein spezieller Begriff (Kauppi)	51
Z	Zukommen-Relation (Kauppi)	53
$\underset{n}{r}$	n-stelliger Begriff (Kauppi)	57
$\underset{n}{R}$	System n-stelliger Begriffe (Kauppi)	57
I	Identitätsrelation (Kauppi)	61
r/s	relatives Produkt zweistelliger Begriffe (Kauppi)	61
r^n	n-te Potenz des Produktes eines Begriffes (Kauppi)	62
$g\,\mathrm{I}\,m$	Inzidenzrelation (Formale Begriffsanalyse)	68

A'	Strichoperator (Formale Begriffsanalyse)	69
$\geq$	größer als, enthält	18
$>$	größer und nicht gleich, enthält echt	18
$\leq$	kleiner oder gleich, ist enthalten	18
$<$	kleiner und nicht gleich, ist echt enthalten	18
$\mathbb{O}(M)$	M ist eine Ordnung	18
$\mathbb{V}(M)$	M ist ein Verband	24
$\mathbb{V}^*(M)$	M ist ein endlicher Verband	24
$\succ$	oberer Nachbar	19
$\prec$	unterer Nachbar	19
$\parallel$	Vergleichbarkeit zweier Elemente einer Ordnung	39
$\cup$	Vereinigung	17
$\cap$	Schnittmenge	17
$\subseteq$	Teilmenge	17
$\supseteq$	Obermenge	17
$\setminus$	Differenzmenge	17
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge der Menge X	28
$\sqcup$	Verbindung, Vereinigung von Verbandselementen	24
$\sqcap$	Schnitt von Verbandselementen	24
$\bigsqcup$	Verbindung, Vereinigung von Verbandsteilmengen	24
$\bigsqcap$	Schnitt von Verbandsteilmengen	24
$A\downarrow$	untere Schrankenmenge einer geordneten Menge A	21
$A\uparrow$	obere Schrankenmenge einer geordneten Menge A	21
$\downarrow A$	Ordnungsideal, Abschnitt der Menge A	31
$\varphi : M \longrightarrow N$	Homomorphismus von der Menge M in die Menge N	27
$-A$	Komplement der Menge A	17
$\emptyset$	Leere Menge	17
$\mathcal{V}$	Allklasse	53
$\mathcal{K}(a)$	Umfang des Begriffes a (Kauppi)	53
U	Unterordnung (Kauppi)	63
$!\,a$	Gedanke des Begriffes a (Kauppi)	63
$\longrightarrow\!\prec$	Teilidentität (Freytag-Löringhoff)	78
$\longleftarrow\!\prec$	Echte Teilidentität (Freytag-Löringhoff)	78
$\succ\!\prec$	Totale Identität (Freytag-Löringhoff)	78
$\longleftrightarrow$	Diversität (Freytag-Löringhoff)	78
$\leftrightsquigarrow$	Disparität (Freytag-Löringhoff)	79
a^I	a ist ein Individualbegriff (Freytag-Löringhoff)	79
M	Der meinbare Begriff (Freytag-Löringhoff)	79
W	Der widersprüchliche Begriff (Freytag-Löringhoff)	79

$\top$	Das Einselement	19
$\bot$	Das Nullelement	19
$\equiv$	Äquivalenz von Klassen (Description Logic)	86
$\sqsubseteq$	Subsumption von Klassen (Description Logic)	86
$\mathcal{I}$	Interpretation (Description Logic)	85
$A^{\mathcal{I}}$	Interpretationsfunktion für Ausdruck A (Description Logic)	85

B. Verteilungen

Tabelle B.1.: Anzahl isomorpher distributiver Verbände mit n Elementen (A006966, [Slo16]).

n	a(n)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	2
5	5
6	15
7	53
8	222
9	1.078
10	5.994
11	37.622
12	262.776
13	2.018.305
14	16.873.364
15	152.233.518
16	1.471.613.387
17	15.150.569.446
18	165.269.824.761
19	1.901.910.625.578
20	23.003.059.864.006

Tabelle B.2.: Anzahl isomorpher reduzierter Kontexte mit n Objekten (Formale Begriffsanalyse, A047684, [Slo16]).

n	f(n)
1	1
2	2
3	9
4	126
5	13.596
6	108.096.891

C. Literatur

[Agr75] Erhard Agricola. *Semantische Relationen im Text und im System.* 3. Aufl. Halle (Saale): Niemeyer, 1975.

[Agr79] Erhard Agricola. *Textstruktur, Textanalyse, Informationskern.* 1. Aufl. Leipzig: Verl. Enzyklopaedie, 1979.

[AK83] G. Altmann und B. Kind. „Ein semantisches Gesetz“. In: *Glottometrika.* Bd. 5. Bochum: Brockmeyer, 1983, S. 1–13.

[Ale84] Pavel M. Alekseev. *Statistische Lexikographie.* Bochum: Brockmeyer, 1984.

[Alo+98] Antonietta Alonge u. a. „Special issue EuroWordNet“. In: Hrsg. von Piek Vossen. Dordrecht: Kluwer, 1998. Kap. The Linguistic Design of the EuroWordNet Database, S. 91–115.

[Alt+02] Gabriel Altmann u. a. *Einführung in die quantitative Lexikologie.* Bd. 5. Göttinger Linguistische Abhandlungen. Peust & Gutschmidt Verlag, 2002.

