Bedingte Konvergenz stochastischer Prozesse

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der reinen Naturwissenschaften
am Fachbereich IV der Universität Trier

vorgelegt von
Dipl.math. Christian Scheer
aus Trier

Trier, Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Betrachtet man in der klassischen reellen Analysis Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen und bildet daraus Partialsummenfolgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so stellen sich grundsätzlich zwei Konvergenzbegriffe heraus. Man bezeichnet eine Partialsummenfolge, die wir den Gepflogenheiten nach als Reihe bezeichnen, als bedingt konvergent, falls es bijektive Abbildungen $\gamma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt, für die die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\gamma(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert und es mindestens eine konvergente Umordnung gibt. Die Abbildungen γ bezeichnen wir im folgenden als Umordnungen. Konvergiert hingegen eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ für jede Umordnung, so heißt sie bekanntlich unbedingt konvergent. Die unbedingt konvergenten Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ erweisen sich gerade als diejeinigen Reihen, für die absolute Konvergenz, d. h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, gilt. Betrachtet man Vektorreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^m$, so gelten analoge Beziehungen. Definiert man zu einer gegebenen Folge $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen die folgende Menge:

$$\Gamma_A := \left\{ s \in \mathbb{R} | \exists \text{ Umordnung } \gamma \text{ mit } s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\gamma(k)} \right\}$$

so gilt grundsätzlich: $\Gamma_A = \emptyset$ oder $\Gamma_A = \mathbb{R}$ oder $\operatorname{card}(\Gamma_A) = 1$. Diese Aussage ist unmittelbare Konsequenz des klassischen Riemann'schen Umordnungssatzes und gilt auch noch für Konvergenzmengen von Vektorreihen in endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Für den Nachweis benötigt man ein Resultat von Levy und Steinitz. In unendlich dimensionalen Vektorräumen sehen die Verhältnisse anders aus. Dies ist insofern nicht überraschend, da ein klassisches Resultat von Dvoretzky-Rogers belegt, dass in jedem Banachraum $(E, ||\cdot||_E)$ mit $\dim E = \infty$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existiert, für die die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ unbedingt, aber nicht absolut konvergiert. Resultate von Hadwiger und Mc Arthur belegen, dass es in Banachräumen $(E, ||\cdot||_E)$, $\dim E = \infty$, stets Vektorreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ gibt, die bedingt konvergieren (im Sinne von $||\cdot||_E$), für die aber $\operatorname{card}(\Gamma_A) = 1$ ist.

In nuklearen Räumen hingegen gelten andere Gesetzesmäßigkeiten. So zeigte Grothendiek, dass absolute und unbedingte Konvergenz von Vektorreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ in metrisierbaren nuklearen Räumen äquivalente Begriffsbildungen sind.

So gelten für die Konvergenzmenge Γ_A folgende Fälle: entweder $\Gamma_A = \emptyset$ oder Γ_A ist ein affiner Teilraum von E, oder es ist $\operatorname{card}(\Gamma_A) = 1$. Insbesondere ist $\operatorname{card}(\Gamma_A) = 1$ genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ unbedingt konvergiert (selbstverständlich im Sinne der zugrundeliegenden Metrik d, die auf E erklärt ist).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit folgendem Problemkreis: gegeben sei ein abstrakter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und darauf erklärt eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

skalarwertiger oder auch vektorwertiger Zufallsvariablen. Betrachtet man den Partialsummenprozeß $\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, der im Sinne einer Konvergenzart der Wahrscheinlichkeitstheorie konvergiert, ([P]-f.s. Konvergenz, P-stochastische Konvergenz, L^P-Konvergenz, etc.), und ordnet man die Zuwächse von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ um, so kann man sich die Frage stellen, ob $\left(\sum_{k=0}^{n} X_{\gamma(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dann immer noch im Sinne der jeweiligen Konvergenzart konvergiert.

Hat man die Begriffe bedingte, unbedingte und absolute Konvergenz (im Sinne der Konvergenzarten der Stochastik) präzisiert, kann man untersuchen, welche stochastische Struktur Γ_A besitzt. Es wird sich herauskristallisieren, dass die bedingte und unbedingte Konvergenz vor allem von der Abhängigkeitsstruktur der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und vom Zustandsraum des Prozesses $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gesteuert werden wird.

In der vorliegenden Arbeit werden Resultate für Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, Markovprozesse $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, Differenzenfolgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ asymptotischer Martingale, sowie Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ austauschbarer Zufallsvariablen vorgestellt. Darüber hinaus liegen Resultate für Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit bestimmten Mischungsbedingungen, sowie für Cesaro-Mittel vor.

Kapitel I

Allgemeine Begriffsbildungen und Hilfsresultate

Wir definieren zunächst einmal allgemeine Konvergenzbegriffe für Reihen in metrischen Räumen.

Definition 1:

Es sei $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und auf $\mathcal{X}$ sei eine Abbildung $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ erklärt, so dass $(\mathcal{X}, +)$ zu einer kommutativen Halbgruppe wird. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $(\mathcal{X}, d)$.

(1.) Die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k, n \in \mathbb{N}_0$. Den Gepflogenheiten der Analysis nach bezeichnen wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Reihe und verwenden das gewohnte Symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Hierbei sei betont, dass damit keine Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ gemeint ist.

(2.) $\mathcal{U}_{\mathbb{N}_0} := \{\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 | \gamma \text{ ist bijektiv}\}$

(3.) Mit $(s_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei die Folge der Partialsummen bezeichnet, welche durch $s_n^\gamma = \sum\limits_{k=0}^{n} x_{\gamma(k)}, n \in \mathbb{N}_0$, definiert ist. Hierbei sei $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$.

(4.) $\Gamma_A := \{s \in \mathcal{X} | \exists\, \gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0} \text{ mit } s = d - \lim\limits_{n\to\infty} s_n^\gamma\}$.

Definition 2:

Es gelten die Voraussetzungen von Definition 1.

(1.) Die mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ heißt unbedingt konvergent in $(\mathcal{X}, d)$, falls $\forall\, \gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ die Folgen $(s_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $(\mathcal{X}, d)$ konvergieren.

(2.) Die mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ heißt bedingt konvergent in $(\mathcal{X}, d)$, falls es $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $(s_n^{\gamma_1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und $(s_n^{\gamma_2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert.

(3.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ heiße konvergent mit unbedingter Summe, falls es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, für das $(s_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $(\mathcal{X}, d)$ konvergiert und für $\tilde{\gamma} \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$, mit $(s_n^{\tilde{\gamma}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, folgendes gilt: $d - \lim\limits_{n\to\infty} s_n^\gamma = d - \lim\limits_{n\to\infty} s_n^{\tilde{\gamma}}$.

(4.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ heiße konvergent mit bedingter Summe, falls es $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, für die $(s_n^{\gamma_1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie $(s_n^{\gamma_2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergieren und folgendes gilt: $d - \lim\limits_{n\to\infty} s_n^{\gamma_1} \neq d - \lim\limits_{n\to\infty} s_n^{\gamma_2}$.

