# Universelle Matrix-Überkonvergenz

Rebecca Reis

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

im Fachbereich IV der Universität Trier

**Termin der mündlichen Prüfung:** 2. November 2005

**Berichterstatter:** Herr Professor Dr. Wolfgang Luh

Frau Professor Dr. Susanne Dierolf

Für Lorenz

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung und Übersicht über die Hauptergebnisse der Arbeit ..... 1**

1.1 Überkonvergenz von Potenzreihen ..... 1

1.2 Überkonvergenz von Matrix-Transformierten ..... 4

1.3 Übersicht über die Hauptergebnisse der Arbeit ..... 7

**2 Das Wachstum der Teilsummen von Potenzreihen, die Approximationssätze von Runge und Mergelyan ..... 12**

**3 Ergebnisse aus der Ostrowskischen Theorie der Überkonvergenz ..... 16**

**4 Unendliche Matrizen und Matrix-Transformierte von Potenzreihen ..... 19**

**5 Überkonvergenz bei Matrix-Transformierten von Potenzreihen ..... 25**

5.1 Überkonvergenz in vorgegebenen kompakten Mengen ..... 25

5.2 Matrix-Transformierte von Potenzreihen als Universalfunktionen zur Approximation auf kompakten Mengen ..... 33

5.2.1 Ausschöpfungen durch kompakte Mengen ..... 33

5.2.2 Universelle Approximation auf kompakten Mengen ..... 34

**6 Universalapproximation auf allgemeineren Mengen ..... 42**

**7 Universalität und Summierbarkeit von trigonometrischen Reihen ..... 48**

**Literaturverzeichnis ..... 50**

# 1 Einleitung und Übersicht über die Hauptergebnisse der Arbeit

## 1.1 Überkonvergenz von Potenzreihen

Wir betrachten eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad , \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1 \tag{1.1}$$

und bezeichnen mit $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ihre n-te Teilsumme.

Die Folge dieser Teilsummen konvergiert bekanntlich kompakt im Einheitskreis $ID := \{z : |z| < 1\}$ gegen $f(z)$ und divergiert in jedem Punkt $z \notin \overline{ID}$ mit großer Geschwindigkeit. Die Menge $\Psi(f)$ der Konvergenzpunkte von $\{s_n(z)\}$ enthält also $ID$ und höchstens noch Teilmengen von $\partial ID$. Dies schließt jedoch nicht aus, dass eine Teilfolge der Teilsummen auch noch außerhalb von $\Psi(f)$ konvergieren und sogar kompakt konvergieren kann.

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 heißt überkonvergent im Punkt $z_0 \notin \Psi(f)$, wenn es eine an $z_0$ konvergente Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ gibt, und sie heißt kompakt überkonvergent in einem Gebiet $G \not\subset ID$, wenn eine Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ in $G$ kompakt konvergiert. Gilt hierbei $G \cap \partial ID \neq \emptyset$, so wird die Funktion $f(z)$ vermöge $\{s_{n_k}(z)\}$ aus $ID$ heraus in das Gebiet $G$ analytisch fortgesetzt.

Wir können der Überkonvergenz auch die folgende Bedeutung geben: Das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe wird dadurch vergrößert, dass ihre Glieder in geeigneter Weise ohne Änderung der Reihenfolge (also durch Klammersetzung) zusammengefasst werden.

Die ersten Beispiele überkonvergenter Potenzreihen werden von Porter [25] und Jentzsch [4] angegeben. Von Ostrowski [21] stammt die folgende einfache Konstruktion.

Die Funktion $f$ werde definiert durch die Polynomreihe

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{z \cdot (1-z)}{2} \right\}^{4^\nu} \quad ,$$

sie ist holomorph im Innengebiet $G$ der Lemniskate $|z\cdot(z-1)|=2$ und kann nach dem Hadamardschen Lückensatz über $G$ hinaus nicht analytisch fortgesetzt werden. Da $G$ den Einheitskreis $ID$ enthält und $z=-1\in\partial ID$ ein singulärer Punkt von $f$ ist, hat die Potenzreihe

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

den Konvergenzradius 1, und man bestätigt leicht, dass

$$s_{2\cdot 4^k}(z)=\sum_{\nu=0}^{2\cdot 4^k}a_\nu z^\nu=\sum_{\nu=0}^{k}\left\{\frac{z\cdot(z-1)}{2}\right\}^{4^\nu}$$

gilt, und diese Teilsummenfolge somit in $G$ kompakt konvergiert. Da $G$ den Einheitskreis echt enthält, ist die konstruierte Potenzreihe in $G$ überkonvergent.

Die Idee zur Konstruktion überkonvergenter Potenzreihen mittels geeigneter Polynomreihen benutzen wir zum Beweis des folgenden Ergebnisses.

**Satz 1.1:** Es sei $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine vorgeschriebene Folge natürlicher Zahlen, die $\frac{n_{k+1}}{n_k}>1+\lambda>1$ für alle $k\in IN$ erfüllen.

Dann gibt es eine Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 und ein Gebiet $G\supset ID$ mit $G\neq ID$, so dass die Folge der Teilsummen $s_{n_k}(z)=\sum_{\nu=0}^{n_k}a_\nu z^\nu$ in $G$ kompakt konvergiert. Die Funktion $f$ ist über $G$ hinaus nicht analytisch fortsetzbar.

**Beweis:** Wir wählen eine natürliche Zahl $p>\frac{2}{\lambda}$ und betrachten die Polynomreihe

$$f(z):=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z)\qquad\text{mit}\qquad P_k(z):=\left\{\frac{z^p(1+z)}{2}\right\}^{\left[\frac{n_k}{p+1}\right]}.$$

Diese konvergiert kompakt im Innengebiet $G$ der Lemniskate $L=\{z:|z^p(1+z)|=2\}$. Die Funktion $f$ ist daher in $G$ holomorph und hat nach dem Hadamardschen Lückensatz $L=\partial G$ zur natürlichen Grenze. Es gilt $\overline{ID}\setminus\{1\}\subset G$ und $1\in\partial G$. Wir betrachten die Potenzreihe von $f$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad ,$$

die offensichtlich den Konvergenzradius 1 hat.

Es gilt

$$(p+1)\cdot\left[\frac{n_k}{p+1}\right] \le n_k \tag{1.2}$$

und für alle genügend großen $k$ ist

$$n_k < \frac{1+\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}}\cdot n_k - p < \frac{p}{p+1}\cdot n_{k+1} - p < p\cdot\left[\frac{n_{k+1}}{p+1}\right] . \tag{1.3}$$

Der höchste Exponent von $z$ im Polynom $P_k(z)$ ist $(p+1)\cdot\left[\frac{n_k}{p+1}\right]$, der niedrigste in $P_{k+1}(z)$ ist $p\cdot\left[\frac{n_{k+1}}{p+1}\right]$.

Wegen der Ungleichungen (1.2) und (1.3) gibt es nur endlich viele $P_k(z)$, die Terme mit gleichen Exponenten von $z$ enthalten. Die Potenzreihe von $f$ entsteht daher aus der Polynomreihe durch Auflösen der (unendlich vielen) Klammern und endlich vielen Umordnungen sowie Klammersetzungen. Für alle genügend großen $k$ gilt daher

$$s_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu(z) \ ,$$

und die Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ konvergiert folglich kompakt in $G$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir bemerken noch, dass die soeben konstruierte Potenzreihe Lücken besitzt, es gilt nämlich

$$a_\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad p_k < \nu < q_k$$

mit

$$p_k := (p+1)\cdot\left[\frac{n_k}{p+1}\right] \quad , \quad q_k = p\cdot\left[\frac{n_{k+1}}{p+1}\right] \ .$$

Dabei erhalten wir

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{q_k}{p_k}\geq\frac{1+\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}}>1 \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen Überkonvergenz und dem Auftreten gewisser Lücken in der Koeffizientenfolge der betreffenden Potenzreihe wurde von Ostrowski detailliert untersucht; im Kapitel 3 geben wir einen Überblick über die wichtigsten und für unsere Arbeit relevanten Resultate dieser Theorie. Die dortigen Ergebnisse werden unter anderem zeigen, dass die „Dichtebedingung“ $\frac{n_{k+1}}{n_k}>1+\lambda>1$ für eine überkonvergente Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ in gewisser Hinsicht bestmöglich ist.

## 1.2 Überkonvergenz von Matrix-Transformierten

Es sei $A=[\alpha_{n\nu}]$ eine zweifach unendliche Matrix mit komplexen Einträgen $\alpha_{n\nu}$ $(n,\nu=0,1,...)$. Für Potenzreihen $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 bilden wir die $A-$Transformierten

$$\sigma_n^{A,f}(z):=\sigma_n(z):=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n\nu}s_\nu(z) \quad , \quad s_\nu(z)=\sum_{\mu=0}^{\nu}a_\mu z^\mu \quad . \tag{1.4}$$

Die betrachtete Potenzreihe heißt an der Stelle $z\in\mathbb{C}$ $A-$summierbar zum Wert $\sigma(z)$, wenn die Reihen (1.4) für dieses $z$ konvergieren und

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(z)=\sigma(z)$$

gilt. Die Menge aller Punkte, in denen $A-$Summierbarkeit vorliegt, bezeichnen wir mit $\Psi_A(f)$.

Es stellt sich die Frage, ob auch die $A-$ Transformierten Überkonvergenz-Phänomene aufweisen können. In Analogie zur Situation bei Potenzreihen können wir folgendes definieren.

Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 heißt $A$-überkonvergent im Punkt $z_0\notin\Psi_A(f)$, wenn es eine konvergente Teilsummenfolge $\{\sigma_{n_k}(z_0)\}$ gibt, und sie heißt kompakt $A$-überkonvergent in einem Gebiet $G\not\subset ID$, in welchem $\{\sigma_n(z)\}$ nicht

kompakt konvergiert, wenn es eine in $G$ kompakt konvergente Teilsummenfolge $\{\sigma_{n_k}(z)\}$ gibt.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass Überkonvergenz-Phänomene auch bei Matrix-Transformierten von Potenzreihen auftreten.

**<u>Beispiel 1.1</u>**: Wir betrachten die $C_1$-Mittel (arithmetische Mittel) einer Potenzreihe

$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1. Hier gilt

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(z) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(n+1-\nu)\cdot a_\nu z^\nu =$$

$$= s_n(z) - \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu\cdot a_\nu z^\nu = s_n(z) - \frac{z}{n+1}s_n'(z) \quad . \tag{1.5}$$

Ist nun die betrachtete Potenzreihe überkonvergent und konvergiert $\{s_{n_k}(z)\}$ kompakt im Gebiet $G$ gegen $f(z)$, so konvergiert $\{s_{n_k}'(z)\}$ in $G$ kompakt gegen $f'(z)$, und aus der Darstellung (1.5) folgt, dass $\{\sigma_{n_k}(z)\}$ in $G$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert. □

Ziel dieser Arbeit ist eine systematische Untersuchung des Verhaltens der Teilfolgen von Matrix-Transformierten von Potenzreihen, ihren Konvergenz- und Approximations-eigenschaften, sowie der Struktur der zu erhaltenen Grenzfunktionen. Wir knüpfen dabei an die Untersuchungen von Luh [5] und Otzen [22] an.

Luh [5] betrachtet in seiner Arbeit von 1970 Dreiecksmatrizen $A = (\alpha_{n\nu})$ (hier gilt also $\alpha_{n\nu} = 0$ für alle $\nu > n$), die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{n\nu} = 1 \qquad \text{(Zeilensummenbedingung)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n\nu} = 0 \qquad (\nu \in IN_0) \qquad \text{(Spaltenbedingung)}.$$

Er studiert Überkonvergenz-Phänomene und universelle Approximationseigenschaften solcher $A$-Transformierten $\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot s_\nu(z)$ von Potenzreihen.

In der Arbeit von Otzen [22] werden Matrizen $A=(\alpha_{n\nu})$ untersucht, die zeileninfinit sein können und die mit einer Teilfolge $\{\mu_k\}_k$ der natürlichen Zahlen und $M:=\{\mu_0,\mu_1,...\}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(M1) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in M}} \alpha_{n\nu}=0 \qquad (\nu\in IN_0)$ (Schwache Spaltenbedingung),

(M2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\alpha_{n\nu}|^{\frac{1}{\nu}}=0$ für alle $n\in M$,

(M3) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in M}} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu}=1$ (Schwache Zeilensummenbedingung).

Die Größenordnungsbeziehung (M2) der Matrixelemente, die an die Stelle der bei Luh geforderten Zeilenfinitheit von $A$ tritt (und für solche Matrizen trivialerweise erfüllt ist), sorgt dafür, dass die gemäß (1.4) gebildeten Transformierten für alle $n\in M$ in $\mathbb{C}$ kompakt konvergieren und die betreffenden $\sigma_n(z)$ ganze Funktionen sind.

Otzen beweist die Ergebnisse von Luh für diese größere Klasse von Matrizen. Bei beiden Autoren brauchen die zugrunde liegenden Matrizen übrigens weder permanent noch PR-permanent zu sein (siehe hierzu Kapitel 4).