[Alt85] Gabriel Altmann. „Semantische Diversifikation“. In: *Folia Linguistica* 19.1-2 (1985), S. 177–200.

[Ari98] Aristoteles. *Aristoteles: Organon – Kategorien [u. a.]* Bd. 1. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1998.

[Baa+02] Franz Baader u. a. *The Description Logic Handbook.* Cambridge Univ. Press, 2002.

[Bag02] Dariusch Bagheri. „Einführung in die quantitative Lexikologie“. In: Bd. 5. Göttinger Linguistische Abhandlungen. Peust & Gutschmidt Verlag, 2002. Kap. Definitionsfolgen und Lexemnetze, S. 94–133.

[Bag05] Dariusch Bagheri. „How Many Lexical-semantic Relations are Necessary?“ In: *Classification — the Ubiquitous Challenge.* Hrsg. von Claus Weihs und Wolfgang Gaul. Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization. Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 482–489.

[BN02] Franz Baader und Werner Nutt. „The Description Logic Handbook“. In: Cambridge Univ. Press, 2002. Kap. Basic Description Logic, S. 47–100.

[Boc+15] Conrad Bock u. a. *OMG Unified Modeling Language – Version 2.5*. Dokumentennummer formal/2015-03-01. Object Management Group, März 2015. URL: `http://www.omg.org/spec/UML/2.5/`.

[Boc02] J. M. Bochenski. *Formale Logik*. 5. Aufl. Freiburg [u.a.]: Alber, 2002.

[Cru86] David A. Cruse. *Lexical semantics*. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 1986.

[Dina] *DIN 2330: Begriffe und Benennungen*. Techn. Ber. Deutsches Institut für Normung e. V., 1993.

[Dinb] *DIN 2331: Begriffssysteme und ihre Darstellung*. Techn. Ber. Deutsches Institut für Normung e. V.

[Dinc] *DIN 2342: Begriffe der Terminologie*. Techn. Ber. Deutsches Institut für Normung e. V., 1992.

[DK05] Frithjof Dau und Julia Klinger. „From Formal Concept Analysis to Contextual Logic“. In: *Formal Concept Analysis*. Hrsg. von Bernhard Ganter, Gerd Stumme und Rudolf Wille. Bd. 3626. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2005, S. 81–100.

[Dor04] Franz Dornseiff. *Der deutsche Wortschatz nach Sachgruppen*. 8. Aufl. Berlin: de Gruyter, 2004.

[DP02] Brian A. Davey und Hilary A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. 2. Aufl. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Pr., 2002.

[Dub31] Walter Dubislav. *Die Definition*. 3. Aufl. Leipzig: Meiner, 1931.

[Dud] *Duden – Das Bedeutungswörterbuch*. 3. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 2002.

[Dwd] *Digitales Wörterbuch der Deutschen Sprache*. Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften. Dez. 2012. URL: `http://www.dwds.de`.

[EDL08] Peter W. Eklund, Jean Diatta und Michel Liquiere, Hrsg. *Proceedings of the Fifth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, CLA 2007, Montpellier, France, October 24-26, 2007*. Bd. 331. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2008.

[Ern82] Marcel Erné. *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1982.

[Ess70] Wilhelm K. Essler. *Wissenschaftstheorie. Definition und Reduktion.* 1. Aufl. Bd. 1. Freiburg [u.a.]: Alber, 1970.

[Ess82] Wilhelm K. Essler. *Wissenschaftstheorie. Definition und Reduktion.* 2. Aufl. Bd. 1. Freiburg [u.a.]: Alber, 1982.

[Fel93] Christiane Fellbaum. *English Verbs as Semantic Net.* 1993. URL: `http://wordnetcode.princeton.edu/5papers.pdf` (besucht am 03. 11. 2016).

[Fel98a] Christiane Fellbaum, Hrsg. *WordNet.* Cambridge, Mass. [u.a.]: MIT Press, 1998.

[Fel98b] Christiane Fellbaum. „WordNet". In: Hrsg. von Christiane Fellbaum. Cambridge, Mass. [u.a.]: MIT Press, 1998. Kap. A Semantic Network of English Verbs, S. 69–104.

[FL55] Bruno Baron von Freytag-Löringhoff. *Logik. Ihr System und ihr Verhältnis zur Logistik.* Bd. 1. Stuttgart [u.a.]: Kohlhammer, 1955.

[FL67] Bruno Baron von Freytag-Löringhoff. *Logik. Definitionstheorie und Methodologie des Kalkülwechsels.* Bd. 2. Stuttgart [u.a.]: Kohlhammer, 1967.

[FL85] Bruno Baron von Freytag-Löringhoff. *Neues System der Logik.* Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1985.

[FLP74] Bruno Baron von Freytag-Löringhoff und Johann-Michael von Petzinger. „Zur Logik der Individualbegriffe". In: *Zeitschrift für philosophische Forschung* 28.3 (1974), S. 443–454.

[GK98] Bernhard Ganter und Sergei O. Kuznetsov. „Stepwise construction of the Dedekind-MacNeille completion". In: *Conceptual Structures: Theory, Tools and Applications.* Hrsg. von Marie-Laure Mugnier und Michel Chein. Bd. 1453. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1998, S. 295–302.

[GSW05] Bernhard Ganter, Gerd Stumme und Rudolf Wille, Hrsg. *Formal Concept Analysis, Foundations and Applications.* Bd. 3626. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2005.