(5.) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ heiße generell divergent, falls die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\gamma(n)}\ \forall\ \gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ divergieren.

Bemerkung:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ist somit konvergent mit unbedingter Summe, falls $|\Gamma_A| = 1$ ist.

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ist konvergent mit bedingter Summe, falls $|\Gamma_A| > 1$ ist.

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ kann, im Sinne der Definition 2, in ihrer speziell vorgegebenen Anordnung der Summanden divergieren, aber konvergente Umordnungen besitzen. Der Leser möge sich nicht davon verwirren lassen, dass somit eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergieren und gleichzeitig bedingt konvergent sein kann. Man muß im allgemeinen nicht voraussetzen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schon so angeordnet ist, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert.

Im folgenden definieren wir den Begriff der Netzreihe in metrischen Räumen mit kommutativer Halbgruppenstruktur bezüglich $+$.

Definition 3:

Es sei $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum mit der geforderten Eigenschaft und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{X}$.

(i) Mit $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0) = \{\mathcal{J} \subset \mathbb{N}_0 : |\mathcal{J}| < +\infty\}$ ist $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ vermöge der Mengeninklusion auf $\mathbb{N}_0$ halbgeordnet und gerichtet, d. h. $\forall\ \mathcal{J}, \mathcal{J}' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0) \exists\ \mathcal{J}'' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ mit $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}''$ und $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}''$.

(ii) Es sei M eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow \mathcal{X}$ heißt Netz. Wir verwenden die Schreibweise $(x_k)_{k\in M}$, wobei $x_k = f(k)$ sei.

(iii) Es sei für $\mathcal{J} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ $y_{\mathcal{J}} := \sum_{k\in\mathcal{J}} x_k$. Dann heiße $(y_{\mathcal{J}})_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ Netzreihe.

(iv) Ein Netz $(x_k)_{k\in M}$ heiße Cauchy-Netz, falls $\forall\ \varepsilon > 0$ es ein $k_0(\varepsilon) \in M$ gibt, mit $d(x_k, x_{k_0}) < \varepsilon\ \forall\ k \geq k_0(\varepsilon)$.

Definition 4:

Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus E, so heiße $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||$ konvergiert, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n|| < +\infty$ gilt.

Satz 1
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in E. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ist unbedingt konvergent in $(E, ||\cdot||)$.

(2.) $\forall$ Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_{n_k}$ konvergiert in $(E, ||\cdot||)$.

(3.) $\forall$ Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ konvergiert in $(E, ||\cdot||)$.

(4.) Die Netzreihe $\left(\sum\limits_{k\in\mathcal{J}} x_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiert in $(E, ||\cdot||)$.

Dieser Satz ist bequem anwendbar auf die Situation der L^P-Konvergenz stochastischer Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathcal{L}^P(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei $1 \leq p < +\infty$.

Satz 2
Es sei $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und $(\mathcal{X}, +)$ eine kommutative Halbgruppe. Es sei $(\sum\limits_{k\in J} x_k)_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ eine Netzreihe in $(\mathcal{X}, d)$. Dann gilt:

Konvergenz von $(\sum\limits_{k\in J} x_k)_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)} \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ist unbedingt konvergent.

Beweis:

(i) Es sei $\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung und $C_n := \{0, 1, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}_0$. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ $\exists\, m = m(n) \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\gamma(C_m) \supset C_n$, da γ bijektiv ist.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \mathcal{J}_\varepsilon$ mit $d(y_\mathcal{J}, y) < \varepsilon$ für $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_\varepsilon$ (hierbei sei $y := \lim\limits_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)} y_\mathcal{J}$). Mit $n_\varepsilon := \max(\mathcal{J}_\varepsilon)$ gilt daher: $d(y_\mathcal{J}, y) < \varepsilon$ für $\mathcal{J} \supset C_{n_\varepsilon}$. Wählt man m_ε zu n_ε gemäß (i), beachte $y_{C_{m_\varepsilon}} = \sum\limits_{k=0}^{m_\varepsilon} x_{\gamma(k)}$, so folgt $d\Big(\sum\limits_{k=0}^{\ell} x_{\gamma(k)}, y\Big) < \varepsilon$ für $\ell \geq m_\varepsilon$.

(iii) Angenommen, das Netz $(y_\mathcal{J})_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiere nicht in der Metrik d. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Mengen, card $(\mathcal{J}_n) < +\infty$, so dass $(y_{\mathcal{J}_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert. Die Abbildung $\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ sei wie folgt definiert: Für diese aufsteigende Folge $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Teilmengen in $\mathbb{N}_0$, card $(\mathcal{J}_n) < +\infty, p_n :=$ min $\mathcal{J}_n, q_n :=$ max $\mathcal{J}_n$, bilde γ die Menge $\{j \in \mathbb{N}_0 | p_n \leq j \leq q_n\}$ so auf sich ab, dass $\gamma^{-1}(\mathcal{J}_n) = \{p_n, \ldots, p_n + k\}$ mit $k =$ card $(\mathcal{J}_n)$. Auf $\mathbb{N}_0 \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \{j \in \mathbb{N}_0 | p_k \leq j \leq q_k\}$ sei $\gamma(j) := j$.

Somit ist $\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{\gamma(n)}$ divergiert nach Konstruktion.
Aus (ii) und (iii) erhalten wir die Behauptung. $\square$

Satz 3
Es sei $(\mathcal{X}, d)$ *ein metrischer Raum und* $(\mathcal{X}, +)$ *eine kommutative Halbgruppe. Es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge in* $(\mathcal{X}, d)$*. Es gelten folgende Aussagen:*

(1.) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *mit bedingter Summe, so ist diese bedingt konvergent.*

(2.) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *unbedingt, so schon mit unbedingter Summe.*

Beweis:
(2.) ist unmittelbare Konsequenz der Aussage (1.). Somit genügt es (1.) zu verifizieren. Es sei o.B.d.A die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ schon konvergent.

Bezeichnen wir mit s den Limes der Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ mit bedingter Summe: $\exists\ g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{g(n)}$ konvergent. Bezeichnen wir diesen Limes mit s', so gilt: $d(s, s') = \eta > 0$. Nun können wir eine bijektive Abbildung $\tilde{g} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definieren, für die die Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_{\tilde{g}(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert. Diese konstruiert man folgendermaßen:

Zu $\varepsilon_1 > 0\ \exists\ N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}_0$ mit $d\left(\sum\limits_{k=0}^{N(\varepsilon_1)} x_k, s\right) < \varepsilon_1$.
Wir definieren $\tilde{g}(j) := j\ \forall\ j = 0, \ldots, N_1(\varepsilon_1)$.

Da $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung ist, folgt die Existenz eines $M_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}_0$ mit $\{0, \ldots, N_1(\varepsilon)\} \subset \{g(0), \ldots, g(M_1(\varepsilon_1))\}$ und wegen der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{g(n)}$ kann man dieses $M_1(\varepsilon_1)$ so wählen, dass $d\left(\sum\limits_{k=0}^{M_1(\varepsilon_1)} x_{g(k)}, s'\right) < \varepsilon_1$ ist.