Ein entscheidender Nachteil der Untersuchungen von Luh und Otzen besteht darin, dass die Überkonvergenzeigenschaften (insbesondere bei den Ergebnissen über universelle Approximation) auf Mengen in $\overline{ID}^c$ studiert werden. Wir lassen in dieser Arbeit aber auch Mengen zu, die den Rand $\partial ID$ des Einheitskreises treffen dürfen. Diese, auf den ersten Blick nur geringfügige Verallgemeinerung hat aber einen ganz entscheidenden Vorteil:

Eine Potenzreihe $f(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\cdot z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 erzeugt für $z=e^{i\varphi}\in\partial ID$ eine (formale) trigonometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu\varphi}=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\cos\nu\varphi+i\sin\nu\varphi) \quad ,$$

und die $A$- Transformierten einer solchen Potenzreihe

$$\sigma_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu(\cos\mu\varphi+i\sin\mu\varphi)$$

stellen eine Folge trigonometrischer Reihen dar, für die Überkonvergenz- und universelle Approximationseigenschaften diskutiert werden können. Diese modifizierte Betrachtungsweise wird es uns unter anderem ermöglichen, universelle trigonometrische Reihen zu konstruieren, die die fast-überall-Approximation aller messbaren Funktionen zulassen.

## 1.3 Übersicht über die Hauptergebnisse der Arbeit

**Kapitel 2** dieser Arbeit stellt drei Ergebnisse bereit, die als Hilfsmittel für die Beweise der zentralen Sätze benötigt werden: eine Aussage über das Wachstum der Teilsummen von Potenzreihen, welche uns für den Beweis der Approximationseigenschaft der Matrix-Transformierten eine notwendige Abschätzung liefert, und die beiden bedeutenden Approximationssätze von Runge und Mergelyan.

In **Kapitel 3** wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse aus der Überkonvergenz-Theorie von Ostrowski gegeben. Ostrowski kommt zu dem Ergebnis, dass ein Zusammenhang zwischen dem Auftreten von Überkonvergenz und dem Vorhandensein von Lücken in der Koeffizientenfolge der Potenzreihe besteht.

Unendliche Matrizen und die durch sie gebildeten Transformierten von Potenzreihen sind Gegenstand des **Kapitels 4**. Es werden die für unsere Arbeit notwendigen Definitionen gegeben. Außerdem stellt dieses Kapitel die Ergebnisse von Luh (Satz 4.2) und Otzen (Satz 4.3) bereit, die den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen darstellen. Wir werden analoge Aussagen mit modifizierten Voraussetzungen beweisen.

Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ sei $A(K)$ die Familie aller Funktionen $f$, die stetig auf $K$ und holomorph auf dem Inneren $\overset{o}{K}$ von $K$ sind, und für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ sei $M(G)$ die Familie aller kompakten Mengen $K \subset G^c$, deren Komplement $K^c$ zusammenhängend ist.

**Kapitel 5** beinhaltet zwei der Hauptergebnisse dieser Arbeit. Eines dieser Ergebnisse ist:

**<u>Satz 5.1:</u>** Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $ID \subset G$ und $\overline{ID} \not\subset G$. Ferner seien endlich oder abzählbar viele paarweise disjunkte kompakte Mengen $K_1, K_2, \ldots$ aus $M(G)$ und $f_m \in A(K_m)$ gegeben. Die Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ erfülle die Matrixbedingungen (M1)–(M3). Dann gibt es eine genau in $G$ holomorphe Funktion $f_0$, deren Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ folgende Eigenschaft hat:

Es existiert eine Folge $\{n_k\}_k$, so dass $\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k \nu} s_\nu(z)$ in $G$ kompakt gegen

$f_0(z)$, und in jedem $K_m$ gleichmäßig gegen $f_m$ konvergiert. Überdies divergiert $\{\sigma_{n_k}(z)\}$ in allen Punkten einer dichten Teilmenge von $\left[G \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right]^c$.

Zudem wird mit Satz 5.3 eine Aussage über die universelle Approximation von Funktionen auf kompakten Mengen bewiesen. Für den Beweis dieses Satzes ist eine Aussage (Satz 5.2) über die Ausschöpfung des Komplementes eines Gebietes durch spezielle kompakte Mengen notwendig, die schon bei Melas und Nestoridis [14] für gewisse offene Mengen zu finden ist, die aber hier mit einer viel einfacheren Methode bewiesen wird.

In **Kapitel 6** beschäftigen wir uns mit der Theorie der universellen Approximation. Im Bereich der reellen Zahlen hat sich Fekete [23] 1915 mit der Frage nach der Existenz einer universellen Potenzreihe, deren Teilsummen für die Approximation stetiger Funktionen verwendet werden können, beschäftigt. Er bewies die Existenz einer universellen Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cdot x^\nu$, so dass zu jeder auf dem Intervall $[-1,1]$ stetigen Funktion $f$ mit $f(0)=0$ eine von $f$ abhängige Folge $\{n_k\}$ existiert, für welche die Folge der Teilsummen $\sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu \cdot x^\nu$ in $[-1,1]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Die universelle Approximation im Komplexen ist zuerst im Zusammenhang mit dem Verhalten ganzer Funktionen in der Umgebung von $\infty$ von Birkhoff [1] und Seidel und Walsh [28] untersucht worden. Chui und Parnes [2] sowie Luh ([5], [10]) untersuchten die universelle Approximation bei Überkonvergenzproblemen. Letzterer hat bewiesen, dass auch die Teilfolgen von Matrix-Transformierten von Potenzreihen zur universellen Approximation verwendet werden können. Von Luh [8] stammt folgendes Ergebnis:

Für eine untere Dreiecksmatrix $A$, die die Zeilensummen- und Spaltenbedingung erfüllt, existiert eine „universelle“ Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1, so dass für jedes in $|z|>1$ gelegenes Kompaktum $K$, dessen Komplement zusammenhängend ist, und jede Funktion $f \in A(K)$ gilt:

Es gibt eine Folge $\{n_k\}_k$, so dass $\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{n_k} \alpha_{n_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

Otzen [22] lieferte eine modifizierte, zu Luh analoge Aussage über die Eignung von Matrix-Transformierten von Potenzreihen zur universellen Approximation, indem er allgemeine, unendliche Matrizen betrachtete, welche die Matrix-Bedingungen $(\mathrm{M1})-(\mathrm{M3})$ erfüllen müssen.

Wir beweisen die Existenz einer universellen Potenzreihe, die sich zur Approximation holomorpher und messbarer Funktionen außerhalb eines vorgegebenen, einfach zusammenhängenden Gebietes $G$ eignet, wobei $ID \subset G$, $\overline{ID} \not\subset G$ gilt. Wir schließen die Randpunkte von $G$ nicht aus unseren Betrachtungen aus.

Folgendes Ergebnis wird bewiesen:

**<u>Satz 6.2:</u>** Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $ID \subset G$, $\overline{ID} \not\subset G$ und $A = (\alpha_{n\nu})$ eine Matrix, die die Bedingungen $(\mathrm{M1})-(\mathrm{M3})$ erfüllt. Dann existiert eine genau in $G$ holomorphe Funktion $f_0$ mit $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$, für deren Teilsummen $s_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \cdot z^\mu$ Folgendes gilt:

a) Es gibt eine Folge $\{m_k\}_k$, so dass

$$\sigma_{m_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{m_k\nu} \cdot s_\nu(z) \text{ in } G \text{ kompakt gegen } f_0(z) \text{ konvergiert.}$$

b) Zu jedem Kompaktum $K \in M(G)$ und zu jeder Funktion $g \in A(K)$ gibt es eine Teilfolge $\{p_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$$\sigma_{p_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{p_k\nu} \cdot s_\nu(z) \text{ auf } K \text{ gleichmäßig gegen } g(z) \text{ konvergiert.}$$

c) Zu jeder offenen Menge $O \subset G^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und jeder auf $O$ holomorphen Funktion $h$ gibt es eine Teilfolge $\{q_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$$\sigma_{q_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{q_k\nu} \cdot s_\nu(z) \text{ in } O \text{ kompakt gegen } h(z) \text{ konvergiert.}$$

d) Zu jeder messbaren Menge $S \subset G^c$ und jeder auf $S$ messbaren Funktion $w$ gibt es eine Teilfolge $\{t_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$$\sigma_{t_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{t_k \nu} \cdot s_\nu(z) \quad \text{auf } S \text{ fast überall gegen } w(z) \text{ konvergiert.}$$

Im Jahr 1945 bewies Menšov [15] die Existenz einer universellen trigonometrischen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t\}$ mit der Eigenschaft, dass zu jeder auf $[0,2\pi]$ messbaren Funktion $\varphi$ eine Folge $\{n_k\}$ existiert, so dass die Folge der Teilsummen $s_{n_k}(t) = \sum_{\nu=0}^{n_k} \{a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t\}$ fast überall auf $[0,2\pi]$ gegen $\varphi(t)$ konvergiert. Bernal-González, Calderón-Moreno und Luh [11] bewiesen im Jahr 2003, dass auch Matrix-Transformierte von trigonometrischen Reihen universelle Approximationseigenschaften aufweisen.

Es sei $A = (\alpha_{n\nu})$ eine Dreiecksmatrix, welche die zwei Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0 \quad \text{für alle } \nu \in IN_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

erfüllt. Dann gibt es eine trigonometrischen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \{\cos \nu t + i \cdot \sin \nu t\}$ mit

$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$, so dass für die Folge der $A$-Transformierten $\sigma_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(t)$ mit

$s_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \{\cos \nu t + i \cdot \sin \nu t\}$ gilt:

Es seien $\varphi$ und $\psi$ zwei reellwertige, auf $[0,2\pi]$ messbare Funktionen. Dann existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$, so dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sigma_{n_k}(t)\} &\to \varphi(t) \\ \operatorname{Im}\{\sigma_{n_k}(t)\} &\to \psi(t) \end{aligned} \quad \text{fast überall auf } [0,2\pi] \text{ gilt.}$$

Die Frage nach Universalität und Summierbarkeit von trigonometrischen Reihen wird in **Kapitel 7** untersucht und beantwortet. Wir betrachten aber im Unterschied zu voranstehendem Ergebnis eine allgemeinere Matrix, welche die modifizierten Matrix-bedingungen (M1)–(M3) erfüllt, und beweisen analog die Existenz einer trigonometrischen

Reihe, die sich zur Approximation stetiger und messbarer Funktionen auf dem Rand des Einheitskreises eignet.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Doktor Wolfgang Luh ganz herzlich danken, der mir die Möglichkeit zur Promotion neben meiner „normalen“ Arbeit gegeben hat.
Mein Dank gilt auch Frau Professor Doktor Susanne Dierolf für die Erstellung des Zweitgutachtens.

# 2 Das Wachstum der Teilsummen von Potenzreihen, die Approximationssätze von Runge und Mergelyan

Wir betrachten eine Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ mit Konvergenzradius 1 und den Teilsummen $s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot z^\nu$ $(n \in IN)$. Die Folge $\{s_n(z)\}$ der Teilsummen der Potenzreihe konvergiert im Einheitskreis $ID := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kompakt gegen $f(z)$ und divergiert in allen Punkten $z \in \overline{ID}^c$. Es stellt sich die Frage, wie „stark" $\{s_n(z)\}$ in $\overline{ID}^c$ divergiert.

Der folgende Satz trifft eine Aussage über das Wachstum der Teilsummen von Potenzreihen außerhalb ihres Konvergenzkreises. Dieses Ergebnis liefert uns für den Beweis der Approximationseigenschaft der Matrix-Transformierten in den Sätzen des fünften Kapitels eine notwenige Abschätzung.

**<u>Satz 2.1:</u>** Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ habe den Konvergenzradius 1. Dann gilt für die Teilsummen $s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot z^\nu$ und jedes $R \geq 1$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \max_{|z|\leq R} |s_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} = R .$$

**<u>Beweis:</u>** Es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat, gilt

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1 . \tag{2.1.1}$$

Es gibt also eine Konstante $M = M(\varepsilon)$, so dass für alle $\nu \in IN_0$ gilt

$$|a_\nu| \leq M \cdot (1+\varepsilon)^\nu .$$

1. Es sei ein $R \geq 1$ gegeben. Für die Teilsummen der Potenzreihe gilt Folgendes:

$$\max_{|z|\leq R} |s_n(z)| = \max_{|z|\leq R} \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot z^\nu \right| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \cdot R^\nu \leq$$

$$\leq M \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (1+\varepsilon)^{\nu} \cdot R^{\nu} \leq M \cdot (n+1) \cdot \left[(1+\varepsilon) \cdot R\right]^{n}.$$

Hieraus folgt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \max_{|z|\leq R} |s_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq (1+\varepsilon) \cdot R \quad .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \max_{|z|\leq R} |s_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq R$.

2. Nun nehmen wir an, für ein $R \geq 1$ würde $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \max_{|z|\leq R} |s_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} < R$ gelten.