[GW96] Bernhard Ganter und Rudolf Wille. *Formale Begriffsanalyse.* Springer Berlin / Heidelberg, 1996.

[Ham88] R. Hammerl. „Neue Modelltheoretische Untersuchungen im Zusammenhang mit dem Martingesetz der Abstraktionsebenen". In: *Glottometrika.* Bd. 9. 1988, S. 105–120.

[Ham91] Rolf Hammerl. *Untersuchungen zur Struktur der Lexik.* Warschau, Univ., Habil.-Schr., 1991. Trier: WVT - Wissenschaftlicher Verlag Trier, 1991.

[Han08a] Patrick Hanks, Hrsg. *Lexicology. Formal approaches to the lexicon.* Bd. 6. London [u.a.]: Routledge, 2008.

[Han08b] Patrick Hanks, Hrsg. *Lexicology. Lexical semantics and structures.* Bd. 2. London [u.a.]: Routledge, 2008.

[Hel08] Hermann Helbig. *Wissensverarbeitung und die Semantik der natürlichen Sprache: Wissensrepräsentation mit MultiNet.* 2. Aufl. eXamen.press. Berlin u.a.: Springer, 2008.

[Hen72] Helmut Henne. *Semantik und Lexikographie.* Marburg, Univ., Habil.-Schr., 1970. Berlin [u.a.]: de Gruyter, 1972.

[Her67] Hans Hermes. *Einführung in die Verbandstheorie.* 2. Aufl. Springer Berlin / Heidelberg, 1967.

[Hua10] Chu-Ren Huang, Hrsg. *Ontology and the lexicon: a natural language processing perspective / ed. by Chu-Ren Huang ...* Studies in natural language processing. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2010.

[KA93] R. Köhler und G. Altmann. „Begriffsdynamik und Lexikonstruktur“. In: *Theorie und Praxis des Lexikons.* Hrsg. von F. Beckmann und G. Heyer. de Gruyter, 1993, S. 173–190.

[Kan87] Immanuel Kant. *Kritik der reinen Vernunft.* B. 1787.

[Kau60] Raili Kauppi. *Über die Leibnizsche Logik.* Acta Philosophica Fennica, Fasc. XII. Helsinki: Societas Philosophica, 1960.

[Kau67] Raili Kauppi. *Einführung in die Theorie der Begriffssysteme.* Acta Universitatis Tamperensis Serie A Band 15. Julkaisija Tampereen Yliopisto, 1967.

[Kla] Ruth Klappenbach, Hrsg. *Wörterbuch der deutschen Gegenwartssprache.* Bd. 1-6. Berlin: Akademie-Verlag.

[Kle79] Reinhard Kleinknecht. *Grundlagen der modernen Definitionstheorie.* Königstein/Ts.: Scriptor-Verl., 1979.

[Kli01] Julia Klinger. „Simple Semiconcept Graphs: A Boolean Logic Approach“. Englisch. In: *Conceptual Structures: Broadening the Base.* Hrsg. von Harry S. Delugach und Gerd Stumme. Bd. 2120. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2001, S. 101–114.

[Köh08] R. Köhler. „Statistische Methoden in der Lexikologie“. In: *Lexikologie*. Hrsg. von D. Cruse u. a. Bd. 2. Halbband. Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft. Berlin, Boston: de Gruyter Mouton, 2008, S. 953–962.

[Köh86] Reinhard Köhler. *Zur linguistischen Synergetik*. Diss. Univ. Bochum: 1985. Bochum: Brockmeyer, 1986.

[LLL10] SuJian Li, Qin Lu und Wenjie Li. „Ontology and the lexicon: a natural language processing perspective / ed. by Chu-Ren Huang ...“ In: Hrsg. von Chu-Ren Huang. Studies in natural language processing. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2010. Kap. Experiments of ontology construction with Formal Concept Analysis.

[LS93] G.W. Leibniz und F. Schupp. *Allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und Wahrheiten*. Philosophische Bibliothek. Meiner, F, 1993.

[Luk+97] Dickson Lukose u. a., Hrsg. *Conceptual Structures: Fulfilling Peirce's Dream, Fifth International Conference on Conceptual Structures, ICCS '97, Seattle, Washington, USA, August 3-8, 1997, Proceedings*. Bd. 1257. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1997.

[Mar74] Robert Martin. „Syntaxe de la Définition Lexicographique: Étude Quantitative des Définissants dans le 'Dictionnaire Fondamental de la Langue Française'“. In: *Statistique et Linguistique*. Hrsg. von J. David und R. Martin. Paris: Klincksiek, 1974, S. 61–71.

[Mel06] Igor Mel'cuk. „Explanatory Combinatorial Dictionary“. In: *Open Problems in Linguistic and Lexicography*. Hrsg. von Giandomenico Sica. Polimetrica (Monza, Italien), 2006, S. 225–355.

[Mil+90] George A. Miller u. a. „Introduction to WordNet: an on-line lexical database.“ In: *International Journal of Lexicography* 3.4 (1990), S. 235 –244.

[Mul] *MultiNet*. 2016. URL: `http://pi7.fernuni-hagen.de/forschung/multinet/multinet_de.html#4`.

[Mur03] M. Lynne Murphy. *Semantic relations and the lexicon*. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2003.