$\tilde{g}(j) := g(j)\ \forall\ j > N_1(\varepsilon_1)$ mit $g(j) \in \{g(0), \ldots, g(M_1(\varepsilon_1))\}$.

$\Longrightarrow d\left(\sum\limits_{k=0}^{M_1(\varepsilon_1)} x_{\tilde{g}(k)}, s'\right) < \varepsilon_1$. Es sei nun $\varepsilon_2 > 0$ mit $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

$\Longrightarrow\ \exists\ N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N}_0$ mit $\{\tilde{g}(0), \ldots, \tilde{g}(M_1(\varepsilon))\} \subset \{0, 1, \ldots, N_2(\varepsilon_2)\}$ und $d\left(\sum\limits_{k=0}^{N_2(\varepsilon_2)} x_k, s\right)$ $< \varepsilon_2$

Definieren wir nun $\tilde{g}(j) := j\ \forall\ j > \tilde{g}(M_1(\varepsilon_1))$. Da $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv ist und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{g(n)}$ konvergiert $\exists\ M_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N}_0$ mit $\{0, \ldots, N_2(\varepsilon_2)\} \subset \{g(0), \ldots, g(M_2(\varepsilon_2))\}$ und es gilt : $d\left(\sum\limits_{k=0}^{M_2(\varepsilon_2)} x_{g(k)}, s'\right) < \varepsilon_2$.

Definieren wir $\tilde{g}(j) := g(j)\ \forall\ j > N_2(\varepsilon_2)$ mit $g(j) \in \{g(0), \ldots, g(M_2(\varepsilon_2))\}$ $\Longrightarrow$

$d\left(\sum_{k=0}^{M_2(\varepsilon_2)} x_{\tilde{g}(k)}, s'\right) < \varepsilon_2$. Wir können somit zu einer monotonen Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bijektive Abbildung $\tilde{g} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und Folgen $\{N_k(\varepsilon_k)\}_{k\in\mathbb{N}}, \{M_k(\varepsilon_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren, für die gilt: $d\left(\sum_{k=0}^{N_k(\varepsilon_k)} x_{\tilde{g}(k)}, s\right) < \varepsilon_k$ und $d\left(\sum_{k=0}^{M_k(\varepsilon_k)} x_{\tilde{g}(k)}, s'\right) < \varepsilon_k \;\forall\; k$.

$\Longrightarrow\; \exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{N_k(\varepsilon_k)} x_{\tilde{g}(k)} = s$ und $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{M_k(\varepsilon_k)} x_{\tilde{g}(k)} = s'$.

Da $d(s, s') = \eta > 0$ ist, folgt somit die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\tilde{g}(n)}$.

$\Longrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert bedingt.

$\square$

Aus der Konvergenz mit unbedingter Summe folgt im allgemeinen nicht die unbedingte Konvergenz. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ in einem vollständigen linearen metrischen Raum kann bedingt konvergieren, ohne mit bedingter Summe zu konvergieren. Auf diese Problematik hat bereits Hadwiger(25) hingewiesen und Beispiele in unendlich dimensionalen Hilberträumen angegeben. Bei der Untersuchung der Konvergenz stochastischer Prozesse werden wir diese Begriffsbildungen genauer untersuchen. Dabei ergeben sich verschiedene Resultate, und es stellt sich heraus, dass die Art der bedingten Konvergenz von der Abhängigkeitsstruktur der Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eines Partialsummenprozesses abhängen wird.

Kapitel II

Folgen unabhängiger Zufallsvariablen und bedingte Konvergenz

In diesem Kapitel studieren wir das Verhalten stochastischer Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ von Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zunächst einmal untersuchen wir entsprechende Sachverhalte für reellwertige Zufallsvariablen. Anschließend grenzen wir die Situation zu unendlich dimensionalen Hilberträumen ab.

Definition 5: (Banachraumwertige Zufallsvariablen)

Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum.

(i) Unter einer Zufallsvariablen X mit Werten in E verstehen wir eine Bochner-messbare Abbildung. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \longrightarrow E$ eine Abbildung. Eine messbare Treppenfunktion $X : \Omega \longrightarrow E$ ist eine von der Form $X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}(\omega)x_j,\ \ A_j \in \mathcal{F},\ \ x_j \in E$. Eine Zufallsvariable X mit Werten in E ist der $[P]$-f.s. Limes einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Treppenfunktionen.

(ii) Der Erwartungswert einer messbaren Treppenfunktion X ist definiert durch $EX := \sum_{j=1}^{n} x_j P(A_j)$

(iii) X heißt Bochner-integrierbar, falls $E[||X||] < +\infty . ||X||_{L_1} := E[||X||]$ heißt Bochner-Norm.

(iv) Ist X Bochner-integrierbar, so ist die approximierende Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Treppenfunktionen so wählbar, dass $E[||X_n - X||] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. Das Bochner-Integral wird definiert durch $E[X] := \lim_{n\to\infty} E[X_n]$.

(v) Die Varianz einer Bochner-messbaren Abbildung X ist definiert, falls $E[||X||^2] < +\infty$ gilt.
$$Var[X] := E[||X - EX||^2]$$

Bemerkung:
Es seien X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in einem Hilbertraum $(H, <;>)$. Es gelte $E[||X||^2] < +\infty, E[||Y||^2] < +\infty$

$\Longrightarrow\ E[< X, Y >] =< EX, EY >$ und $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Definition 6:

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable und $c > 0$.Wir definieren
$X^c := X\mathbb{1}_{\{|X|\le c\}}$.

Bemerkung:

Aufgrund der Metrisierbarkeit der P-stochastischen Konvergenz und der L^P-Konvergenz ($1 \leq p < +\infty$) von Folgen von Zufallsvariablen sind die bedingte und unbedingte P-stochastische (L^p-)Konvergenz von Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ von Zufallsvariablen, sowie die Konvergenz mit unbedingter bzw. bedingter Summe schon durch Definition 2 aus Kapitel I erklärt.

Hinsichtlich der $[P]$-f.s. Konvergenz von Partialsummenprozessen $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ führen wir folgende Definitionen ein.

Definition 7:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein darauf definierter stochastischer Prozeß mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||)$.

(1.) Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ heißt unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergent, falls jede Umordnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ $[P]$-f.s. konvergiert.

(2.) Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ heißt bedingt $[P]^*$-f.s. konvergent, falls sie nicht unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert und es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ $[P]$-f.s. konvergiert.