   Es gibt dann ein $S \in (0, R)$ und ein $N \in IN$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

   $$\max_{|z|=R} |s_n(z)| \leq S^n .$$

   Wegen $a_n \cdot z^n = s_n(z) - s_{n-1}(z)$ folgt für alle $n > N$

   $$\left|a_n \cdot R^n\right| \leq \max_{|z|=R} |s_n(z)| + \max_{|z|=R} |s_{n-1}(z)| \leq S^n + S^{n-1} = S^n \cdot (1+\frac{1}{S}) .$$

   Wir erhalten die Abschätzung $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq (1+\frac{1}{S})^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{S}{R}$, und daher

   $$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{S}{R} < 1$$

   im Widerspruch zu (2.1.1). □

Für die Beweisführung der Hauptergebnisse im fünften Kapitel benötigen wir ferner eine Aussage über die Approximation holomorpher Funktionen durch Polynome. Die folgenden zwei Sätze spielen in der komplexen Approximationstheorie eine bedeutende Rolle.

**<u>Definition 2.1:</u>** Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ die Klasse aller kompakten Mengen $K \subset \mathbb{C}$, deren Komplement $K^c := \mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist.

**Satz 2.2 (Runge, [27]):** Es sei $K \in \mathcal{M}$, und die Funktion $f$ holomorph auf $K$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P$, für welches gilt:

$$\max_K |f(z) - P(z)| < \varepsilon .$$

Einen Beweis findet man z.B. bei Rudin ([26], S. 272).

Es stellt sich die Frage, ob die Voraussetzungen im Satz von Runge noch weiter abgeschwächt werden können. Der Satz von Mergelyan ist das bestmögliche Ergebnis:

**Satz 2.3 (Mergelyan, [16]):** Es sei $K \in \mathcal{M}$ und die Funktion $f$ stetig auf $K$ und holomorph im Inneren $\overset{o}{K}$ von $K$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P$, für das gilt:

$$\max_K |f(z) - P(z)| < \varepsilon \quad .$$

Einen Beweis findet man z.B. bei Rudin ([26], S. 390).

**Bemerkung 2.1:** Der Satz wird für jedes Kompaktum $K$ falsch, dessen Komplement $K^c$ nicht zusammenhängend ist. Denn in diesem Fall besitzt $K^c$ eine beschränkte Komponente $G_0$. Es sei nun $z_0 \in G_0$ und $m := \max_K |z - z_0|$. Die Funktion $f(z) := \dfrac{1}{z - z_0}$ ist holomorph auf $K$. Wir nehmen an, dass es ein Polynom $P$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\max_K |f(z) - P(z)| < \frac{1}{m} .$$

Wir erhalten dann die Abschätzung:

$$\max_K |1 - (z - z_0) \cdot P(z)| = \max_K \left| (z - z_0) \cdot \left( \frac{1}{z - z_0} - P(z) \right) \right| \leq$$

$$\leq \max_K |z - z_0| \cdot \max_K |f(z) - P(z)| < m \cdot \frac{1}{m} = 1 .$$

Da $\overline{G_0}$ kompakt ist, nimmt der Betrag des Polynoms $\tilde{P}(z) = 1 - (z - z_0) \cdot P(z)$ sein Maximum auf dem Rand von $G_0$ an, dabei gilt $\partial G_0 \subset K$. Nach dem

Maximumprinzip muss also für alle $z \in G_0$ gelten: $\left| 1-(z-z_0)\cdot P(z) \right| < 1$.

Das ergibt für $z = z_0$ einen Widerspruch. □

Diese Bemerkung beweist also, dass die Voraussetzung des zusammenhängenden Komplementes $K^c$ des Kompaktums $K$ der beiden voranstehenden Sätze nicht abgeschwächt werden kann.

**<u>Bemerkung 2.2:</u>** Wenn die Funktion $f$ auf dem Kompaktum $K$ durch Polynome beliebig gut approximierbar ist, dann ist die Funktion $f$ notwendigerweise stetig auf $K$ und holomorph in $\overset{o}{K}$.

**<u>Bemerkung 2.3:</u>** Wir weisen darauf hin, dass sowohl beim Satz von Runge als auch beim Satz von Mergelyan der Grad des Polynoms, welches $f$ auf $K$ approximiert, beliebig groß gewählt werden kann.

Gilt nämlich für das Polynom $P(z) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu z^\nu$

$$\max_K \left| f(z) - P(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ist ein $l \in IN$ vorgeschrieben, so hat das Polynom $Q(z) = P(z) + b_l z^l$ mit $b_l \neq 0$ mindestens den Grad $l$, und bei genügend kleiner Wahl von $|b_l|$ gilt

$$\max_K \left| f(z) - Q(z) \right| < \varepsilon .$$

# 3 Ergebnisse aus der Ostrowskischen Theorie der Überkonvergenz

Wir geben hier eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Begriffe und Ergebnisse der Ostrowskischen Überkonvergenztheorie, die in den Originalarbeiten [18]-[21] zu finden sind.

Es sei wiederum die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ mit Konvergenzradius 1 und den Teilsummen $s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot z^\nu \quad (n \in IN)$ gegeben.

Die Menge $\Psi(f)$ aller Konvergenzpunkte der Folge $\{s_n(z)\}$ enthält den Einheitskreis und unter Umständen auch Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|=1$. Trotz der Divergenz der Teilsummenfolge $\{s_n(z)\}$ außerhalb des Einheitskreises kann es eine Teilfolge $\{n_k\}$ geben, so dass die Folge $\{s_{n_k}(z)\}$ auch in Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|>1$ konvergiert. Dies führt zum Begriff der Überkonvergenz bzw. der kompakten Überkonvergenz:

**<u>Definition 3.1:</u>** Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 heißt

<u>überkonvergent</u> im Punkt $z_0 \notin \Psi(f)$, wenn es eine an $z_0$ konvergente Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ gibt;

<u>kompakt überkonvergent</u> in einem Gebiet $G \not\subset ID$, wenn eine Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ in $G$ kompakt konvergiert.

Gilt $G \cap \partial ID \neq \emptyset$, dann wird die Funktion $f$ durch die Teilsummenfolge $\{s_{n_k}(z)\}$ in das Gebiet $G$ analytisch fortgesetzt.

Mit der kompakten Überkonvergenz steht der Begriff der Hadamard-Ostrowski-Lücken in engem Zusammenhang:

**<u>Definition 3.2:</u>** Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 besitzt

Hadamard-Ostrowski-Lücken (kurz H.-O.-Lücken) $\{p_k, q_k\}$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) $p_k, q_k$ sind natürliche Zahlen mit $p_1 < q_1 \leq p_2 < q_2 \leq \ldots$;

b) mit einem $\lambda > 1$ gilt: $\dfrac{q_k}{p_k} > \lambda$ für alle $k \in IN$;

c) für $\mathrm{I} := \bigcup_{k=1}^{\infty} (p_k, q_k)$ gilt: $\overline{\lim\limits_{\substack{\nu \to \infty \\ \nu \in \mathrm{I}}}} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < 1$.

Wenn für $\nu \in \mathrm{I}$ alle Koeffizienten $a_\nu$ gleich Null sind, sprechen wir von <u>reinen H.-O.-Lücken</u>.

Zwischen dem Auftreten von Überkonvergenz und dem Vorhandensein von Lücken in der Koeffizientenfolge der Potenzreihe besteht ein Zusammenhang, wie Ostrowski gezeigt hat. Er gelangte zu dem Ergebnis ([18], S. 557), dass jede analytisch fortsetzbare Potenzreihe mit H.-O.-Lücken überkonvergent ist. Es gilt:

**<u>Satz 3.1 (Überkonvergenzsatz von Ostrowski):</u>** Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 besitze eine Folge von H.-O.-Lücken $\{p_k, q_k\}_k$, und es sei $f$ über den Einheitskreis hinaus analytisch fortsetzbar. Dann gibt es ein Gebiet, das den Einheitskreis $ID$ und jeden Holomorphiepunkt $z_0 \in \partial ID$ von $f$ enthält, in dem die Folge $\{s_{p_k}(z)\}_k$ kompakt konvergiert.

Der Ostrowskische Überkonvergenzsatz ist im gewissen Sinn umkehrbar. Denn Ostrowski hat gezeigt ([20], S. 185), dass jede überkonvergente Potenzreihe auch notwendigerweise H.-O.-Lücken besitzt:

**<u>Satz 3.2 (Ostrowski):</u>** Besitzt eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1 eine kompakt überkonvergente Teilsummenfolge $\{s_{n_\nu}(z)\}$, so gibt es eine Folge $\{p_k, q_k\}$ von H.-O.-Lücken mit

$$n_\nu \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (p_k, q_k).$$

Die „Größe“ des nach Satz 3.1 gesicherten Gebietes, in dem Überkonvergenz auftritt, ist weitgehend unbekannt. Intuitiv vermutet man, dass die „Größe“ des Gebietes mit der Lückenlänge zunimmt.

Ostrowski hat die Frage nach der „Größe“ des Überkonvergenzgebietes für eine wichtige Klasse von Potenzreihen mit dem folgenden Satz beantwortet ([19], S. 335):

**Satz 3.3 (Ostrowski):** Hat die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 reine H.-O.-Lücken $\{p_k, q_k\}_k$ mit $\frac{q_k}{p_k} \to \infty$, dann gilt:

a) Das maximale Holomorphiegebiet $G$ von $f$ ist einfach zusammenhängend;

b) die Folge der Teilsummen $\{s_{p_k}(z)\}$ konvergiert in $G$ kompakt gegen $f(z)$.

Wir stellen die Frage, ob es Potenzreihen gibt, welche genau in einem vorgegebenen Gebiet $G$ überkonvergieren. Eine Charakterisierung der Gebiete, in denen kompakte Überkonvergenz auftreten kann, liefert Ostrowski mit dem nächsten Satz ([21], S. 16):

**Satz 3.4 (Ostrowski):** Zu jedem einfach zusammenhängendem Gebiet $G_0$ mit $G_0 \supset ID$ und $\partial ID \not\subset G_0$ gibt es eine genau in $G_0$ holomorphe Funktion $f_0$, deren Potenzreihe $f_0(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ in $G_0$ kompakt überkonvergiert.

# 4 Unendliche Matrizen und Matrix-Transformierte von Potenzreihen

Wir untersuchen Matrix-Transformierte von Potenzreihen mit Konvergenzradius 1, die vermittels linearer Summationsverfahren gebildet werden.

Gegeben sei eine unendliche Matrix

$$A = (\alpha_{n\nu})_{\substack{n=0,1,\ldots \\ \nu=0,1,\ldots}} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \ldots \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_{n\nu} \in \mathbb{C} .$$

**<u>Definition 4.1:</u>** Die Matrix heißt <u>zeilenfinit</u>, wenn für alle $n \in IN_0$ ein $\nu_n \in IN_0$ so existiert, dass für alle $\nu > \nu_n$ gilt: $\alpha_{n\nu} = 0$.

Anderenfalls heißt die Matrix <u>zeileninfinit</u>.

Allgemein definiert die Matrix $A$ für eine Folge $\{s_n\}_n$ komplexer Zahlen eine Transformation dieser Folge, die durch $\sigma_n^A = \sigma_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ gegeben ist.

Für eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ mit Konvergenzradius 1 und den Teilsummen $s_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k \cdot z^k$ definiert die Matrix $A$ eine Transformation der Teilsummenfolge dieser Potenzreihe; ihre $A$-Transformierten sind gegeben durch

$$\sigma_n^{A,f}(z) = \sigma_n(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(z) \quad (n = 0,1,2,\ldots) .$$

Wir interessieren uns hier für die Frage, unter welchen Voraussetzungen über die Matrix $A$ die Folge $\{\sigma_n(z)\}$ im Konvergenzgebiet der Potenzreihe, also im Einheitskreis und möglichen Konvergenzpunkten auf $\partial ID$, kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.

Zunächst definieren wir den Begriff der Permanenz einer Matrix.

**Definition 4.2:** Die Matrix $A$ heißt permanent, wenn für jede konvergente Folge $\{s_n\}_n$ mit

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^A = s$ gilt.

Nach dem Satz von Töplitz-Schur (siehe z.B. [24], S. 11) ist eine Matrix genau dann permanent, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0,1,2,...) \qquad \text{(Spaltenbedingung)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} = 1 \qquad \text{(Zeilensummenbedingung)},$$

$$\sup_n \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{n\nu}| < \infty \qquad \text{(Zeilennormenbedingung)}.$$

Für das Verhalten der $A$-Transformierten von $f(z)$ im Einheitskreis ergibt sich leicht:
Ist die Matrix $A$ permanent, dann konvergiert auch $\{\sigma_n(z)\}$ in $ID$ kompakt gegen $f(z)$.

Wir können die Voraussetzungen an die Matrix noch abschwächen, wenn wir nur verlangen, dass die Teilsummen einer Potenzreihe im Konvergenzkreis kompakt $A$-summierbar sind.

**Definition 4.3:** Die unendliche Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ heißt Potenzreihen-permanent (kurz PR-permanent), wenn für alle Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ mit positivem Konvergenzradius die Folge der $A$-Transformierten

$$\sigma_n(z) = \sigma_n^{A,f}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(z) \quad \text{mit} \quad s_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu z^\mu$$

im Konvergenzkreis der Potenzreihe kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.