[NR06] Natasha Noy und Alan Rector. *Defining N-ary Relations on the Semantic Web*. 2006. URL: `http://www.w3.org/TR/2006/NOTE-swbp-n-aryRelations-20060412/` (besucht am 21. 07. 2013).

[OR30] C. K. Ogden und I. A. Richards. *The Meaning of Meaning*. 4. Aufl. New York: Harcourt, Brace & World, Inc., 1930.

[Pet75] Johann-Michael von Petzinger. *Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik*. Tübingen, Univ., Diss., 1975. 1975.

[Pla04] Platon. „Politikos“. In: *Platon. Sämtliche Werke*. 34. Aufl. Bd. 3. Hamburg: Rowohlt, 2004.

[Pre00] Susanne Prediger. „Terminologische Merkmalslogik in der Formalen Begriffsanalyse“. In: *Begriffliche Wissensverarbeitung: Methoden und Anwendungen*. Hrsg. von Gerd Stumme und Rudolf Wille. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2000, S. 99–124.

[Pre97] Susanne Prediger. „Logical Scaling in Formal Concept Analysis.“ In: *ICCS*. Hrsg. von Dickson Lukose u. a. Bd. 1257. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1997, S. 332–341.

[Pre98] Susanne Prediger. *Einfache Begriffsgraphen: Syntax und Semantik*. Preprint, FB Mathematik, TU Darmstadt. 1998.

[Pri98] Uta Priss. *Relational Concept Analysis: Semantic Structures in Dictionaries and Lexical Databases*. Shaker Verlag, 1998.

[PW99] Susanne Prediger und Rudolf Wille. „The Lattice of Concept Graphs of a Relationally Scaled Context“. In: *Cyre (eds.): Conceptual Structures: Standards and Practices. LNAI 1640*. Springer, 1999, S. 401–414.

[Qui66] Ross M. Quillian. *Semantic Memory*. Scientific Report No. 2. Air Force Cambridge Research Laboratories. Office Of Aerospace Research. United States Air Force, 1966.

[Qui68] M. Ross Quillian. „Semantic Memory“. In: *Semantic Information Processing*. Hrsg. von Marvin L. Minsky. MIT Press, 1968, S. 227–270.

[Rei10] Klaus Reichenberger. *Kompendium semantische Netze*. Heidelberg [u.a.]: Heidelberg [u.a.] : Springer, 2010.

[RKH11] Sebastian Rudolph, Markus Krötzsch und Pascal Hitzler. „Foundations of description logics“. In: *Reasoning Web. Semantic Technologies for the Web of Data – 7th International Summer School 2011*. Hrsg. von Axel Polleres u. a. Bd. 6846. LNCS. Springer, 2011, S. 76–136.

[RM75] E. Rosch und C. B. Mervis. „Family Resemblance: Studies in the Internal Structure of Categories“. In: *Cognitive Psychology* 7 (1975), S. 573–605.

[Rod+98] Horacio Rodríguez u. a. „Special issue EuroWordNet“. In: Hrsg. von Piek Vossen. Dordrecht: Kluwer, 1998. Kap. The Top-Down Strategy for Building EuroWordNet: Vocabulary Coverage, Base Concepts and Top Ontology, S. 45–80.

[Ros+76] E. Rosch u. a. „Basic Objects in Natural Categories“. In: *Cognitive Psychology* 8 (1976), S. 382–439.

[Rus71] Bertrand Russell. *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*. 2. Aufl. 8. Nachdruck. London: Allen und Unwin, 1971.

[Sch72] Ernest Lester Schusky. *Manual for kinship analysis*. 2. Aufl. New York [u.a.]: Holt, Rinehart und Winston, 1972.

[SF96] Otto Schmeil und Jost Fitschen. *Flora von Deutschland*. 90. Aufl. Wiesbaden: Quelle & Meyer Verlag, 1996.

[SH91] Jadwiga Sambor und Rolf Hammerl, Hrsg. *Definitionsfolgen und Lexemnetze*. Bd. I. Richter-Altman Medienverlag, 1991.

[Sko81] Ėduard F. Skorochod'ko. *Semantische Relationen in der Lexik und in Texten*. Bochum: Brockmeyer, 1981.

[Sloa] N. J. A. Sloane, Hrsg. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Anzahl isomorpher Ordnungsstrukturen mit verbundenen Elementen. URL: `https://oeis.org/A000608` (besucht am 12. 08. 2016).

[Slob] N. J. A. Sloane, Hrsg. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Anzahl isomorpher Ordnungsstrukturen. URL: `https://oeis.org/A000112` (besucht am 12. 08. 2016).

[Slo16] N. J. A. Sloane, Hrsg. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2016. URL: `http://oeis.org`.

[Sow84] John Sowa. *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. The Systems Programming Series. Addison-Wesley, 1984.

[Sow91] John F. Sowa, Hrsg. *Principles of Semantic Networks: Explorations in the Representation of Knowledge*. The Morgan Kaufmann series in representation and reasoning. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1991.

[Sow92] John F. Sowa. „Semantic Networks“. In: 2. Aufl. Aktualisierte Fassung von John Sowas Web-Seite. New York, USA: John Wiley & Söhne, 1992. URL: http://www.jfsowa.com/pubs/semnet.htm.

[SS09] Steffen Staab und Rudi Studer, Hrsg. *Handbook on ontologies*. 2. Aufl. Dordrecht [u.a.]: Springer, 2009.