(3.) Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ heißt $[P]^*$-f.s. konvergent mit unbedingter Summe, falls es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ $[P]$-f.s. konvergiert und jede $[P]$-f.s. konvergente Umordnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_1(n)}$ die Eigenschaft besitzt:
$P\Big(\Big\{\Big|\Big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_1(n)}\Big|\Big| > 0\Big\}\Big) = 0$

(4.) Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ heißt $[P]^*$-f.s. konvergent mit bedingter Summe, falls es $[P]$-f.s. konvergente Umordnungen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_1(n)}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_2(n)}$ gibt mit $P\Big(\Big\{\Big|\Big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_1(n)} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma_2(n)}\Big|\Big| > 0\Big\}\Big) > 0.$

(5.) Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ heiße absolut $[P]$-f.s. konvergent, falls die reellwertige Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||X_n||$ $[P]$-f.s. konvergiert.

(6.) Das Netz $\Big(\sum\limits_{k \in \mathcal{J}} X_k\Big)_{\mathcal{J} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ heiße $[P]$-f.s. konvergent, falls es ein $N \in \mathcal{F}$ mit $P(N) = 0$ so gibt, dass $\forall\, \omega \in N^c : \Big(\sum\limits_{k \in \mathcal{J}} X_k(\omega)\Big)_{\mathcal{J} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiert in $(E, ||\cdot||)$.

Bemerkungen:

(1.) In der obigen Definition der unbedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz beachte man, dass die Nullmenge N, auf der die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ punktweise divergiert, von γ abhängen kann. Somit ist eine unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ nicht notwendig absolut $[P]$-f.s. konvergent. Dies illustriert folgendes Beispiel: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $P(\{X_1 = 1\}) = P(\{X_1 = -1\}) = \frac{1}{2}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. gemäß dem klassischen Zwei-Reihen-Satz. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{X_n}{n}\right|$ divergiert $[P]$-f.s., denn $P\left(\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{X_n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right\}\right) = 1$. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ <u>nicht</u> absolut $[P]$-f.s. . Im Gegensatz zu Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ deterministischer Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}$, sind die absolute $[P]$-f.s. Konvergenz und die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz keine äquivalenten Begriffsbildungen im Sinne der obigen Definition.

(2.) Man könnte den Begriff der unbedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz auch folgendermaßen definieren:
$\exists\ N \in \mathcal{F}$ mit $P(N) = 0\ \forall\ \omega \in N^c$ konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega)$ unbedingt. In diesem Fall wären absolute $[P]$-f.s. und unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz stochastischer Reihen mit Werten in endlich dimensionalen Banachräumen $(E, ||\cdot||)$ äquivalente Begriffsbildungen. Die Forderung der Existenz einer von γ unabhängigen Nullmenge ist zu einschränkend, wie das Beispiel in (1.) belegt. Daher führten wir den Begriff der unbedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz gemäß der obigen Definition ein.

(3.) Der Begriff der bedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz einer stochastischen Reihe im Sinne der obigen Definition hat zur Konsequenz, dass nicht jede bedingt $[P]^*$-f.s. konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ von Zufallsvariablen mit bedingter Summe konvergieren muß. Es gilt somit <u>kein</u> Riemann'scher Umordnungssatz (vgl. Kapitel V). Es stellt sich allerdings heraus, dass für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in einem endlich dimensionalen Banachraum $(E, ||\cdot||)$ die bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz und die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe äquivalente Begriffsbildungen sind.

(4.) Im Beispiel aus (1.) gilt für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{n}$ ist eine bedingt konvergente Reihe, die wegen des Riemann'schen Umordnungssatzes bedingter Summe konvergiert. D. h. man kann zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $\gamma_s : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ finden, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{\gamma_s(n)}(\omega)}{\gamma_s(n)} = s$ gilt. Trotzdem gilt:

(*) $P\left(\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_{\gamma(n)}}{\gamma(n)}\right\}\right)=1\;\forall\;\gamma\in\mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$. Darüber hinaus konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}$ unbedingt im L^2-Sinn und daher unbedingt P-stochastisch. Es scheint daher geeigneter, diese Reihe als eine unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergente stochastische Reihe zu bezeichnen, was grundsätzlich möglich ist, falls die Divergenzmengen der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n(\omega),\omega\in\Omega$ mit der Abbildung $\gamma\in\mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ variieren dürfen.

Hilfsüberlegung 1:
Es sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in einem Banachraum $(E,||\cdot||)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n$ konvergiert absolut $[P]$-f.s. .

(2.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n$ konvergiert absolut P-stochastisch.

Beweis:

(i) Aus der absoluten $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n$ folgt trivialerweise die absolute P-stochastische Konvergenz derselbigen.

(ii) Es konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n$ absolut P-stochastisch. Dann folgt: $\forall\;\varepsilon>0\;\exists\;N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_0\;\forall\;n,m\geq N(\varepsilon)$ mit $n>m$ gilt $P\left(\left\{\sum\limits_{k=m}^{n}||X_k||\geq\varepsilon\right\}\right)<\varepsilon$.

$\Longrightarrow P\left(\left\{\max\limits_{m\leq j\leq n}\sum\limits_{k=m}^{j}||X_k||\geq\varepsilon\right\}\right)=P\left(\left\{\sum\limits_{k=m}^{n}||X_k||\geq\varepsilon\right\}\right)<\varepsilon\,\forall\,n,m\geq N(\varepsilon)$

$\Longrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}||X_n||$ konvergiert $[P]$-f.s. $\Longrightarrow$ (1.).

Satz 4
Es sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in einem endlich-dimensionalen Banachraum $(E,||\cdot||)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X_n$ konvergiert absolut P-stochastisch.

(2.) Das Netz $\left(\sum\limits_{k\in\mathcal{J}}X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiert $[P]$-f.s..

Beweis:
Das Netz $\left\{\sum\limits_{k\in\mathcal{J}}X_k\right\}_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiere $[P]$-f.s.

$$\iff \exists\, N \in \mathcal{F} \text{ mit } P(N) = 0\ \forall\, \omega \in N^c : \left\{ \sum_{k\in\mathcal{J}} X_k(\omega) \right\}_{k\in\mathcal{J}} \text{ konvergiert in } (E, ||\cdot||)$$

$$\overset{\text{Satz 2}}{\iff} \forall\, \omega \in N^c : \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) \text{ konvergiert unbedingt in } (E, ||\cdot||)$$

$$\overset{(+)}{\iff} \forall\, \omega \in N^c : \sum_{n=0}^{\infty} ||X_n(\omega)|| < +\infty, (+)(E, ||\cdot||) \text{ ist endlichdimensional}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} ||X_n|| < +\infty\ [P]\text{−f.s.} \quad \overset{\text{Hilfsüberlegung}}{\iff} \quad (1.). \qquad \square$$

Bemerkungen:

(1.) Ist der zugrundeliegende Banachraum $(E, ||\cdot||)$ nicht endlichdimensional, so ist die Implikation (2.) $\Longrightarrow$ (1.) im allgemeinen falsch.

(2.) Konvergiert ein Netz $\left(\sum_{k\in\mathcal{J}} X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ $[P]$-f.s., so folgt immer die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz. Die umgekehrte Implikation hingegen ist im allgemeinen falsch. Aus der absoluten $[P]$-f.s. Konvergenz folgt immer $[P]$-fast sichere Netzkonvergenz.