Luh [6] gibt mit folgendem Ergebnis die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die PR-Permanenz einer Matrix:

**Satz 4.1 (Luh):** Die Matrix $A=(\alpha_{n\nu})$ ist genau dann PR-permanent, wenn $A$ folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n\nu}=0 \quad (\nu=0,1,2,...) \qquad \text{(Spaltenbedingung)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n\nu}=1 \qquad \text{(Zeilensummenbedingung)}$$

und

$$\sup_{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_{n\nu}|\cdot r^{\nu}<\infty \quad \text{für alle } r\in(0,1).$$

**Bemerkung 4.1:** Eine permanente Matrix ist trivialerweise auch PR-permanent. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht.

Es ist unser Ziel, die Überkonvergenz von Matrix-Transformierten von Potenzreihen zu untersuchen. Daher wollen wir zunächst den Begriff der $A$-Überkonvergenz bzw. kompakten $A$-Überkonvergenz definieren:

**Definition 4.4:** Für die unendliche Matrix $A=(\alpha_{n\nu})$ bezeichnen wir die Menge der Konvergenzpunkte der $A$-Transformierten $\sigma_n(z)$ mit $\Psi_A(f)$. Dann heißt die Potenzreihe $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\cdot z^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1

<u>$A$-überkonvergent</u> im Punkt $z_0\notin\Psi_A(f)$, wenn es eine konvergente Teilsummenfolge $\{\sigma_{n_k}(z_0)\}$ gibt;

<u>kompakt $A$-überkonvergent</u> in einem Gebiet $G\not\subset ID$, in welchem $\{\sigma_n(z)\}$ nicht kompakt konvergiert, wenn es eine in $G$ kompakt konvergente Teilsummenfolge $\{\sigma_{n_k}(z)\}$ gibt.

Ein bekanntes Ergebnis für spezielle Matrizen liefert Luh [5] in Analogie zur Überkonvergenztheorie von Ostrowski. Er betrachtet Dreiecksmatrizen, welche die Zeilensummen- und Spaltenbedingung erfüllen:

**Satz 4.2 (Luh):** Es seien endlich oder abzählbar viele einfach zusammenhängende Gebiete $G^0, G^1, G^2, \ldots$ in $\mathbb{C}$ gegeben, die paarweise disjunkt sind. Es gelte $ID \subset G^0$, $\overline{ID} \not\subset G^0$. In jedem Gebiet $G^\mu$, $\mu = 1,2,\ldots$ sei eine holomorphe Funktion $f_\mu$ vorgeschrieben. Die Dreiecks-Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ erfülle die Spalten- und Zeilensummenbedingung. Dann gibt es eine genau in $G^0$ holomorphe Funktion $f_0$, deren Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ die folgende Eigenschaft besitzt:

Es existiert eine Folge $\{n_k\}_k$, so dass $\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{n_k} \alpha_{n_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ für $\mu = 0,1,2,\ldots$ in $G^\mu$ kompakt gegen $f_\mu(z)$ konvergiert und in jedem Punkt $z \notin \bigcup_{\mu \geq 0} G^\mu$ divergiert.

Luh beweist auch den Fall, dass sich die Gebiete $G^\mu$ $(\mu = 1,2,\ldots)$ gegenseitig überlappen. Dann gehört zu jedem $G^\mu$ eine andere, von $\mu$ abhängige Folge $\{n_k^\mu\}_k$.

Otzen modifiziert die Ergebnisse von Luh, indem er andere Forderungen an die Matrix stellt. Er betrachtet allgemeine unendliche Matrizen $A = (\alpha_{n\nu})$, welche mit einer Teilfolge $\{\mu_k\}_k$ der natürlichen Zahlen und $M := \{\mu_0, \mu_1, \ldots\}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(M1) $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M}} \alpha_{n\nu} = 0$ $(\nu \in IN_0)$ (Schwache Spaltenbedingung),

(M2) $\lim_{\nu\to\infty} |\alpha_{n\nu}|^{\frac{1}{\nu}} = 0$ für alle $n \in M$,

(M3) $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} = 1$ (Schwache Zeilensummenbedingung).

**Bemerkung 4.2:** Die Bedingung (M2) sorgt dafür, dass für jede Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ vom Konvergenzradius $R > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ die $A$-Transformierten $\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(z)$ als ganze Funktionen für alle $n \in M$ existieren.

**Bemerkung 4.3:** Die Einheitsmatrix $E=(e_{n\nu})$ mit $e_{n\nu}=\begin{cases}1 & falls \quad \nu=n\\ 0 & falls \quad \nu\neq n\end{cases}$ ist immer eine speziell zulässige Matrix und es ergibt sich $\sigma_n^E(z)=s_n(z)$.

Otzen [22] kommt durch die Modifizierung der Bedingungen, die an die Matrix gestellt sind, zu einem analogen Ergebnis wie Luh in [5]. Er beweist folgende Verallgemeinerung:

**Satz 4.3 (Otzen):** Es seien endlich oder abzählbar viele einfach zusammenhängende Gebiete $G^0, G^1, G^2, \ldots$ in $\mathbb{C}$ gegeben, die paarweise disjunkt sind. Es gelte $ID \subset G^0$, $\overline{ID} \not\subset G^0$. In jedem Gebiet $G^\mu$, $\mu=1,2,\ldots$ sei eine holomorphe Funktion $f_\mu$ vorgeschrieben.
Die unendliche Matrix $A=(\alpha_{n\nu})$ erfülle die Matrixbedingungen (M1)–(M3). Dann gibt es eine genau in $G^0$ holomorphe Funktion $f_0$, deren Potenzreihe $f_0(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ die folgende Eigenschaft besitzt: Es existiert eine Folge $\{n_k\}_k$, so dass $\sigma_{n_k}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n_k\nu}\cdot s_\nu(z)$ für $\mu=0,1,2,\ldots$ in $G^\mu$ kompakt gegen $f_\mu(z)$ konvergiert und in jedem Punkt $z\notin \bigcup_{\mu\geq 0} G^\mu$ divergiert.

Sowohl Luh als auch Otzen zeigen analoge Aussagen auch für endlich oder abzählbar viele einfach zusammenhängende Gebiete $G^\mu$ $(\mu\in IN_0)$ mit $G^0\supset ID$, $\overline{ID}\not\subset G^0$ und $G^\mu\cap G^0=\emptyset$ für $\mu=1,2,\ldots$, das heißt, die Gebiete $G^\mu$ $(\mu\geq 1)$ dürfen sich überlappen. Bei beiden Autoren dürfen die Gebiete $G^\mu$ $(\mu\geq 1)$ aber keine Randpunkte des Einheitskreises enthalten.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Erweiterung der Ergebnisse von Luh und Otzen, indem wir Mengen (kompakte, offene, messbare) und Gebiete betrachten, die Randpunkte des Einheitskreises enthalten dürfen. Mithilfe eines Ergebnisses von Melas und Nestoridis ([14]) ist es uns möglich, analog zu Luh und Otzen die Existenz einer Potenzreihe $f_0(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\cdot z^\nu$ vom Kovergenzradius 1 zu beweisen, die auf Mengen, die den Rand des

einfach zusammenhängenden Holomorphiegebietes $G$ von $f_0(z)$ treffen dürfen (und somit auch den Rand des Einheitskreises), $A$ – überkonvergiert (die Matrix $A$ erfülle die Bedingungen (M1)–(M3)).

Wenn wir den Einheitskreis als einfach zusammenhängendes Gebiet betrachten, dann können stetige und messbare Funktionen, wie wir in Kapitel 7 zeigen werden, auf dem Rand des Einheitskreises durch Matrix-Transformierte von speziellen trigonometrischen Reihen approximiert werden.

# 5 Überkonvergenz bei Matrix-Transformierten von Potenzreihen

## 5.1 Überkonvergenz in vorgegebenen kompakten Mengen

Wir kommen nun zu einem der Hauptergebnisse dieses Kapitels und zeigen, dass zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G$ mit $G \supset ID$ und $\overline{ID} \not\subset G$, einer Matrix $A$, kompakten Mengen $K_1, K_2, \ldots$ aus $M(G)$ und gegebenen Funktionen $f_m \in A(K_m)$ eine holomorphe Funktion $f_0$ existiert, so dass Teilfolgen der $A$-Transformierten der Potenzreihe von $f_0$ in $G$ kompakt gegen $f_0$ und in jedem $K_m$ gleichmäßig gegen $f_m$ konvergieren.

**<u>Satz 5.1:</u>** Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $ID \subset G$ und $\overline{ID} \not\subset G$. Ferner seien endlich oder abzählbar viele paarweise disjunkte kompakte Mengen $K_1, K_2, \ldots$ aus $M(G)$ und $f_m \in A(K_m)$ gegeben. Die Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ erfülle die Matrixbedingungen (M1)–(M3). Dann gibt es eine genau in $G$ holomorphe Funktion $f_0$, deren Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ folgende Eigenschaft hat:

Es existiert eine Folge $\{n_k\}_k$, so dass $\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k \nu} s_\nu(z)$ in $G$ kompakt gegen $f_0(z)$, und in jedem $K_m$ gleichmäßig gegen $f_m(z)$ konvergiert. Überdies divergiert $\{\sigma_{n_k}(z)\}$ in allen Punkten einer dichten Teilmenge von $\left[G \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right]^c$.

**<u>Beweis :</u>** Es sei $\omega = \varphi(z)$ eine konforme Abbildung von $ID$ auf $G$, mit $\varphi(0) = 0$. Für $n \in IN$ sei $G^{(n)} := \varphi\left(\left\{z : |z| < 1 - \frac{1}{2n}\right\}\right)$. Dann ist $\{G^{(n)}\}$ eine Folge beschränkter Jordangebiete, die von innen heraus gegen $G$ konvergiert, denn es gilt für alle $n \in IN$ $G^{(n)} \subset \overline{G^{(n)}} \subset G^{n+1} \subset G$. Für jedes Kompaktum $B \subset G$ existiert ein $N = N(B)$ mit $B \subset G^{(n)}$ für alle $n \geq N(B)$.

Es seien $L^{(i)} := \bigcup_{m=1}^{i} K_m$, und die Funktion $h^i$ sei auf $L^{(i)}$ definiert durch

$h^i(z) := f_m(z)$, falls $z \in K_m$ mit $1 \le m \le i$.

Dann gilt $L^{(i)} \in M(G)$ und $L^{(i)} \cap \overline{G^{(i)}} = \emptyset$. Die Menge $L^{(i)} \cup \overline{G^{(i)}}$ ist kompakt und hat ein zusammenhängendes Komplement; ferner ist $h^i \in A(L^{(i)})$.

Wir betrachten die Menge $M := G \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ und eine in $M^c$ dichte Punktfolge $\{\varsigma_k\}_k$.

Für $n \in IN$ sei $S_n := \{\varsigma_1, ..., \varsigma_n\}$, und es gilt für alle $n \in IN$, dass $\overline{(G^{(n)} \cup L^{(n)})} \cap S_n = \emptyset$ ist.

Nun bestimmen wir sukzessive drei Folgen natürlicher Zahlen $\{q_k\}_k$, $\{p_k\}_k$, $\{n_k\}_k$ und eine Polynomfolge $\{P_k\}_k$.

Wir setzen $p_1 = 1$, $n_1 = 2$ und $q_1 = 3$.

Nach dem Satz von Mergelyan existiert ein Polynom $P_1$ mit Grad $g_1 > 1$, für das gilt:

$$\max_{G^{(1)}} |P_1(z)| < \frac{1}{2 \cdot \max_{G^{(1)}} |z^{q_1}|},$$

$$\max_{K_1} \left| \frac{f_1(z)}{z^{q_1}} - P_1(z) \right| < \frac{1}{2 \cdot \max_{K_1} |z^{q_1}|},$$

$$\max_{S_1} \left| \frac{2}{z^{q_1}} - P_1(z) \right| < \frac{1}{2 \cdot \max_{S_1} |z^{q_1}|}.$$

Nun sei $i \ge 2$. Wir nehmen an, die Zahlen $p_1, ..., p_{i-1}$, $n_1, ..., n_{i-1}$, $q_1, ..., q_{i-1}$ und die Polynome $P_1, ..., P_{i-1}$ seien schon bekannt. Der Grad von $P_{i-1}$ sei $g_{i-1} > i-1$ (siehe Bemerkung 2.3). Wir bestimmen nun die Zahlen $p_i$, $n_i$, $q_i$ und das Polynom $P_i$.

Zunächst setzen wir

$$p_i := q_{i-1} + g_{i-1} \tag{5.1}$$

und wählen dann $n_i > i \cdot p_i$ und $q_i > n_i$ so groß, dass gilt

$$\sum_{\nu=0}^{p_i - 1} |\alpha_{n_i \nu}| \le \left(\frac{1}{i}\right)^{p_i}, \quad \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_i \nu} - 1 \right| \le \left(\frac{1}{i}\right)^{p_i} \tag{5.2}$$

und

$$\left|\alpha_{n_i\nu}\right|^{\frac{1}{\nu}} \le \frac{1}{i} \qquad \text{für alle } \nu \ge q_i \quad . \tag{5.3}$$

Dabei sind (5.2) und (5.3) Folgerungen aus der Gültigkeit der Matrixbedingungen (M1)–(M3).