[Uni10] Princeton University, Hrsg. *WordNet*. 2010. URL: http://wordnet.princeton.edu.

[VF] Piek Vossen und Christiane Fellbaum, Hrsg. *The Global WordNet Association*. URL: http://globalwordnet.org (besucht am 28. 06. 2014).

[Vos+98] Piek Vossen u. a. *The EuroWordNet Base Concepts and Top Ontology*. 1998.

[Vos98] Piek Vossen, Hrsg. *Special issue EuroWordNet*. Dordrecht: Kluwer, 1998.

[VW05] Björn Vormbrock und Rudolf Wille. „Semiconcept and Protoconcept Algebras: The Basic Theorems“. In: *Formal Concept Analysis*. Hrsg. von Bernhard Ganter, Gerd Stumme und Rudolf Wille. Bd. 3626. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 34–48.

[Wes98] Horst Wessel. *Logik*. 4. Aufl. Bd. 2. Logische Philosophie. Berlin: Logos-Verlag, 1998.

[Wie96] Anna Wierzbicka. *Semantics*. Oxford [u.a.]: Oxford Univ. Press, 1996.

[Wil00a] Rudolf Wille. „Boolean Concept Logic“. In: *Conceptual Structures: Logical, Linguistic, and Computational Issues*. Hrsg. von Bernhard Ganter und Guy W. Mineau. Bd. 1867. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2000, S. 317–331.

[Wil00b] Rudolf Wille. „Contextual logic summary“. In: *Conceptual Structures. Contributions to ICCS*. Hrsg. von Gerd Stumme. Shaker Verlag, 2000, S. 265–276.

[Wil01] Rudolf Wille. „Boolean Judgment Logic“. Englisch. In: *Conceptual Structures: Broadening the Base*. Hrsg. von Harry S. Delugach und Gerd Stumme. Bd. 2120. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2001, S. 115–128.

[Wil07] Rudolf Wille. „Concept Graphs as Semantic Structures for Contextual Judgment Logic“. In: *CLA*. Hrsg. von Peter W. Eklund, Jean Diatta und Michel Liquiere. Bd. 331. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2007.

[Wil97] Rudolf Wille. „Conceptual graphs and formal concept analysis“. In: *Conceptual Structures: Fulfilling Peirce's Dream*. Hrsg. von Dickson Lukose u. a. Bd. 1257. Lecture Notes in Computer Science. 10.1007/BFb0027878. Springer Berlin / Heidelberg, 1997, S. 290–303.

[Wil98] Rudolf Wille. „Triadic concept graphs“. In: *Conceptual Structures: Theory, Tools and Applications*. Hrsg. von Marie-Laure Mugnier und Michel Chein. Bd. 1453. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1998, S. 194–208.

[Woo75] W. A. Woods. *What's in a Link: Foundations for Semantic Networks*. Techn. Ber. Nr. 3072. Bold Beranek und Newman Inc., 1975.

[Zal00] Edward N. Zalta. „A (Leibnizian) Theory of Concepts“. In: *Philosophiegeschichte und logische Analyse* 3 (2000), S. 137–183.

[ZW75] Aleksandr A. Zinov'ev und Horst Wessel. *Logische Sprachregeln*. München [u.a.]: Fink, 1975.

Sachregister

Äquivalenz, 17, 24, 25, 54
  begriffliche -, 86
0-Element, 22, 50, 83
1-Element, 22, 24, 29, 51, 83

ABox, 87
Abschnitt, 31, 71
Adjektiv, 103, 105, 106, 118, 137, 138, 141, 143, 145
Adjektivdefinition, 137, 138
Adjungieren, 28, 29
Adverb, 103, 106, 118, 143
Anti-Atom, *siehe* Ko-Atom
Antonymie, 105
Antonymie-Relation, 107
Art, *siehe* Begriff, Unter-
Art-Gattung-Differenzbeziehung, *siehe* Art-Gattungsbeziehung
Art-Gattungsbeziehung, 12, 14–16, 33, 68, 78, 102, 107, 112, 148
Atom, 19, 83
Attribut (Logik), 75, 117
Attribut (Semantik), 105, 106, 112
Aussagenlogik, 38

Bedeutung, 5–8, 10, 11, 15, 36, 37, 42, 44, 49, 56, 69, 70, 89, 93–95, 97, 103, 110, 111, 118, 119, 124, 128–131, 133, 141, 143, 145–148, 154, 157, 158
Bedeutungsanalyse, 94, 110, 117, 145, 146, 150, 153, 156, 157
Bedeutungsdefinition, 7, 10, 13, 15, 27, 34–37, 40, 62, 64, 90, 94, 110, 111, 117, 118, 120, 124, 129, 133, 140, 144–147, 153–155
Bedeutungserklärung, 5–7, 37, 122, 141
Bedeutungswörterbuch, 5, 10, 12, 36, 37, 63, 93, 94, 111, 118
Begriff, 5–18, 20, 27, 31–36, 38–64, 67–72, 75–84, 88–90, 93, 102–106, 108–110, 117–122, 124, 126, 127, 129–131, 133, 134, 136, 138–158
  Allgemein-, 8, 11, 56
  Art-, 12, 17, 41, 82, 102, 125
  Ausgangs-, 110
  Basis-, 108–110
  Brücken-, 129
  Brot-, 68, 144
  Differenz-, 10–14, 17, 38, 44, 79, 119, 134, 151, 155
  doppelt negierter -, 47
  Eigenschafts-, 11, 118
  Faser-, 125
  Formaler -, 68, 88, 117, 149
  genereller -, 49–51
  Halb-, 72, 149
  Herstellen-, 130, 131, 134, 136,