Hilfsüberlegung 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, so dass die $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängig sind. Dann gilt:

Das Netz $\left(\sum_{k\in\mathcal{J}} X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiert $[P]$-f.s. genau dann, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$ und $\sum_{n=0}^{\infty} E|X_n^c|$ konvergieren.

Bemerkung:
Existiert ein $c > 0$ so, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$ und $\sum_{n=0}^{\infty} E|X_n^c|$ konvergieren, folgt auch in der Situation stochastisch abhängiger $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die $[P]$-f.s. Konvergenz des Netzes $\left(\sum_{k\in\mathcal{J}} X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$. Notwendig ist das Kriterium allerdings im allgemeinen nicht.

Beweis:

(1.) Es konvergiere das Netz $\left(\sum_{k\in\mathcal{J}} X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ $[P]$-f.s.

$\overset{\text{Satz (4)}}{\iff}$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert absolut P-stochastisch.

$\overset{\text{Hilfsüberlegung 1}}{\iff}$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |X_n|$ konvergiert $[P]$-f.s..

Die Folge $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach Voraussetzung stochastisch unabhängig. Somit folgt unter Verwendung des Kolmogoroff'schen Drei-Reihen-Satzes (Satz 6):

$\exists\, c > 0$ so, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{|X_n| > c\}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E|X_n^c|$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Var}|X_n^c|$ konvergieren.

(2.) Es mögen die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{|X_n| > c\}$, sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E|X_n^c|$ konvergieren. Zunächst einmal folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz die absolut $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^c$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{|X_n| > c\} < +\infty$, folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ absolut $[P]$-f.s. und somit absolut P-stochastisch konvergiert.

$\overset{\text{Satz (4)}}{\Longleftrightarrow}$ Das Netz $\left(\sum\limits_{k\in\mathcal{J}} X_k\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ konvergiert $[P]$-f.s. $\square$

Beispiel:
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.i.v Zufallsvariablen mit $P(\{X_1 = 1\}) = P(\{X_1 = -1\}) = \frac{1}{2}$, so ist die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergent (vgl.(1.)auf Seite 10).
Allerdings existiert kein $c > 0$, so dass die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq c\right\}\right)$ sowie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E\left|\left(\frac{X_n}{n}\right)^c\right|$ simultan konvergieren. Die Hilfsüberlegungen in Verbindung mit dem Kolmogoroff'schen $0-1-$Gesetz liefern somit:
Das Netz $\left(\sum\limits_{n\in\mathcal{J}} \frac{X_n}{n}\right)_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ divergiert $[P]$-f.s. .

Definition 8:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von ZV mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||)$. Betrachten wir die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ und bezeichnen mit A die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so sei Γ_A die Familie aller Zufallsvariablen, die als Grenzvariablen einer geeigneten $[P]$-f.s. konvergenten Umordnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ (oder auch im Sinne der P-stochastischen, oder L^P-Konvergenz) entstehen.

Satz 5
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit Werten in E. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1.) Der Prozeß $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert unbedingt P-stochastisch.

(2.) $\forall$ Teilfolgen $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} X_{n_k}$ konvergiert P-stochastisch.

(3.) $\forall$ Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1, 1\}$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X_n$ konvergiert P-stochastisch.

(4.) Das Netz $\left\{\sum\limits_{k\in\mathcal{J}} X_k\right\}_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)}$ *konvergiert P-stochastisch.*

Beweis:

(0.) Betrachten wir $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F},P)$, den linearen Raum Banachraumwertiger Zufallsvariablen, und definieren $\Theta(\Omega,\mathcal{F},P)$ über:

$$\forall\, X,Y\in\Theta(\Omega,\mathcal{F},P) \text{ gilt } P(\{||X-Y||>0\})=0.$$

Mit $\mathcal{M}_0(\Omega,\mathcal{F},P)$ sei der Quotientenraum $\frac{\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F},P)}{\Theta(\Omega,\mathcal{F},P)}$ bezeichnet.
Auf $\mathcal{M}_0$ wird durch $d(X,Y):=E[\min(1,||X-Y||)]$ eine vollständige Metrik definiert, so dass $(\mathcal{M}_0,d)$ zu einem vollständigen linearen metrischen Raum wird. Ferner konvergiert eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ P-stochastisch gegen X genau dann, wenn $d(X_n,X)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ konvergiert.

(i) Aus einem Satz von Orlicz folgt die Äquivalenz von (1.) und (2.). [Fundamenta Mathematica Band II,Seite 5]

(ii) Es sei (2.) erfüllt. Ferner sei $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit Werten in $\{-1,1\}$. Mit $M:=\{j\in\mathbb{N}_0|\varepsilon_j=-1\}$ und $N:=\{j\in\mathbb{N}_0|\varepsilon_j=1\}$ sind Teilmengen aus $\mathbb{N}_0$ definiert, wobei mindestens eine der beiden Mengen unendlich ist. Die Abbildung $\gamma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ sei durch Abzählung von M in natürlicher Reihenfolge definiert. $\gamma(0):=\min M$; sind $\gamma(0),\dots,\gamma(p)$ schon definiert, so setze man $\gamma(p+1):=\min\{k\in M|k>\gamma(p)\}$. Somit ist $\gamma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ streng isoton. Aus (2.) folgt somit die P-stochastische Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$.

Ist N ebenfalls unendlich, definiert man analog eine strikt isotone Abbildung $\tilde{\gamma}:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$. Aus der P-stochastischen Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\tilde{\gamma}(n)}$ folgt die P-stochastische Konvergenz der Reihe
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n X_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\tilde{\gamma}(n)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$.

(iii) Es sei (3.) erfüllt. Es sei $\gamma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ eine streng isotone Abbildung. Man definiert Folgen $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0},\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ durch:

$$\begin{array}{ll} \mu_j=1,\quad \nu_j=1 & \forall\, j\in\gamma(\mathbb{N}_0)\\ \mu_j=1,\quad \nu_j=-1 & \forall\, j\in\mathbb{N}_0\backslash\gamma(\mathbb{N}_0)\end{array}$$

Es sei $\varepsilon>0$ festgewählt $\overset{(\text{iii.})(0.)}{\Longrightarrow}\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}_0$, so, dass $\forall\, k,\ell\geq N_\varepsilon$ gilt:

$$d\Big(\sum_{j=0}^{k+\ell}\mu_j X_j,\sum_{j=0}^{k}\mu_j X_j\Big)<\varepsilon \text{ und } d\Big(\sum_{j=0}^{k+\ell}\nu_j X_j,\sum_{j=0}^{k}\nu_j X_j\Big)<\varepsilon.$$