Nach dem Satz von Mergelyan existiert ein Polynom $P_i$ mit dem Grad $g_i > i$, für das gilt:

$$\max_{G^{(i)}} \left|P_i(z)\right| < \frac{1}{2^i \cdot \max\limits_{G^{(i)}} \left|z^{q_i}\right|} \ ,$$

$$\max_{L^{(i)}} \left| \frac{h^i(z) - \sum\limits_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z)}{z^{q_i}} - P_i(z) \right| < \frac{1}{2^i \cdot \max\limits_{L^{(i)}} \left|z^{q_i}\right|} \ ,$$

$$\max_{S_i} \left| \frac{i+1 - \sum\limits_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu} P_\nu(z)}{z^{q_i}} - P_i(z) \right| < \frac{1}{2^i \cdot \max\limits_{S_i} \left|z^{q_i}\right|} \ .$$

Induktiv entstehen Folgen $\{q_k\}_k$, $\{p_k\}_k$, $\{n_k\}_k$ natürlicher Zahlen und eine Polynomfolge $\{P_k\}_k$.

Es gilt für alle $k \in IN$ , $k \ge 2$:

$$p_k = q_{k-1} + g_{k-1} ,$$

$$q_k > n_k > k \cdot p_k ,$$

$$q_k < q_k + k < q_k + g_k = p_{k+1} ,$$

und es folgt:

$$\frac{q_k}{p_k} > \frac{k \cdot p_k}{p_k} = k \to \infty \qquad (k \to \infty) .$$

**<u>Eigenschaften von</u>** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$:

1. Für jeden kompakten Teil $B$ von $G$ existiert ein $\nu_0 = \nu_0(B) \in IN$, so dass $B \subset G^{(\nu)}$ für alle $\nu \ge \nu_0$. Dann gilt für $\nu \ge \nu_0$:

$$\max_{B}\left|z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)\right| \le \max_{\overline{G^{(\nu)}}}\left|z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)\right| \le \max_{\overline{G^{(\nu)}}}\left|z^{q_\nu}\right|\cdot \max_{\overline{G^{(\nu)}}}\left|P_\nu(z)\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}.$$

Das besagt also, dass die Polynomenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k}\cdot P_k(z)$ in $B$ gleichmäßig konvergiert, und da $B$ beliebig gewählt werden kann, haben wir kompakte Konvergenz in $G$, und die Funktion $f_0(z) := \sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k}\cdot P_k(z)$ ist mindestens in $G$ holomorph.

2. Für $i \in IN$ gilt:

$$\max_{L^{(i)}}\left|h^i(z) - \sum_{\nu=1}^{i} z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)\right| = \max_{L^{(i)}}\left|h^i(z) - \sum_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z) - z^{q_i}\cdot P_i(z)\right| =$$

$$\max_{L^{(i)}}\left|z^{q_i}\cdot\left(\frac{h^i(z) - \sum_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)}{z^{q_i}} - P_i(z)\right)\right| \le$$

$$\le \max_{L^{(i)}}\left|z^{q_i}\right|\cdot \max_{L^{(i)}}\left|\frac{h^i(z) - \sum_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)}{z^{q_i}} - P_i(z)\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{i}.$$

Da jedes Kompaktum $K_m$ für alle $i \ge m$ in $L^{(i)}$ enthalten ist, folgt, dass die Polynomfolge $\left\{\sum_{\nu=1}^{i} z^{q_\nu}\cdot P_\nu(z)\right\}$ in $K_m$ gleichmäßig gegen $f_m(z)$ konvergiert.

3. Es sei ein beliebiges $\varsigma \in S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ gegeben; es gibt dann ein $n \in IN$ mit $\varsigma \in S_n$, und es folgt

$$\left|n+1-\sum_{k=1}^{n}\varsigma^{q_k}\cdot P_k(\varsigma)\right| \le \max_{S_n}\left|n+1-\sum_{k=1}^{n} z^{q_k}\cdot P_k(z)\right| =$$

$$\max_{S_n}\left| z^{q_n} \cdot \left( \frac{n+1-\sum_{k=1}^{n-1} z^{q_k} \cdot P_k(z)}{z^{q_n}} - P_n(z) \right) \right| \leq$$

$$\leq \max_{S_n}\left| z^{q_n} \right| \cdot \max_{S_n}\left| \frac{n+1-\sum_{k=1}^{n-1} z^{q_k} \cdot P_k(z)}{z^{q_n}} - P_n(z) \right| < \frac{1}{2^n} .$$

Wir erhalten

$$1 > \left| n+1-\sum_{k=1}^{n} \varsigma^{q_k} \cdot P_k(\varsigma) \right| \geq (n+1) - \left| \sum_{k=1}^{n} \varsigma^{q_k} \cdot P_k(\varsigma) \right|$$

und somit

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varsigma^{q_k} P_k(\varsigma) \right| \geq n \ .$$

Die Polynomreihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$ divergiert also an allen $\varsigma \in S$, und die Menge $S$ ist dicht in $M^c$.

**<u>Umordnung in eine Potenzreihe:</u>**

Ein Polynom $z^{q_{k-1}} \cdot P_{k-1}(z)$ enthält Potenzen von $z$, deren Exponenten zwischen $q_{k-1}$ und $q_{k-1} + g_{k-1} = p_k$ liegen.

Aus $p_k = q_{k-1} + g_{k-1} < \frac{q_k}{k} \leq q_k$ folgt, dass sich die Potenzen aufeinander folgender Polynome nicht überlappen. Daher erhalten wir die Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ durch formales Ordnen der Polynomenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$ nach steigenden $z$-Potenzen.

Insbesondere gilt: $\sum_{l=1}^{k-1} z^{q_l} \cdot P_l(z) = \sum_{l=0}^{p_k} a_l \cdot z^l = s_{p_k}(z)$ .

Da die Potenzreihe keine Potenzen von $z$ enthält, deren Exponenten zwischen $p_k$ und $q_k$ liegen, und wegen $\frac{q_k}{p_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$, besitzt sie reine Ostrowski-Lücken $\{p_k, q_k\}$.

Damit ist also bewiesen, dass $s_{p_k}(z)$ in $G$ kompakt gegen $f_0(z)$, für $m \in IN$ in $K_m$ gleichmäßig gegen $f_m(z)$ konvergiert und in allen Punkten einer dichten Teilmenge von $M^c$ divergiert.

Da die Potenzreihe $f_0(z_0) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$ reine Ostrowski-Lücken $\{p_k, q_k\}$ mit $\frac{q_k}{p_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$ besitzt, ist $f_0$ nach Satz 3.3 holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G^* \supset G$ und $\{s_{p_k}(z)\}$ konvergiert kompakt in $G^*$ gegen $f_0(z)$. Außerdem ist $f_0(z)$ über $G^*$ hinaus nicht analytisch fortsetzbar. Da $\{s_{p_k}(z)\}$ in allen Punkten einer dichten Teilmenge von $\left[G \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right]^c$ divergiert, muss $G^* = G$ gelten.

**<u>Die $A$-Transformierten</u>** $\sigma_n(z)$:

Wir bestimmen nun die $A$-Transformierten der Reihe $f_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$, diese sind gegeben durch $\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(z)$. Wir betrachten folgenden Ausdruck:

$$\sigma_{n_k}(z) - s_{p_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k\nu} \cdot \left(s_\nu(z) - s_{p_k}(z)\right) + s_{p_k}(z) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k\nu} - 1\right) =:$$

$$\sum\nolimits_1 \qquad + \qquad \sum\nolimits_2 \quad .$$

Für alle $\nu$ mit $p_k \le \nu < q_k$ ist $s_\nu(z) = s_{p_k}(z)$, und es ergibt sich

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\nu=0}^{p_k-1} + \sum_{\nu=p_k}^{q_k-1} + \sum_{\nu=q_k}^{\infty} = \sum_{\nu=0}^{p_k-1} + \sum_{\nu=q_k}^{\infty} \quad .$$

Es sei ein beliebiges $R \ge 1$ gegeben. Da $f_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ den Konvergenzradius 1 hat, gilt nach Satz 2.1 für die Teilsummen $s_n(z)$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\max_{|z|\le R}\left|s_n(z)\right|\right]^{\frac{1}{n}} = R \ .$$

Daraus folgt mit einer geeigneten Konstanten M:

$$\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \ \le \ M\cdot(R+1)^\nu \qquad \text{für } \ \nu \ge q_k \ ,$$

$$\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \ \le \ M\cdot(R+1)^{p_k} \qquad \text{für } \ \nu \le p_k$$

und

$$\max_{|z|\le R}\left|s_{p_k}(z)\right| \ \le \ M\cdot(R+1)^{p_k} \ .$$

Unter Berücksichtigung von (5.2) und (5.3) folgt nun für $k \ge 1$:

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum_{\nu=0}^{p_k-1}\alpha_{n_k\nu}\cdot(s_\nu(z)-s_{p_k}(z))\right| \ \le \ \sum_{\nu=0}^{p_k-1}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \ \le$$

$$\le \ \sum_{\nu=0}^{p_k-1}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot M\cdot(R+1)^{p_k} \ \le \ M\cdot\left(\frac{R+1}{k}\right)^{p_k} \to 0 \qquad (k\to\infty)$$

und für $k \ge 2\cdot(R+1)$:

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum_{\nu=q_k}^{\infty}\alpha_{n_k\nu}\cdot(s_\nu(z)-s_{p_k}(z))\right| \ \le \ \sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \ \le$$

$$\le \ \sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot M\cdot(R+1)^\nu \ \le \ M\cdot\sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left(\frac{R+1}{k}\right)^\nu \ = \ \left(\frac{R+1}{k}\right)^{q_k}\cdot M\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{R+1}{k}\right)^\nu \ \le$$

$$\le \ M\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{q_k}\cdot 2 \ \to \ 0 \qquad (k\to\infty) \ .$$

Das bedeutet, dass $\sum_1$ für alle $|z|\le R$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Für $\sum_2$ gilt nach (5.2):

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum_2\right| \ \le \ \max_{|z|\le R}\left|s_{p_k}(z)\right|\cdot\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n_k\nu}-1\right| \ \le$$

$$\leq M \cdot (R+1)^{p_k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{p_k} = M \cdot \left(\frac{R+1}{k}\right)^{p_k} \to 0 \qquad (k \to \infty) .$$

Das bedeutet, dass auch $\sum_2$ für alle $|z| \leq R$ gleichmäßig gegen $0$ konvergiert.

Da $R \geq 1$ beliebig war, sind $\{ s_{p_k}(z) \}$ und $\{ \sigma_{n_k}(z) \}$ in $\mathbb{C}$ kompakt äquikonvergent. Wegen der kompakten Konvergenz von $\{ s_{p_k}(z) \}$ in $G$ gegen $f_0(z)$ und der gleichmäßigen Konvergenz von $\{ s_{p_k}(z) \}$ in $K_m$ gegen $f_m(z)$ folgen nun alle Behauptungen. □

## 5.2 Matrix-Transformierte von Potenzreihen als Universalfunktionen zur Approximation auf kompakten Mengen

### 5.2.1 Ausschöpfungen durch kompakte Mengen

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir wollen in diesem Abschnitt ein Resultat über die Ausschöpfung von $G^c := \mathbb{C} \setminus \mathrm{G}$ durch spezielle kompakte Mengen beweisen. Dieses wird ein zentrales Hilfsmittel bei den darauf folgenden Ergebnissen spielen.

Es gilt der folgende „Ausschöpfungs"-Satz für das Komplement eines Gebietes, dessen erste Aussage a) schon bei Melas und Nestoridis [14] für gewisse offene Mengen (allerdings mit inkorrektem Beweis) zu finden ist. Im Fall eines Gebietes ist eine (von [14] abweichende) sehr einfache Beweisführung möglich.

**<u>Satz 5.2:</u>** Es sei $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ , $\mathrm{G} \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt:

a) Es existiert eine Folge $\{ K_n \}$ von Mengen $K_n \in M(G)$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $K \in M(G)$ existiert ein $n_0 \in IN$ mit $K \subset K_{n_0}$.

b) Es existiert eine Folge $\{ B_n \}$ von Mengen $B_n \in M(G)$ mit der Eigenschaft: $B_n \subset B_{n+1} \subset G^c$ für alle $n \in IN$ und $G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ .

**<u>Beweis:</u>** Es sei $S := \{ z : |z - z_0| \leq r \}$ eine in $G$ enthaltene Kreisscheibe.

1. Es sei $\{ L_n \}$ eine Abzählung aller Jordangebiete in $S^c$, die von Polygonen mit Ecken an Punkten mit rationalem Real- und Imaginärteil berandet sind. Die Mengen $\overline{L_n}$ sind kompakt und haben ein zusammenhängendes Komplement. Zu jeder kompakten Menge $E \subset S^c$ mit zusammenhängendem Komplement gibt es ein $n_0 \in IN$ mit $E \subset \overline{L_{n_0}}$ . Wir betrachten die Folge $\{ K_n \}$ mit $K_n := \overline{L_n} \cap G^c$ . Ist eine Menge $K \in M(G)$ gegeben, so gibt es offensichtlich ein $m_0 \in IN$ mit

$K \subset K_{m_0}$. Es genügt also zu zeigen, dass $K_n \in M(G)$ gilt; dazu müssen wir zeigen, dass zu jedem $\varsigma \in K_n^c = \overline{L_n}^c \cup G$ eine Jordankurve $\Gamma \subset K_n^c$ existiert, die $\varsigma$ mit $\infty$ verbindet. Dies ist klar, falls $\varsigma \in \overline{L_n}^c$ ist.

Ist $\varsigma \in G$, so existiert eine Jordankurve $\gamma_0 \subset G$ (und damit $\gamma_0 \subset K_n^c$), die $\varsigma$ mit $z_0$ verbindet. Wegen $z_0 \in \overline{L_n}^c$ gibt es eine Jordankurve $\gamma_1 \subset \overline{L_n}^c$, die $z_0$ mit $\infty$ verbindet. Die Kurve $\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.

2. Für $n \in IN$ betrachten wir die Mengen

$$S_n := \{z = z_0 + \rho \cdot e^{i\nu} : r + \frac{1}{n} \le \rho \le r + n;\ 0 \le \nu \le 2\pi - \frac{1}{n}\}.$$

Es gilt $S_n \subset S_{n+1} \subset S^c$ und $S^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Die Mengen $S_n$ sind kompakt und haben ein zusammenhängendes Komplement. Analog zu (1) folgt, dass die Mengen $B_n := S_n \cap G^c$ die gewünschte Eigenschaft (2) haben. □

## 5.2.2 Universelle Approximation auf kompakten Mengen

Der nachfolgende Satz ist eine Aussage über die universelle Approximation auf kompakten Mengen. Er beweist die Existenz einer holomorphen Funktion $f_0$ mit der Eigenschaft, dass zu jeder kompakten Menge $K \in M(G)$ und zu jeder Funktion $f \in A(K)$ die $A$-Transformierten der Potenzreihe von $f_0$ in $G$ kompakt gegen $f_0$ und in $K$ gleichmäßig gegen $f$ konvergieren.

**<u>Satz 5.3:</u>** Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $ID \subset G$ und $\overline{ID} \not\subset G$. Die Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ erfülle die Bedingungen (M1)–(M3). Dann existiert eine genau in $G$ holomorphe Funktion $f_0$ mit der Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ und eine Folge $\{n_k\}_k$ natürlicher Zahlen, für die gilt:

a) Die Folge $\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ konvergiert in $G$ kompakt gegen $f_0(z)$.

b) Zu jedem Kompaktum $K \in M(G)$ und zu jedem $f \in A(K)$ gibt es eine Teilfolge $\{n_{k_l}\}_l$ von $\{n_k\}_k$ mit:

$$\sigma_{n_{k_l}}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_{k_l}\nu} \cdot s_\nu(z) \underset{K}{\Rightarrow} f(z) \ .$$

**Beweis:** Es sei $w = \varphi(z)$ eine konforme Abbildung von $ID$ auf $G$, mit $\varphi(0) = 0$. Für $n \in IN$ sei $G^{(n)} := \varphi\left(\left\{z : |z| < 1 - \frac{1}{2n}\right\}\right)$. Dann ist $\{G^{(n)}\}$ eine Folge beschränkter Jordangebiete, die von innen heraus gegen $G$ konvergiert, denn es gilt:

$G^{(n)} \subset \overline{G^{(n)}} \subset G^{n+1} \subset G$ für alle $n \in IN$.

Da $G$ ein Gebiet ist, gibt es nach Satz 5.2 eine Folge $\{K_k^*\}$ mit $K_k^* \in M(G)$ für alle $k \in IN$, so dass für jedes $K \in M(G)$ ein $k_0$ existiert mit $K \subset K_{k_0}^*$. Ferner sei $\{Q_k^*\}$ eine Abzählung aller Polynome, bei welchen die Koeffizienten rationale Real- und Imaginärteile besitzen.

Für jedes $k \in IN$ gibt es $m, j \in IN$ mit $1 \le j \le m$, so dass gilt: $k = \binom{m}{2} + j$.

Es sei nun

$$K_k = K_{\binom{m}{2}+j} := K_j^* \quad \text{und} \quad Q_k = Q_{\binom{m}{2}+j} := Q_{m-j+1}^* \ . \tag{5.1}$$

Wir betrachten die Folge von Paaren $\{(K_k, Q_k)\}$.

Sukzessive bestimmen wir drei Folgen natürlicher Zahlen $\{q_k\}$, $\{p_k\}$, $\{n_k\}$ sowie eine Polynomfolge $\{P_k\}$.

Wir setzen $p_1 = 1,\ n_1 = 2,\ q_1 = 3$.

Nach dem Satz von Runge existiert ein Polynom $P_1$ mit dem Grad $g_1 > 1$, für das gilt:

$$\max_{G^{(1)}} |P_1(z)| < \frac{1}{2 \cdot \max_{G^{(1)}} |z^{q_1}|} \ ,$$

$$\max_{K_1} \left| \frac{Q_1(z)}{z^{q_1}} - P_1(z) \right| < \frac{1}{\max_{K_1} |z^{q_1}|} \ .$$

Nun sei $i \geq 2$. Wir nehmen an, die Zahlen $p_1,...,p_{i-1}$, $n_1,...,n_{i-1}$, $q_1,...,q_{i-1}$ und die Polynome $P_1,...,P_{i-1}$ seien schon bekannt. Der Grad von $P_{i-1}$ sei $g_{i-1} > i-1$. Wir bestimmen nun die Zahlen $p_i$, $n_i$, $q_i$ und das Polynom $P_i$.

Zunächst setzen wir

$$p_i := q_{i-1} + g_{i-1} \tag{5.2}$$

und wählen dann $n_i > i \cdot p_i$ und $q_i > n_i$ so groß, dass gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{p_i-1} \left|\alpha_{n_i\nu}\right| \leq \left(\frac{1}{i}\right)^{p_i} \quad , \quad \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_i\nu} - 1\right| \leq \left(\frac{1}{i}\right)^{p_i} \tag{5.3}$$

und

$$\left|\alpha_{n_i\nu}\right|^{\frac{1}{\nu}} \leq \frac{1}{i} \quad \text{für alle} \quad \nu \geq q_i \quad . \tag{5.4}$$

Dabei sind (5.3) und (5.4) Folgerungen aus der Gültigkeit der Matrixbedingungen (M1)–(M3).

Nach dem Satz von Runge existiert ein Polynom $P_i$ mit dem Grad $g_i > i$, für das gilt:

$$\max_{G^{(i)}} \left|P_i(z)\right| \; < \; \frac{1}{2^i \cdot \max\limits_{G^{(i)}} \left|z^{q_i}\right|} \; ,$$

$$\max_{K_i} \left| \frac{Q_i(z) - \sum\limits_{\nu=1}^{i-1} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z)}{z^{q_i}} - P_i(z) \right| \; < \; \frac{1}{i \cdot \max\limits_{K_i} \left|z^{q_i}\right|} \; .$$

Induktiv entstehen Folgen $\{p_k\}_k$, $\{n_k\}_k$, $\{q_k\}_k$ natürlicher Zahlen und eine Polynomfolge $\{P_k\}_k$.

Es gilt für alle $k \in IN$ , $k \geq 2$ :

$$p_k \; = \; q_{k-1} + g_{k-1} \, ,$$

$$q_k \; > \; n_k \; > \; k \cdot p_k \, ,$$

$$q_k \; < \; q_k + k \; < \; q_k + \; g_k = p_{k+1} \, ,$$

und es folgt $$\frac{q_k}{p_k} > \frac{k \cdot p_k}{p_k} = k \quad \to \quad \infty \qquad (k \to \infty)\,.$$

**<u>Eigenschaften von</u>** $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$

1. Für jeden kompakten Teil $B$ von $G$ existiert ein $k_0 = k_0(B) \in IN$, so dass $B \subset G^{(k)}$ für alle $k \geq k_0$. Für alle $k \geq k_0$ gilt also

$$\max_B \left| z^{q_k} \cdot P_k(z) \right| \leq \max_{G^{(k)}} \left| z^{q_k} \cdot P_k(z) \right| \leq \max_{G^{(k)}} \left| z^{q_k} \right| \cdot \max_{G^{(k)}} \left| P_k(z) \right| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^k .$$

   Das bedeutet, dass die Polynomenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$ in $B$ gleichmäßig konvergiert, und da $B$ beliebig gewählt werden kann, haben wir kompakte Konvergenz in $G$, und die Funktion $f_0(z) := \sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$ ist mindestens in $G$ holomorph.

2. Nun seien eine kompakte Menge $K \in M(G)$ und ein $f \in A(K)$ gegeben. Aus Satz 5.2 folgt, dass zu diesem $K$ ein $k_0 \in IN$ existiert mit $K \subset K^*_{k_0}$. Nach dem Satz von Mergelyan existiert eine Folge $\{m_l\}$ mit $m_l \to \infty$ und

$$\max_K \left| f(z) - Q^*_{m_l}(z) \right| < \frac{1}{l}.$$

   Nun definieren wir $k_l := \binom{m_l + k_0 - 1}{2} + k_0$ und erhalten wegen (5.1)

$$K_{k_l} = K^*_{k_0} \qquad \text{und} \qquad Q_{k_l} = Q^*_{m_l}\,.$$

   Es ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\max_{K^*_{k_0}} \left| Q_{k_l}(z) - \sum_{\nu=1}^{k_l} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z) \right| \leq \max_{K_{k_l}} \left| z^{q_{k_l}} \right| \cdot \max_{K_{k_l}} \left| \frac{Q_{k_l}(z) - \sum_{\nu=1}^{k_l - 1} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z)}{z^{q_{k_l}}} - P_{k_l}(z) \right| < \frac{1}{l}\,.$$

Unter Berücksichtigung von (5.1) folgt weiter:

$$\max_K \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{k_l} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z) \right| = \max_K \left| (f(z) - Q^*_{m_l}(z)) + (Q_{k_l}(z) - \sum_{\nu=1}^{k_l} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z) \right| \leq$$

$$\leq \max_K \left| f(z) - Q^*_{m_l}(z) \right| + \max_{K^*_{k_0}} \left| Q_{k_l}(z) - \sum_{\nu=1}^{k_l} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z) \right| < \frac{2}{l} \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Daraus ergibt sich, dass die Polynomfolge $\left\{ \sum_{\nu=1}^{k_l} z^{q_\nu} \cdot P_\nu(z) \right\}_l$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

**<u>Umordnung in eine Potenzreihe</u>**

Ein Polynom $z^{q_{k-1}} \cdot P_{k-1}(z)$ enthält Potenzen von $z$, deren Exponenten zwischen $q_{k-1}$ und $q_{k-1} + g_{k-1} = p_k$ liegen.

Aus $p_k = q_{k-1} + g_{k-1} < \frac{q_k}{k} \leq q_k$ folgt, dass sich die Potenzen aufeinander folgender Polynome nicht überlappen. Daher erhalten wir dann die Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ durch formales Ordnen der Polynomenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^{q_k} \cdot P_k(z)$ nach steigenden $z$-Potenzen. Insbesondere gilt: $\sum_{n=1}^{k-1} z^{q_n} \cdot P_n(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n \cdot z^n = s_{p_k}(z)$.

Da die Potenzreihe keine Potenzen von $z$ enthält, deren Exponenten zwischen $p_k$ und $q_k$ liegen, und wegen $\frac{q_k}{p_k} \to \infty \quad (k \to \infty)$, besitzt sie reine Ostrowski-Lücken $\{p_k, q_k\}$.

Wir haben also gezeigt, dass $\{s_{p_k}(z)\}_k$ in $G$ kompakt gegen $f_0(z)$ und $\{s_{p_{k_l}}(z)\}_l$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

Da die Potenzreihe $f_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ reine Ostrowski-Lücken $\{p_k, q_k\}$ besitzt mit $\frac{q_k}{p_k} \to \infty \quad (k \to \infty)$, ist $f_0$ nach Satz 3.3 in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G^* \supset G$ holomorph und $\{s_{p_k}(z)\}$ konvergiert kompakt in $G^*$ gegen $f_0(z)$. Überdies ist $f_0$ über $G^*$ hinaus nicht analytisch fortsetzbar. Wir zeigen, dass $G^* = G$ gilt.