138
Individual-, 8, 11, 51, 61, 75, 79, 83, 84, 88, 89
individueller -, 51, 89
Inhalts-, 42
Karosserie-, 127
leerer -, 9, 31–33, 50, 54, 55, 79, 81
mehrstelliger -, 20, 57, 62, 118, 129, 155
Negation, 26, 39, 44–49, 51, 52, 55, 56, 61, 71–73, 79, 88, 89, 143, 144, 149
atomare -, 85
schwache -, 72
negierter -, 47, 72, 80
negierter Individual-, 83
nicht-lexikalisierter -, 7, 111, 122, 130, 145, 146, 153, 158
Ober-, 5, 6, 10–17, 33, 35, 53, 69, 78, 82, 95, 96, 102, 104, 110, 118, 119, 124–126, 129, 138, 145, 155
Prim-, 104
Primär-, *siehe* Prim-
Produkt, 35, 41–43, 45, 47, 49, 52, 54, 61, 62, 77, 120, 125–127, 130, 145, 146, 149
Prototyp-, 72
Relations-, 9, 58
spezieller -, 51, 52, 54–56, 89
Sprach-, 154
Summe, 35, 42, 43, 47–49, 52, 54, 59, 61, 89, 120, 122, 125, 126, 145, 146, 149
uneigentlicher -, 9
unnegierter -, 46, 47
Unter-, 10, 11, 16, 33, 37, 69, 78, 82, 95–97, 105, 109, 118, 124, 125, 145, 155
widersprüchlicher -, 35, 81
widerspruchsvoller -, 44
Zustands-, 133
Begriffsanalyse, 7, 124, 140, 141, 144, 146, 154
Formale -, 7, 36, 64, 65, 68, 70, 71, 88, 89, 117, 133, 144, 149
Begriffshierarchie, 5–7
Begriffsinhalt, *siehe* Intension
Begriffsrelation, 155
Begriffssystem, 7, 8, 15, 17, 34, 36, 38, 40, 49–51, 53, 55–57, 59, 61, 84, 88, 89, 117, 148, 149, 151–157
Begriff-, 155
formales -, 68
höherstelliges -, 57
n-stelliges -, 151
Sprach-, 155
Begriffsumfang, *siehe* Extension
Beschreibungslogik, 84–88, 111

Definiendum, 10, 13, 62, 65, 75, 86, 97, 119, 122, 125, 126, 146, 158
Definiens, 146, 158
Definition, 7, 8, 10–16, 27, 35–38, 40, 42, 57, 59, 62–64, 79, 84–86, 88–90, 93–95, 98, 102, 103, 105, 106, 111, 117–122, 124–127, 129–131, 133, 134, 136, 138, 140, 141, 143–147, 154, 157, 158
Brot-, 75, 144
Duden-, 12
Papier-, 123, 130, 131
Definitionsfolge, *siehe* Definitionskette

Definitionshierarchie, 140
Definitionskette, 5, 6, 35, 100, 104, 109, 136, 137, 141, 145, 149
Definitionslehre, 147
Definitionsschema, 37, 145, 147
Definitionsstruktur, 105
Definitionstheorie, 7, 12, 118, 144
Definitionsverfahren, 146
Definitionsweise, 79
Dependenzgruppen, 101
Dependenzgruppenkapazität, 98
Disparität, 79, 80
  totale -, 79
Diversität, 77–81
Down-Set, 31

Eigenname, 8, 16
Einbettung, 27–33
Entailment, *siehe* lexikalische Schlussfolgerung
Enthält-Relation, 12, 13, 15, 38, 39, 41, 42, 46, 49, 53, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 119, 124, 126, 136, 146–148, 158
  echte -, 18
Enthalten-Relation, 13, 33, 39, 40, 62, 124, 155, 158
  echte -, 18, 40, 121
Ersetzbarkeit, 37
Existenzbedingung, 38, 41, 42, 45, 48–51
Extension, 7, 10, 11, 48, 52–56, 62, 64, 68, 70, 72, 78, 80, 81, 84, 89, 90, 124, 154–157

Filter, 31, 71
Formaler Kontext, 68–70

Gattung, *siehe* Begriff, Ober-
Gegensatz, 40, 41, 57, 126
Gegenstand, 9, 10, 12, 50, 52–56, 61, 64, 65, 67–73, 75, 77, 88, 94, 95, 111, 117, 118, 120, 133, 144
Gegenstandsbereich, 5
Gegenstandsmenge, 64, 65, 67, 69–73
Gegenstandsrelation, 111
Generalisat, 79, 81–84
Genus Proximum, *siehe* Begriff, Ober-
Gesetz
  semantisches -, 5

Halbordnung, 17, 18, 25, 34, 71, 151
Hasse-Diagramm, 18–21, 34, 65–68, 147
Hauptabschnitt, 29–31
heterogen-vereinbar, 39, 40
Hierarchie, 5, 104, 109
homogen-vereinbar, 39, 40
Homomorphismus, 27
Homonym, 128, 157
Hyperonym, 5, 102, 104, 107, 109, 111, 154
Hyponym, 104, 107, 109, 111, 154