Man kann $k\in\mathbb{N}_0$ so groß wählen, dass $\gamma(k+1)\geq N_\varepsilon$ gilt. Für $\ell\in\mathbb{N}$ definiert man $M(k,\ell):=\{p\in\mathbb{N}_0|\gamma(k+1)\leq p\leq\gamma(k+\ell)\}$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \sum_{j=k+1}^{k+\ell} X_{\gamma(j)} = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{j\in M(k,\ell)} \mu_j X_j + \sum_{j\in M(k,\ell)} \nu_j X_j \Big) \ \text{ und es gilt:} \\
& d\Big(\sum_{j=0}^{k+\ell} X_{\gamma(j)}, \sum_{j=0}^{k} X_{\gamma(j)} \Big) \overset{\text{Def.}}{=} E\Big[\min\Big(1, || \sum_{j=k+1}^{k+\ell} X_{\gamma(j)} || \Big)\Big] \\
= \quad & E\Big[\min\Big(1, ||\tfrac{1}{2} \sum_{j\in M(k,\ell)} \mu_j X_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j\in M(k,\ell)} \nu_j X_j ||\Big)\Big] \\
\leq \quad & E\Big[\min\Big(1, || \sum_{j\in M(k,\ell)} \mu_j X_j ||\Big)\Big] + E\Big[\min\Big(1, || \sum_{j\in M(k,\ell)} \nu_j X_j ||\Big)\Big] \\
= \quad & d\Big(\sum_{j=0}^{k+\ell} \mu_j X_j, \sum_{j=0}^{k} \mu_j X_j \Big) + d\Big(\sum_{j=0}^{k+\ell} \nu_j X_j, \sum_{j=0}^{k} \nu_j X_j \Big) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $(\mathcal{M}_0, d)$ vollständig ist, folgt mit (0.) die P-stochastische Konvergenz der Teilreihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$.

(iv) vgl. Satz 2 in Kapitel I, auf Seite 5. □

Satz 6 *(Kolmogoroff'scher Dreireihensatz)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen reellwertigen Zufallsvariablen. Ein notwendiges Kriterium für die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ ist die Bedingung:

$(*)$ $\forall\, c > 0$ *konvergieren die Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} E(X_n^c), \sum_{n=0}^{\infty} Var(X_n^c)$ *sowie* $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$.

Hinreichend für die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ ist die Konvergenz der drei Reihen in $(*)$ für mindestens ein $c > 0$.

Satz 7 *(Egoroff-Theorem)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Konvergiert $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}[P]$-f.s., so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $B_\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit $P(B_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, die folgende Bedingung erfüllt: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gleichmäßig auf B_ε.

Satz 8 *(Lévy)*
Ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellwertigen unabhängigen Zufallsvariablen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n[P]$-f.s. genau dann, wenn sie schwach konvergiert.

Mit den bereitgestellten Begriffen und Hilfsmitteln sind wir in der Lage, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 9
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reellwertiger unabhängiger Zufallsvariablen. Es gelten folgende Aussagen:

(1.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn sie $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergiert.

(2.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn sie $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe konvergiert.

(3.) In der Situation (1.) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beweis:
Da die Eigenschaft der Unabhängigkeit umordnungsinvariant ist, nehmen wir o.b.d.A. an, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ schon $[P]$-f.s. konvergiert.
Die Aussage (2.) ist unmittelbare Konsequenz der Aussage (1.). Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ eine $[P]^*$-f.s. konvergente Reihe, die bedingter Summe konvergiert, so folgt die P-stochastische Konvergenz mit bedingter Summe.

$\overset{\text{Satz 3}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt P-stochastisch.

$\overset{\text{Satz 8}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt $[P]^*$-f.s.

Es konvergiere die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n[P]^*$-f.s. bedingt.

$\overset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} \forall\, c > 0$ konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E(X_n^c)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var(X_n^c)$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$.

Aus der bedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz folgt die Existenz einer Abbildung $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$, für die die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{g(n)}$ nicht $[P]$-f.s. konvergiert. Die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und somit auch die Folge $\{X_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Aus dem Kolmogoroff'schen $0-1-$Gesetz folgt somit die $[P]$-f.s. Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{g(n)}$.

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var(X_n^c)$ sind trivialerweise absolut und somit unbedingt konvergent $\forall\, c > 0$.

$\Longrightarrow\ \exists\, c > 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E(X_n^c)$ bedingt konvergiert.

Die Folge $\{X_n^c\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge gleichmäßig stochastisch beschränkter, unabhängiger Zufallsvariablen. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E(X_n^c)$ konvergiert mit bedingter Summe gemäß dem Riemann'schen Umordnungssatzes. Somit folgt aus dem Zwei-Reihen-Satz die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^c$.

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert $[P]$-f.s. $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^c$ konvergiert $[P]$-f.s. .Mit Satz 7 erhalten wir: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit $P(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, so dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf A_ε in ω konvergiert.

Wählt man $0 < \varepsilon < c \Longrightarrow \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq N_\varepsilon : X_n = X_n^c$ auf A_ε $[P]$-f.s.

$\Longrightarrow\ \sum\limits_{n=N_\varepsilon}^{\infty} X_n = \sum\limits_{n=N_\varepsilon}^{\infty} X_n^c\,[P]$-f.s. auf A_ε $(*)$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe auf A_ε, wobei $P(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.

$\underset{\text{beliebig}}{\overset{\varepsilon > 0}{\Longrightarrow}}$ Behauptung. $\square$

Unmittelbare Konsequenz des Satzes 8 und des Satzes 9 ist der

Satz 10
Ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen reellwertigen Zufallsvariablen, so gelten folgende Aussagen:

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt P-stochastisch genau dann, wenn sie P-stochastisch mit bedingter Summe konvergiert.

(2.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt P-stochastisch genau dann, wenn sie P-stochastisch mit unbedingter Summe konvergiert.

(3.) In der Situation (1.) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Hinsichtlich der L^p-Konvergenz stochastischer Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ kann man ein analoges Resultat formulieren und beweisen. Hier gehen entscheidend die Ungleichungen von Marcinkiewicz und Zygmund ein. Es gilt folgender bekannte Satz(vgl.(9)S.367).

Satz 11 *(Marcinkiewicz, Zygmund)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellwertigen unabhängigen Zufallsvariablen mit $EX_n = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es $\forall\; 1 \leq p < +\infty$ positive Konstanten A_p, B_p (unabhängig von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) so, dass $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$A_p\Big(E\Big[\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} X_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(E\Big[\Big|\sum_{k=0}^{n} X_k\Big|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\Big(E\Big[\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} X_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Wir sind nun in der Lage,unter Verwendung von Satz 11 folgende Aussage zu zeigen.

Satz 12
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellwertigen unabhängigen Zufallsvariablen aus $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), 1 \leq p < +\infty$. Dann gelten folgende Aussagen:

(1.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert im L^p-Sinn mit bedingter Summe genau dann, wenn sie bedingt konvergiert.

(2.) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert im L^p-Sinn mit unbedingter Summe genau dann, wenn sie unbedingt konvergiert.