Wir nehmen an, es existieren ein $z_0 \in G^*$, $z_0 \in \partial G$ und für $r > 0$ ein Kreis $Z := \{z : |z - z_0| < r\} \subset G^*$, wobei $\{s_{p_k}(z)\}$ auf $Z$ kompakt gegen $f_0(z)$ konvergiert. Ferner sei $Z_0$ ein Kreis mit $\overline{Z_0} \subset Z \cap \overline{G}^c$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{p_{k_j}\}$, für die $\{s_{p_{k_j}}(z)\}$ auf $\overline{Z_0}$ gleichmäßig gegen $0$ konvergiert. Es muss also gelten: $f_0(z) \equiv 0$ in $Z_0$. Nach dem Identitätssatz ist dann $f_0(z) \equiv 0$ in $Z$ und folglich auch $f_0(z) \equiv 0$ in $G$.

Da aber $f_0(z) \not\equiv 0$ sein muss, folgt daraus, dass $G^* = G$ ist und damit $f_0$ genau in $G$ holomorph ist.

**<u>Die A-Transformierten</u>** $\sigma_n(z)$:

Wir bestimmen die $A$-Transformierten der Reihe $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$; diese sind gegeben durch $\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(z)$. Wir betrachten folgenden Ausdruck:

$$\sigma_{n_k}(z) - s_{p_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k\nu} \cdot (s_\nu(z) - s_{p_k}(z)) + s_{p_k}(z) \cdot (\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n_k\nu} - 1) =:$$

$$\sum\nolimits_1 \qquad + \qquad \sum\nolimits_2 .$$

Für alle $\nu$ mit $p_k \le \nu < q_k$ ist $s_\nu(z) = s_{p_k}(z)$, und es ergibt sich

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\nu=0}^{p_k-1} + \sum_{\nu=p_k}^{q_k-1} + \sum_{\nu=q_k}^{\infty} = \sum_{\nu=0}^{p_k-1} + \sum_{\nu=q_k}^{\infty} .$$

Es sei ein beliebiges $R \ge 1$ gegeben. Da $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ den Konvergenzradius $1$ hat, gilt nach Satz 2.1 für die Teilsummen $s_n(z)$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\max_{|z|\le R}|s_n(z)|\right]^{\frac{1}{n}} = R\,.$$

Daraus folgt mit einer geeigneten Konstante $M$

$$\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \;\le\; M\cdot(R+1)^\nu \qquad \text{für } \nu \ge q_k\,,$$

$$\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \;\le\; M\cdot(R+1)^{p_k} \qquad \text{für } \nu \le p_k$$

und

$$\max_{|z|\le R}\left|s_{p_k}(z)\right| \le M\cdot(R+1)^{p_k}\,.$$

Unter Berücksichtigung von (5.3) und (5.4) erhalten wir nun für $k \ge 1$:

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum_{\nu=0}^{p_k-1}\alpha_{n_k\nu}\cdot(s_\nu(z)-s_{p_k}(z))\right| \;\le\; \sum_{\nu=0}^{p_k-1}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \;\le$$

$$\le\; \sum_{\nu=0}^{p_k-1}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot M\cdot(R+1)^{p_k} \;\le\; M\cdot\left(\frac{R+1}{k}\right)^{p_k} \;\to\; 0 \qquad (k\to\infty)$$

und für $k \ge 2\cdot(R+1)$

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum_{\nu=q_k}^{\infty}\alpha_{n_k\nu}\cdot(s_\nu(z)-s_{p_k}(z))\right| \;\le\; \sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot\max_{|z|\le R}\left|s_\nu(z)-s_{p_k}(z)\right| \;\le$$

$$\le\; \sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left|\alpha_{n_k\nu}\right|\cdot M\cdot(R+1)^\nu \;\le\; M\cdot\sum_{\nu=q_k}^{\infty}\left(\frac{R+1}{k}\right)^\nu \;=$$

$$= M\cdot\left(\frac{R+1}{k}\right)^{q_k}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{R+1}{k}\right)^\nu \;\le M\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{q_k}\cdot 2 \;\to\; 0 \qquad (k\to\infty)\,.$$

Es ergibt sich also, dass $\sum_1$ in $|z| \le \mathrm{R}$ gleichmäßig gegen $0$ konvergiert.

Für $\sum_2$ gilt nach (5.3)

$$\max_{|z|\le R}\left|\sum\nolimits_2\right| \;\le\; \max_{|z|\le R}\left|s_{p_k}(z)\right|\cdot\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n_k\nu}-1\right| \;\le$$

$$\le M\cdot(R+1)^{p_k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{p_k} = M\cdot\left(\frac{R+1}{k}\right)^{p_k} \;\to\; 0 \qquad (k\to\infty)\,.$$

Es ergibt sich also, dass auch $\sum_2$ in $|z|\le R$ gleichmäßig gegen $0$ konvergiert.

Da $R\ge 1$ beliebig war, folgt, dass $\{\, s_{p_k}(z)\,\}$ und $\{\, \sigma_{n_k}(z)\,\}$ in $\mathbb{C}$ kompakt „äquikonvergent“ sind. Wegen der kompakten Konvergenz von $\{\, s_{p_k}(z)\,\}$ in $G$ gegen $f_0(z)$ und der gleichmäßigen Konvergenz von $\{\, s_{p_{k_l}}(z)\,\}$ in $K$ gegen $f(z)$ folgen nun die Behauptungen. □

# 6 Universalapproximation auf allgemeineren Mengen

Luh [9] zeigt die Existenz von Universalfunktionen im Einheitskreis und in Jordangebieten und überträgt diese Ergebnisse vermittels konformer Abbildungen auf allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$, die mehr als einen Randpunkt besitzen.
Dass sich auch Funktionenfolgen, im Speziellen die Teilsummenfolgen von Potenzreihen und Matrix-Transformierte von Potenzreihen, zur universellen Approximation holomorpher Funktionen eignen, zeigt Luh in [5]. Dieses Ergebnis wird von Otzen [22] verallgemeinert, indem er andere Bedingungen an die Matrix stellt, die zur Summation verwendet wird. Doch dürfen sowohl bei Luh als auch bei Otzen die kompakten Mengen, auf denen approximiert wird, keine Randpunkte des Einheitskreises enthalten. Wir haben mit Satz 5.3 Teil b) gezeigt, dass die kompakten Mengen, auf denen Matrix-Transformierte universelle Approximationseigenschaften aufweisen, Randpunkte des Einheitskreises enthalten dürfen. In diesem Kapitel zeigen wir nun, dass sich Matrix-Transformierte nicht nur auf kompakten Mengen zur universellen Approximation eignen, sondern auch auf offenen und messbaren Mengen.
Zunächst beweisen wir eine Aussage über die Approximation messbarer Funktionen.

**<u>Satz 6.1:</u>** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{ f_n \}$ eine Folge ganzer Funktionen mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem Kompaktum $K \in M(G)$ mit $K^o = \emptyset$ und jeder auf $K$ stetigen Funktion $\varphi$ existiert eine Folge $\{ n_k \}$ mit

$$f_{n_k}(z) \underset{K}{\rightrightarrows} \varphi(z).$$

Dann hat $\{ f_n \}$ auch folgende Eigenschaft:

Zu jeder messbaren Menge $S \subset G^c$ und jeder auf $S$ messbaren Funktion $f$ existiert eine Folge $\{ m_n \}$ mit

$$f_{m_n}(z) \to f(z) \quad \text{fast überall auf } S.$$

**<u>Bemerkung 6.1:</u>** Das Ergebnis gilt auch, wenn $K^o \neq \emptyset$ und $\varphi \in A(K)$ ist.

**<u>Beweis des Satzes:</u>**

1. Es seien eine messbare Menge $S \subset G^c$ und eine messbare Funktion $f$ auf $S$ gegeben. Die Funktion $g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in S \\ 0 & \text{falls } z \notin S \end{cases}$ ist messbar auf $\mathbb{C}$, und es genügt, $g$ auf $G^c$ fast überall zu approximieren.

   Es sei nach Satz 5.2 $\{ B_n \}$ eine Folge von Mengen $B_n \in M(G)$ mit $B_n \subset B_{n+1} \subset G^c$ für alle $n \in IN$ und $G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Wir wählen $R_n \in IN$, so dass $B_n \subset \{ z : |z| \le R_n \}$ und $R_n < R_{n+1}$ für alle $n \in IN$.

   Die Funktionen

$$g_n(z) := \begin{cases} g(z) & \text{falls } g(z) \in \mathbb{C} \\ n & \text{falls } g(z) = \infty \end{cases}$$

   sind messbar auf $B_n$ und nach dem Satz von Lusin (siehe [26], S. 55) gibt es eine messbare Menge $L_n^* \subset B_n$ mit $\mu(B_n \setminus L_n^*) \le \frac{1}{2^{n+1}}$ und eine auf $L_n^*$ stetige Funktion $\varphi_n$ mit $\varphi_n(z) = g_n(z)$ für alle $z \in L_n^*$.

   Die Menge

$$L_n := \{ z : z \in L_n^* \ , \ \mathrm{Re}(z) \notin \mathbb{Q} \ , \ \mathrm{Im}(z) \notin \mathbb{Q} \}$$

   hat keine inneren Punkte und erfüllt $\mu(L_n) = \mu(L_n^*)$. Da $L_n$ messbar ist, gibt es eine kompakte Menge $M_n \subset L_n$ mit $\mu(L_n \setminus M_n) \le \frac{1}{2^{n+2}}$. Das Komplement von $M_n$ hat die Darstellung $M_n^c = \bigcup_{j \in J_n} G_n^{(j)}$ mit einer höchstens abzählbaren Menge $J_n$ und paarweise disjunkten Gebieten $G_n^{(j)}$, den Komponenten von $M_n^c$. Wir wählen in jedem Gebiet $G_n^{(j)}$ einen Punkt

$$z_n^{(j)} = r_n^{(j)} \cdot e^{i \cdot \Theta_n^{(j)}} \in G_n^{(j)} \quad \text{mit} \quad r_n^{(j)} > 0 \ , \ \Theta_n^{(j)} \in IR$$

   und betrachten den Sektor

$$H_n^{(j)} := \{ z = z_n^{(j)} + \rho \cdot e^{i \cdot \Theta} : 0 < \rho < 2 \cdot R_n \ , \left| \Theta - \Theta_n^{(j)} \right| < \frac{1}{R_n^2 \cdot 2^{n+j+4}} \}.$$

   Für die Menge

$$K_n := B_n \cap \{ \bigcup_{j \in J_n} (G_n^{(j)} \cup H_n^{(j)}) \}^c$$

   gilt $K_n \in M(G)$ und $K_n \subset M_n \subset L_n$, so dass $K_n$ keine inneren Punkte besitzt.

Wir erhalten

$$\mu(M_n \setminus K_n) \le \mu(\bigcup_{j \in J_n} H_n^{(j)}) \le \frac{2}{2^{n+4}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Daher gilt

$$\mu(B_n \setminus K_n) \le \mu(B_n \setminus L_n^*) + \mu(L_n \setminus M_n) + \mu(M_n \setminus K_n) \le \frac{1}{2^n}.$$

Wir betrachten die messbare Menge

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=n}^{\infty} K_\nu .$$

Hierfür gilt

$$\mu(B_n \setminus E) \le \mu(\bigcup_{\nu=n}^{\infty} (B_\nu \setminus K_\nu)) \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

und es ergibt sich

$$\mu(G^c \setminus E) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n \setminus E) = 0 .$$

2. Aufgrund der Eigenschaften von $K_n$ ist $\varphi_n \in A(K_n)$ für alle $n \in IN$. Nach Satz 5.3 gibt es zu jedem $n \in IN$ einen Index $m_n \in IN$, so dass gilt

$$\max_{K_n} \left| f_{m_n}(z) - \varphi_n(z) \right| < \frac{1}{n}.$$

Es sei ein fester Punkt $z \in E$ gegeben; dann existiert ein $N_0$ mit $z \in K_n$ für alle $n \ge N_0$.

Ist $g(z) \ne \infty$, so ist $g(z) = g_n(z) = \varphi_n(z)$, und wir erhalten für alle $n \ge N_0$

$$\left| f_{m_n}(z) - g(z) \right| \le \max_{K_n} \left| f_{m_n}(z) - \varphi_n(z) \right| \le \frac{1}{n}.$$

Ist $g(z) = \infty$, so ist $g_n(z) = n$, und wir erhalten

$$\left| f_{m_n}(z) - g_n(z) \right| = \left| f_{m_n}(z) - n \right| \le \max_{K_n} \left| f_{m_n}(z) - \varphi_n(z) \right|,$$

woraus sich

$$\left| f_{m_n}(z) \right| \ge n - \max_{K_n} \left| f_{m_n}(z) - \varphi_n(z) \right| \ge n - \frac{1}{n}$$

ergibt. Also folgt

$$f_{m_n}(z) \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$f_{m_n}(z) \to g(z) \quad (n \to \infty) \text{ für alle } z \in E,$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Nun können wir die Existenz einer universellen Potenzreihe zeigen, deren Matrix-Transformierten nicht nur holomorphe Funktionen auf kompakten und offenen Mengen, sondern auch messbare Funktionen auf messbaren Mengen approximieren.