Ideal, 31
Identität, 133
  totale -, 78
Individualbegriff, 16
Individuenvariable, 15, 38
Individuum, 8–10, 39, 51, 56, 57, 61, 62, 78, 79, 84, 87, 120, 153
Infimum, 22–26, 34, 41, 70, 117
infimum-dicht, 25
Inhalt, *siehe* Intension
Inhaltsfremdheit, *siehe* Disparität

Intension, 6–8, 10, 35, 36, 39, 49, 52, 53, 55, 56, 63, 64, 68, 80–82, 89, 102, 117, 129, 155, 156
Inzidenzrelation, 67, 68, 89
Irreduzibel, 25, 150
Isoliertheit, 40, 41, 57, 151, 153

Klasse, 5, 35, 51, 53, 54, 57, 84–87, 105
  atomar -, 85, 86
  atomare -, 84
  komplexe -, 85
  leere -, 55
Klasse (Software), 157, 158
Klassennegator, 88
Klassenzugehörigkeit, 84, 87
Ko-Atom, 19, 83
Konzept, 85
  atomares -, 85, 86
Konzeptklasse, 88

Lexem, 5, 6, 90, 93, 117, 121, 131, 134, 136, 138, 140, 145–148, 150, 155, 157
Lexemdefinition, 136
Lexeminventar, 153
Lexik, 7, 93–95, 97–99, 101, 117, 124, 150, 153, 155
lexikalische Schlussfolgerung, 107
Lexikographie, 144
Lexikon, 5–8, 36, 37, 89, 90, 93, 95, 97, 99, 101–104, 108, 117, 118, 120, 124, 127, 129, 136, 146–148, 150, 153, 154, 157, 158
Lexikoneintrag, 95, 157
Logik, 8, 36, 38, 75, 78, 88, 89, 155
  begriffliche -, 129
  intensionale -, 38
  mathematische -, 8, 36, 88
  Neue -, 7, 36, 77, 80, 83, 88
  syllogistische -, 7

maximale Stellenzahl, 153
maximales Element, 19, 51, 126
Meinbare, 79, 81, 83
Merkmal
  logisches -, 10, 18, 40, 41, 43, 48, 49, 56, 64, 65, 67–74, 76, 88, 119
  semantisches -, 95
Merkmalsausprägung, 73
Merkmalsmenge, 64, 69, 70, 73
Merkmalswert, 75
minimales Element, 19, 50
Modalität, 155
Morphem, 42, 147
Morphologie, 155

Nachbar
  oberer -, 19, 83
  unterer -, 19, 25, 83
Nachbarrelation, 19, 20
Negat, 45, 46, 51, 56, 79–81, 83, 89, 144
Negation, 17, 26, 149
Nomen, 5, 6, 102–106, 118, 129, 145, 147, 154, 155
Nominaldefinition, 36, 37

Ober-Unterbegriffsbeziehung, *siehe* Art-Gattungsbeziehung
Oberrelation, 124
Objekt, 57
Ontologe, 127
Ontologie, 8, 15, 94, 110
  Domain-, 108
  Top-, 108, 110, 115, 156
  Top-Level -, 114

Operator, 17, 23, 25, 30, 31, 33, 34, 38, 43, 44, 48, 49, 58, 60, 63, 64, 69, 149
Begriffs-, 38, 89, 149
Beziehungs-, 17
einstelliger -, 44
Hilfs-, 63
logischer -, 24
Schnitt-, 69
Strich-, 64, 69, 72, 73
Verbands-, 25
Opposition (Logik), 72, 73, 149
Opposition (Semantik), 107
Ordnung, 7, 13, 17–19, 21–25, 27–34, 38, 65, 73, 75, 88, 105, 114, 117, 149, 151–153, 155
Ordnungsrelation, 31, 62–65, 72, 134
Ordnungsstruktur, 13, 14, 16, 25, 29, 38, 118, 119, 122, 124, 126, 129, 134, 137, 147, 148, 153, 154, 157, 158
Ordnungstheorie, 7, 16, 33, 35, 38, 39, 50, 51

Part-Meronym-Relation, *siehe* Teil-Ganzes-Relation
Partikel, 118, 143, 145
Phonetik, 155
Phonologie, 155
Polysem, 131, 132, 134, 135, 154, 157
Potenzmenge, 24, 29–31, 65, 72
Potenzmengenverband, 29
Prädikat, 57, 154
Prädikat (Logik), 8–11, 16, 17, 84
Prädikatenlogik, 9, 11, 15–17, 38
Produkt, *siehe* Begriff, Produkt

Quotient, 49, 144

R-Logik, 15
R-logisch, 57–59, 63, 126, 129, 136, 137, 143
Rang(ordnung), 75, 97, 98, 109
Realdefinition, 37
Relation, 6, 9–20, 23, 28, 38–40, 53, 57–59, 61–65, 68, 71, 73, 75–78, 85, 86, 94–97, 102–108, 111, 118–122, 124–127, 129, 131, 133, 136, 137, 141, 143–145, 147, 154
begriffliche -, 88, 93, 124
beschränkte -, 63
elliptische -, 102
inverse -, 65, 97
lexikalische -, 105, 110, 122
ontologische -, 15, 121, 127
R-logische -, 15, 126
semantische -, 94, 95, 98, 103, 104, 109, 111
Super-, 154
Relationenkalkül, 60
Relationslogik, 15
Rolle, 84, 86, 87
atomare -, 84, 85
Rollenkonstruktor, 88
Rollenverkettung, 91
Rollenwertrelation, 91
Rollenzugehörigkeit, 87