(3.) In der Situation (1.) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beweis:

(i) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ im L^p-Sinn mit bedingter Summe, so folgt aus Satz 3 die bedingte L^p-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

(ii) O.B.d.A. konvergiere die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ im L^p-Sinn. Aus der L^p-Konvergenz folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$, denn:

$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\; \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$ mit $n > m$ gilt:
$\Big(E\Big(\Big|\sum\limits_{k=m}^{n} X_k\Big|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, 1 \leq p < +\infty$

$\Longrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\; \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$ mit $n > m$ gilt:

$E\Big[\Big|\sum\limits_{k=m}^{n} X_k\Big|\Big] < \varepsilon$

$\Longrightarrow \Big|\sum\limits_{k=m}^{n} EX_k\Big| < \varepsilon\; \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$ mit $n > m$.

Aus der L^p-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ und der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$ folgt die L^p-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ mit $Y_n := (X_n - EX_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz 11 erhalten wir die Abschätzung

$$(*) \qquad A_p\Big(E\Big[\Big(\Big(\sum_{k=m}^{n} Y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(E\Big[\Big|\sum_{k=m}^{n} Y_k\Big|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

mit einer von $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängigen nichtnegativen Konstanten A_p.

Ist $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0} \Longrightarrow\ \exists\, M_\varepsilon\ \forall\, n \ge M_\varepsilon : g(n) \ge N_\varepsilon$

Eine erneute Anwendung von Satz 11 liefert: $\forall\, n, m \ge M_\varepsilon, m < n$

$$\left(E\left(\left|\sum_{k=m}^{n} Y_{g(k)}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le B_P\left(E\left(\left(\sum_{k=m}^{n} Y_{g(k)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le B_P\left(E\left(\left(\sum_{k=N_\varepsilon}^{K_\varepsilon} Y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{B_p}{A_p}\left(E\left(\left|\sum_{k=N_\varepsilon}^{K_\varepsilon} Y_k\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \underset{(*)}{<} \frac{B_p}{A_p}\cdot\varepsilon$$

wobei $K_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ so gewählt sei, dass $\{g(m), \ldots, g(n)\} \subset \{N_\varepsilon, \ldots, K_\varepsilon\}$.
Somit konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{g(n)}$ im L^p-Sinn.

Es konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ unbedingt im L^p-Sinn.

Aus der bedingten L^p-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ folgt daher die bedingte Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$. Aus dem Riemannschen Umordnungssatz folgt wiederum die L^p-Konvergenz mit bedingter Summe der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. □

Betrachten wir Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum $(H, <, >)$, so sind die obigen Aussagen im allgemeinen falsch. Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in $(H, <, >)$, die bedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert, muß nicht zwangsläufig $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergieren. Dies kann man sich an einem einfachen Beispiel, welches aus einer Arbeit von Hadwiger(25) stammt, verdeutlichen.

Beispiel: (Aus der Arbeit "Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum")

Es sei $(H, <, >)$ ein beliebiger unendlich dimensionaler Hilbertraum. Ferner sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthonormaler Vektoren aus $(H, <, >)$. Bildet man die Reihe, die aus $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} + \frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} + \ldots + \frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n}\right)$ durch Entfernen der Klammer entsteht, so ist diese Reihe bedingt konvergent in $(H, <, >)$, aber jede konvergente Umordnung dieser Reihe besitzt den gleichen Limes. Man beachte hierbei, dass in den geklammerten Ausdrücken je n Elemente mit positiven und ebenso viele mit negativen Vorzeichen stehen.

Definition 9:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||)$. Die Folge $\{\tilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen in $(E, ||\cdot||)$ sei definiert durch

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_n(\omega) &:= X_n(\omega), \text{ falls } ||X_n(\omega)|| \leq 1. \\
\tilde{X}_n(\omega) &:= \tfrac{X_n(\omega)}{||X_n(\omega)||}, \text{ falls } ||X_n(\omega)|| > 1.
\end{aligned}$$

$\{\tilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Projektion der $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf die abgeschlossene Einheitskugel in $(E, ||\cdot||)$. Den folgenden Satz findet man z. B. in "Kahane, Some series of Random Variables".

Satz 13
Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in einem Hilbertraum $(H, <;>)$. Notwendig und hinreichend für die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ ist die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} E\tilde{X}_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} Var\tilde{X}_n$.

Unmittelbare Konsequenz dieses Satzes und den obigen Vorüberlegungen ist der folgende Satz.

Satz 14
Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Werten in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum $(H, <;>)$. Es gelten folgende Aussagen:

(1.) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt (unbedingt) $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} E\tilde{X}_n$ bedingt (unbedingt) in $(H, ||\cdot||_H)$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} Var\tilde{X}_n < +\infty$ ist.

(2.) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert $[P]^*$-f.s. mit bedingter (unbedingter) Summe genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} E\tilde{X}_n$ mit bedingter (unbedingter) Summe konvergiert, und $\sum_{n=0}^{\infty} Var\tilde{X}_n < +\infty$ gilt.

Bedingt $[P]^*$-f.s. konvergente Partialsummenprozesse $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit unabhängigen Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, deren Werte in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum

$(H, <; >)$ liegen, müssen somit nicht notwendig $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergieren. Betrachtet man hingegen Folgen unabhängiger Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten im topologischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{k\in\mathbb{N}} \tau_{|\cdot|})$, so konvergiert die stochastische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]^*$-f.s mit bedingter Summe, falls sie bedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert. Grundlegend hierbei ist ein Resultat von Yitzhak Katznelson und O. Carruth Mc Gehee(vgl.(23)). Man kann dieses Resultat folgendermaßen formulieren.

Satz 15 *(Katznelson, Mc Gehee)*
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Vektoren im topologischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \tau_{|\cdot|})$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt in der Fréchet-Metrik, so ist Γ_A ein affin linearer Unterraum des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dim $\Gamma_A \geq 1$.

Unter Verwendung von Satz 15 kann man analog zum reellwertigen Fall für stochastische Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ mit unabhängigen Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgende Charakterisierungen der bedingten und unbedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz angeben.

Satz 16
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine darauf definierte Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit Werten in $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}, \tau_{|\cdot|})$. Dann gelten folgende Aussagen:

(1.) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn sie $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergiert.

(2.) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn sie $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe konvergiert.