**<u>Satz 6.2:</u>** Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $ID \subset G$, $\overline{ID} \not\subset G$ und $A = (\alpha_{n\nu})$ eine Matrix, welche die Bedingungen (M1) – (M3) erfüllt. Dann gibt es eine genau in $G$ holomorphe Funktion $f_0$ mit $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$, für deren Teilsummen $s_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \cdot z^\mu$ Folgendes gilt:

a) Es existiert eine Folge $\{m_k\}_k$, so dass

$\sigma_{m_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{m_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ in $G$ kompakt gegen $f_0(z)$ konvergiert.

b) Zu jedem Kompaktum $K \in M(G)$ und zu jeder Funktion $g \in A(K)$ gibt es eine Teilfolge $\{p_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$\sigma_{p_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{p_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ auf $K$ gleichmäßig gegen $g(z)$ konvergiert.

c) Zu jeder offenen Menge $O \subset G^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und jeder auf $O$ holomorphen Funktion $h$ gibt es eine Teilfolge $\{q_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$\sigma_{q_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{q_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ in $O$ kompakt gegen $h(z)$ konvergiert.

d) Zu jeder messbaren Menge $S \subset G^c$ und jeder auf $S$ messbaren Funktion $w$ gibt es eine Teilfolge $\{t_k\}_k$ von $\{m_k\}_k$, so dass

$\sigma_{t_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{t_k\nu} \cdot s_\nu(z)$ auf $S$ fast überall gegen $w(z)$ konvergiert.

**Beweis:** Es sei $f_0$ die in Satz 5.3 konstruierte Funktion bezüglich $G$ und $A$ gegeben.

Die Potenzreihe von $f_0$ um den Nullpunkt sei $f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ .

1. Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus Satz 5.3
2. Es sei eine beliebige offene Menge $O \subset G^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und eine auf $O$ holomorphe Funktion $h$ gegeben. Mit einer Indexmenge $J = \{1,2,...\} \subset IN$ und paarweise disjunkten, einfach zusammenhängenden Gebieten $G_\nu \subset G^c$ kann $O$ folgendermaßen dargestellt werden: $O = \bigcup_{\nu \in J} G_\nu$ .

   Es sei $\varphi_\nu(z)$ eine konforme Abbildung von $ID$ auf $G_\nu$. Für $n \in IN$ und $\nu \in J$ sei $G_\nu^{(n)} := \varphi_\nu(\left\{ z : |z| < 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \right\}$. Dann ist $\{G_\nu^{(n)}\}$ eine Folge beschränkter Jordangebiete, die von innen heraus gegen $G_\nu$ konvergiert, denn es gilt:

   $$G_\nu^{(n)} \subset \overline{G_\nu^{(n)}} \subset G_\nu^{n+1} \subset G_\nu \ .$$

   Wir betrachten die Menge $K_n = \bigcup_{\substack{\nu \in J \\ \nu \le n}} \overline{G_\nu^{(n)}}$ ; dabei ist $K_n \in M(G)$ für alle $n \in IN$ .

   Durch wiederholte Anwendung von b) können wir eine Teilfolge $\{q_k\}_k$ von $\{p_k\}_k$ konstruieren, indem wir verlangen

   $$\max_{K_1} \left| \sigma_{q_1}(z) - h(z) \right| < 1 \ ,$$
   $$\vdots$$
   $$\max_{K_k} \left| \sigma_{q_k}(z) - h(z) \right| < \frac{1}{k} \ .$$

   Für jeden kompakten Teil $B$ von $O$ existiert ein $k_0 = k_0(B) \in IN$, so dass $B \subset K_k$ für alle $k \ge k_0$. Dann gilt für alle $k \ge k_0$:

   $$\max_B \left| \sigma_{q_k}(z) - h(z) \right| \le \max_{K_k} \left| \sigma_{q_k}(z) - h(z) \right| < \frac{1}{k}.$$

   Damit ist also c) bewiesen.

3. Da die Matrix-Transformierten $\sigma_{t_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{t_k \nu} \cdot s_\nu(z)$ ganze Funktionen sind, folgt die Behauptung d) direkt aus b) zusammen mit Satz 6.1. □

# 7 Universalität und Summierbarkeit von trigonometrischen Reihen

In Analogie zu Bernal-González, Calderón-Moreno und Luh ([11]) beweisen wir nun eine Aussage über die Eignung trigonometrischer Reihen zur Universalapproximation auf dem Rand des Einheitskreises $\partial ID$, betrachten aber im Unterschied zu oben genanntem Ergebnis eine Matrix, welche die Bedingungen (M1)–(M3) erfüllt. Es zeigt sich, dass sich die so gebildeten trigonometrischen Reihen auch zur Universalapproximation von stetigen und messbaren Funktionen auf dem Rand des Einheitskreises eignen.

**<u>Satz 7.1:</u>** Es sei $A = (\alpha_{n\nu})$ eine Matrix, welche die Bedingungen (M1) – (M3) erfüllt. Dann existiert eine trigonometrische Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \{\cos mt + i \cdot \sin mt\}$ mit $\overline{\lim_{m\to\infty}} |a_m|^{\frac{1}{m}} = 1$ und den Teilsummen $s_n(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m \{\cos mt + i \cdot \sin mt\}$, so dass für die Folge ihrer $A$-Transformierten $\sigma_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot s_\nu(t)$ gilt:

a) Zu jedem $K \subset \partial ID$, $K \neq \partial ID$ und jeder auf $K$ stetigen Funktion $f$ existiert eine Folge $\{n_k\}$, so dass gilt:

$$\sigma_{n_k}(z) \underset{K}{\Rightarrow} f(z).$$

b) Es seien zwei reellwertige, auf $[0,2\pi]$ messbare Funktionen $\varphi$ und $\psi$ gegeben. Dann existiert eine Folge $\{m_k\}$, so dass

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\sigma_{m_k}(t)\} &\to \varphi(t) \\ \mathrm{Im}\{\sigma_{m_k}(t)\} &\to \psi(t) \end{aligned}\right. \quad \text{fast überall auf } [0,2\pi].$$

**<u>Beweis:</u>** Betrachten wir die in Satz 6.2 konstruierte Potenzreihe $f_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot z^m$, wobei das einfach zusammenhängendes Gebiet $G$ der Einheitskreis $ID$ sein soll, und setzen $z = e^{it}$, so dass wir die (formale) trigonometrische Reihe

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \{\cos mt + i \cdot \sin mt\}$ erhalten. Hierbei gilt $\overline{\lim_{m\to\infty}} |a_m|^{\frac{1}{m}} = 1$, da $f_0$ den Konvergenzradius 1 besitzt.

1. Da jedes $K \subset \partial ID$, $K \neq \partial ID$ automatisch zu $M(ID)$ gehört, folgt mit Teil b) des Satzes 6.2 direkt das Teilergebnis a).

2. Nach dem Satz von Lusin (siehe [26], S. 55) existieren Folgen von reellwertigen und auf dem Intervall $[0,2\pi]$ stetigen Funktionen $\{\varphi_k\}$ und $\{\psi_k\}$ und eine Menge $E$ mit $\mu(E) = 2\pi$, so dass

$$\begin{array}{lcl} \varphi_k(t) & \to & \varphi(t) \\ \psi_k(t) & \to & \psi(t) \end{array} \quad \text{für } k \to \infty \text{ und alle } t \in E \ . \tag{7.1}$$

Für jedes $k \in IN$ betrachten wir die Menge $K_k := \left[\frac{1}{k},\ 2\pi - \frac{1}{k}\right]$ und die Funktion $g_k(t) := \varphi_k(t) + i \cdot \psi_k(t)$.

Für $t \in (0,2\pi)$ setzen wir $z := w(t) := e^{it}$. Dann ist $\tilde{K}_k := w(K_k)$ eine kompakte Menge auf $\partial ID \setminus \{1\}$, und die Funktion $\tilde{g}_k(z) := g_k(w^{-1}(z))$ ist stetig auf $\tilde{K}_k$.

Nach a) gibt es eine Folge $\{m_k\}$, so dass für die $A$-Transformierten der Potenzreihe gilt:

$$\max_{\tilde{K}_k} \left|\sigma_{m_k}(z) - \tilde{g}_k(z)\right| \ < \ \frac{1}{k},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{K_k} \left|\sigma_{m_k}(e^{it}) - g_k(t)\right| \ < \ \frac{1}{k} \ . \tag{7.2}$$

Es sei $t_0$ ein Punkt in $E \setminus \{0,2\pi\}$. Dann ist $t_0 \in K_k$, und wir erhalten mit (7.1) und (7.2), dass

$$\sigma_{m_k}(e^{it_0}) \ \to \ \varphi(t_0) + i \cdot \psi(t_0) \qquad (k \to \infty) \ .$$

Wegen $\mu(E \setminus \{0,2\pi\}) = 2\pi$ folgt die Aussage b). □

# Literaturverzeichnis


[1] Birkhoff, G. D.: Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473–475.

[2] Chui, C. K.; Parnes, M.N.: Approximation by overconvergence of a power series; J. Math. Anal. Appl. 36 (1971), 693–696.

[3] Ilieff, L.: Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

[4] Jentzsch, R.: Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen; Acta Mathematica 41 (1918), 219–251.

[5] Luh, W.: Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrixtransformierten; Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen, Heft 88 (1970).

[6] Luh, W.: Kompakte Summierbarkeit von Potenzreihen im Einheitskreis; Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 28 (1976), No. 1–2, 51–54.

[7] Luh, W.: Approximation by a universal entire function; Preprints Darmstadt 265 (1976), 1–3.

[8] Luh, W.: Über den Satz von Mergelyan; J. Approximation Theory 16 (1976), No. 2, 194–198

[9] Luh, W.: Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten; Aequationes Mathematicae 19 (1979), No. 1–2, 183–193.

[10] Luh, W.: Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets; Analysis 6 (1986), 191–207.

[11] Luh, W.; Bernal-Gonzáles, L.; Calderón-Moreno, M.C.: Universality and summability of trigonometric polynomials and trigonometric series; Per. Math. Hung. 46 (2) (2003), 119–133.

[12] Luh, W.; Trautner, R.: On the Hausdorff-overconvergence of power-series; Arch. Math. 30 (1978), 198–507.

[13] Luh, W.; Trautner, R.: Summierbarkeit der geometrischen Reihe auf vorgeschriebenen Mengen; Manuscripta Math. 18 (1976), No. 4, 317–326.

[14] Melas, A.; Nestoridis, V.: Universality of Taylor Series as a Generic Property of Holomorphic Functions; Adv. in Math. 157 (2001), 138–176.

[15] Menšov, D.E..: On the partial sums of trigonometric series; Mat.Sb. (N.S.). 20 (1947), 197–238 (in Russian).

[16] Mergelyan, S. N.: Uniform approximation of functions of a complex variable (Russian); Uspehi Matem. Nauk (N. S.) 7, no. 2 (48) (1952), 31–122. Übersetzung: Translations Amer. Math. Soc. 3 (1962), 294–391.

[17] Okada, Y.: Über die Annäherung analytischer Funktionen; Math. Z. 23 (1925), 62–71.

[18] Ostrowski, A.: Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten; S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) Phys.-Math. Kl. 1921, 557–565.

[19] Ostrowski, A.: Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen; Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1922), 327–350.

[20] Ostrowski, A.: Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen; S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) Phys.-Math. Kl. 1923, 185–192.

[21] Ostrowski, A.: Zur Theorie der Überkonvergenz; Math. Ann. 103 (1930), 15–27.

[22] Otzen, P.: Überkonvergenz bei Matrixtransfomierten von Potenzreihen; Fachbereich Mathematik der Universität Trier, Dissertation (1984).

[23] Pal, J.: Zwei kleine Bemerkungen; Tộhoku Math. Journal 6, 42–43.

[24] Peyerimhoff, A.: Lectures on summability (Lecture Notes in Mathematics; 107); Berlin, Heidelberg, New York 1969.

[25] Porter, M. B.: On the polynomial convergence of a power series; Ann. of Math. (2) 8 (1906–1907), 189–192.

[26] Rudin, W.: Real and complex analysis; 3rd edn., McGraw-Hill, New York 1987.

[27] Runge, C.: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen; Acta Mathematica vol. 6 (1885), 229–244.

[28] Seidel, W.; Walsh, J. L.: On approximation by euclidean and non-euclidean translation of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 916–920.

## Tabellarische Zusammenfassung des Bildungsweges

| | |
|---|---|
| Name | Rebecca Reis |
| Geburtstag | 15.05.1975 |
| Geburtsort | Trier |

| | |
|---|---|
| 1981 - 1985 | Grundschule Mertesdorf / Kasel in Kasel |
| 1985 - 1994 | Auguste-Viktoria-Gymnasium Trier |
| 10/1995 – 07/2000 | Studium der Mathematik und Philosophie für Lehramt an Gymnasien an der Universität Trier |
| 08/2000 – 01/2001 | Commerzbank International Luxembourg S.A. |
| 02/2001 – 06/2001 | Referendariat für Lehramt an Gymnasien am Staatlichen Studienseminar Trier |
| seit 07/2001 | Risikocontrolling Landesbank Rheinland-Pfalz International S.A. |