Schnitt, 17, 24, 26, 32, 33, 54, 65, 67
Schnittvervollständigung, 71
Schranke, 21, 22
obere -, 21–23, 33
untere -, 21–23, 30
Semantic Web, 8, 57, 84, 93, 156

Semantik, 84, 85, 91
semantische Deriviertheit, 98, 101
semantische Kohärenz, 98, 99, 101
gewichtete -, 99, 100
schwache -, 99
starke -, 99, 100
semantische Kompaktheit, 98, 100, 101
semantisches Gesetz, *siehe* Gesetz, semantisches -
semantisches Netz, 8, 84, 93, 96, 105, 110, 111, 117
Semem, 93–101, 103, 104
Semiconcept, *siehe* Begriff, Halb-
Spezifikat, 79, 81–83
Sprachsystem, 7, 150
Subjekt, 11, 57, 112, 129, 154
Subjekt (Logik), 9
Subsumption, 86
Summe, *siehe* Begriff, Summe
Supremum, 21–26, 28, 34, 42, 70
supremum-dicht, 25
Synonym, 37, 103
Synonymie-Relation, 103, 108
Syntax, 147, 155

TBox, 86
Teil-Ganzes-Relation, 12, 15, 16, 58, 105, 108, 112, 127
Teiler-von-Relation, 24
Teilidentität, 78
echte -, 78
Terminologie, 12, 84, 86, 87
Troponymie-Relation, 107

Umfang, *siehe* Extension
Umfangsfremdheit, *siehe* Diversität
Umkehrrelation, *siehe* Relation, inverse -
Universalkonzept, 85
Universum, 54, 84
Unterrelation, 20, 58–60, 63, 121, 124, 130, 131, 133, 134, 136, 138, 141, 145, 147, 154
Unvereinbarkeit, 39, 40, 45, 46, 49, 51, 55, 62, 89, 90, 120, 126, 144
Unvergleichbarkeit, 39, 40
Ursachen-Relation, 107
Urteil
synthetisches -, 89

Verb, 103, 106, 107, 118, 129–132, 136–138, 145, 147, 154
Verband, 21, 24–33, 41, 42, 67, 72, 88
boolescher -, 36, 83, 86, 89, 149
endlicher -, 24, 25, 70
vollständiger -, 29, 65, 70
Verbandstheorie, 7, 24, 35, 36, 64, 88
Verbdefinition, 130
Verbindung, *siehe* Vereinigung
Vereinbarkeit, 39, 40, 46, 51, 52, 129
Vereinigung, 17, 24, 31, 54, 162
Vergleichbarkeit, 39, 40, 49
Vervollständigung, 27–34, 117
Vokabel, 6, 7, 156
Vokabelumfang, 147

Wörterbuch, 37, 94, 95, 99, 111
Widerspruch, 9, 39, 44, 50, 51, 54–57, 79, 81, 83, 89, 90
Widerspruchsfreiheit, 84, 87
Wissensrepräsentation, 8, 84, 93
WordNet, 8, 37, 102–106, 108, 110, 111, 154, 156

Zeichen
sprachliches -, 150
Zirkeldefinition, 129
Zukommen-Relation, 53, 54, 57, 90

Personenregister

Alonge, Antonietta, 108
Altmann, Gabriel, 5, 6
Aristoteles, 11, 36

Baader, Franz, 84, 88
Bagheri, Dariusch, 6, 20

Davey, Brian A., 7, 17
Dedekind, Richard, 33

Erne, Marcel, 17, 23, 27, 32, 67
Essler, Wilhelm K., 37

Fellbaum, Christiane, 102, 103, 106, 107, 136
Fitschen, Jost, 12, 38
Freytag-Löringhoff, Bruno Baron von, 7, 36, 78, 80, 83, 84, 88

Ganter, Bernhard, 70, 71, 75

Hammerl, Rolf, 6
Hasse, Helmut, 18
Helbig, Hermann, 93, 110
Hermes, Hans, 17, 26
Hitzler, Pascal, 86

Kauppi, Railli, 7, 9, 15, 36, 38, 40, 52, 55, 59, 62, 79, 88, 89, 125, 143, 144, 147, 149, 153
Kind, B., 5
Krötzsch, Markus, 86
Kuznetsov, Sergei O., 71

Leibniz, Gottfried Wilhelm, 7, 36, 38, 44, 89, 125
Li, SuJian, 117

MacNeille, H. M., 33
Martin, Robert, 5
Miller, George A., 102, 104, 105

Nutt, Werner, 84

Petzinger, Johann-Michael von, 36, 83, 84
Platon, 144
Prediger, Susanne, 77
Priestley, Hilary A., 7, 17
Priss, Uta, 70, 117

Rodriguez, Horacio, 109
Rosch, Eleanor, 108
Rudolph, Sebastian, 86
Russel, Bertrand, 89

Sambor, Jadwiga, 6
Schmeil, Otto, 12, 38
Schusky, Ernest Lester, 156
Skorochod'ko, Eduard F., 94–99, 101, 110, 111, 122
Sowa, John F., 93

Vossen, Piek, 108

Wessel, Horst, 9
Wille, Rudolf, 36, 70–72, 75, 77