(3.) In der Situation (1) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beweis:
Die Produkttopologie $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \tau_{|\cdot|}$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wird metrisiert durch die Fréchet-Metrik $d(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x^{(j)}-y^{(j)}|}{1+|x^{(j)}-y^{(j)}|}\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$-f.s. genau dann, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(j)}\ \forall\, j \in \mathbb{N}$ $[P]$-f.s. konvergieren. Hierbei sei $X_n^{(j)}$ die Projektion von X_n auf die j-te Koordinate. Jede der Folgen $\{X_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für festgewähltes $j \in \mathbb{N}$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen. Somit liefert die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ unter Verwendung des Kolmogoroff'schen Drei-Reihen-Satzes:

$\forall\, j \in \mathbb{N}\, \forall\, c > 0$ konvergieren die Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n^{(j)}| \geq c\}), \sum_{n=0}^{\infty} Var(X_n^{(j)c}) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} E(X_n^{(j)c}). \quad (*)$$

Die bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ liefert zunächst:

$J := \{j \in \mathbb{N} | \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^{(j)}$ konvergiert bedingt $[P]^* -$ f.s.$\} \neq \emptyset$. Wie beim Beweis zu Satz 9 folgt, da $J \neq \emptyset : \forall\, \ell \in J\ \exists c_\ell > 0$ so, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E(X_n^{c_\ell})$ bedingt konvergiert. Ist $\overline{\ell} \in J$ festgewählt, so folgt mit $(*)$ die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (X_n^{(j)})^{c_{\overline{\ell}}}\, \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E((X_n^{(\overline{\ell})})^{c_{\overline{\ell}}})$ bedingt konvergiert, folgt die bedingte Konvergenz der Vektorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} E\Big[X_n^{(1)} \mathbb{1}_{\{|X_n^{(1)}| \leq c_{\overline{\ell}}\}}\Big] \\ E\Big[X_n^{(2)} \mathbb{1}_{\{|X_n^{(2)}| \leq c_{\overline{\ell}}\}}\Big] \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ in } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \tau_{|\cdot|})$$

Aus Satz 15 folgt die Konvergenz mit bedingter Summe dieser Vektorreihe. Wörtlich wie im Beweis zu Satz 9 folgert man, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergiert. □

Bemerkung:

Satz 15 liefert insbesondere, dass jede Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unabhängiger Zufallsvektoren mit Werten in $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$, die bedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert, $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergiert. Aus der Isomorphie zwischen n-dimensionalen Banachräumen $(E, ||\cdot||)$ und dem $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ folgt, dass dieses Konvergenzverhalten von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ auch noch für Folgen unabhängiger $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in endlich dimensionalen Banachräumen gilt.

Kapitel III

Markovprozesse und bedingte Konvergenz

Am Anfang dieses Kapitels stellen wir zunächst einige grundlegende Begriffe und Resultate zusammen.

Definition 10

Es seien $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\mathcal{X})$ sowie $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ zwei Messräume und $p : \mathcal{X} \times \mathcal{F}_\mathcal{Y} \longrightarrow [0,1]$ ein Übergangskern. Die reelle Zahl $\alpha(p) := 1 - \sup\limits_{\substack{x', x'' \in \mathcal{X} \\ B \in \mathcal{F}_\mathcal{Y}}} |p(x', B) - p(x'', B)|$ heiße Ergodizitätskoeffizient des Übergangkerns p.

Bemerkung:

(1.) Aus der Definition von $\alpha(p)$ folgt unmittelbar: $0 \leq \alpha(p) \leq 1$.

(2.) Wir erhalten: $\alpha(p) = 1 \Longleftrightarrow\ p(x, B)$ ist unabhängig von $x \in \mathcal{X}$.

(3.) $\alpha(p) = 0 \Longleftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x', x'' \in \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft:
Die Wahrscheinlichkeitsmaße $p(x', \cdot)$ und $p(x'', \cdot)$ sind auf Mengen $B_{x'}, B_{x''} \in \mathcal{F}_\mathcal{Y}$, konzentriert, für die gilt: $p(x', B_{x''}) < \varepsilon$ und $p(x'', B_{x'}) < \varepsilon$.

(4.) Der Ergodizitätskoeffizient ist von Markov eingeführt worden. Studiert wurde er systematisch von Dobrushin, Dynkin und Ueno (1954-1957).

Beispiel:
Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein homogener Markovprozeß mit abzählbarem Zustandsraum E. Mit $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ bezeichnen wir die Matrix der Einschrittübergangswahrscheinlichkeiten. Der Ergodizitätskoeffizient berechnet sich mit Hilfe der Einträge der Matrix. Es gilt $\forall\ i \in E\ \forall\ A \in 2^E\ p(i, A) = \sum\limits_{j \in A} q_{ij}$. In diesem Beispiel gilt $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = E$ und $\mathcal{F}_\mathcal{X}, \mathcal{F}_\mathcal{Y} = 2^E$. Es ergibt sich die Gleichung:

$$\alpha(p) = \inf_{i,j \in E} \sum_{k \in E} \min(q_{ik}, q_{jk}) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j \in E} \sum_{k \in E} |q_{ik} - q_{jk}|$$

Die Gleichung $\alpha(p) = 1 - \frac{1}{2} \sup\limits_{i,j \in E} \sum\limits_{k \in E} |q_{ik} - q_{jk}|$ erhalten wir aus folgender Überlegung.

Sind P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße und μ ein Maß mit $\mu >> \{P, Q\}$, so gilt
$Q(B) - P(B) = \int\limits_B (g - f) d\mu$, wobei $f = \frac{dP}{d\mu}$ und $g = \frac{dQ}{d\mu}$ sind.

Somit ist $\sup\limits_{B \in \mathcal{F}} (Q(B) - P(B)) = \int\limits_{\{g > f\}} (g - f) d\mu$, d. h. aber

$$\sup_{B \in \mathcal{F}} |Q(B) - P(B)| = \max \left(\int\limits_{\{g>f\}} (g - f) d\mu, - \int\limits_{\{g \leq f\}} (g - f) d\mu \right) \qquad (*)$$

Es gilt ferner

$$\int\limits_{\{g>f\}} (g-f)d\mu + \int\limits_{\{g\leq f\}} (g-f)d\mu = 0 \text{ sowie}$$
$$\int\limits_{\{g>f\}} (g-f)d\mu - \int\limits_{\{g\leq f\}} (g-f)d\mu = \int\limits_{\Omega} |g-f|d\mu =: ||Q-P||$$
$$\Longrightarrow 2 \cdot \int\limits_{\{g>f\}} (g-f)d\mu = ||Q-P||$$

Aus Symmetriegründen erhält man $2 \int\limits_{\{f\geq g\}} (f-g)d\mu = ||Q-P||$.

Somit erhalten wir unter Verwendung von $(*)$: $\sup\limits_{B\in\mathcal{F}} |Q(B)-P(B)| = \frac{1}{2}||Q-P||$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \alpha(p) &= 1 - \sup_{x,y\in B} |p(x,B)-p(y,B)| = 1 - \sup_{x,y}(\sup_{B} |p(x,B)-p(y,B)|) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\sup_{x,y} ||p(x,B)-p(y,B)|| \end{aligned}$$

Vereinbarung:
In Resultaten dieses Kapitels, bei denen reellwertige Markovprozesse $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachtet werden, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgendermaßen definiert: $X_n = f_n \circ Y_n, n \in \mathbb{N}_0$, wobei $f_n : (\mathbb{R},\mathbb{B}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathbb{B}) \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Man beachte hierbei, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im allgemeinen kein Markovprozeß ist.

Das folgende Lemma werden wir später bei einem Beweis benötigen. Es stammt aus einer Arbeit von Dobrushin.

Lemma 1: (Dobrushin)
Es sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Markovprozeß mit korrespondierenden Einschrittübergangskernen $\{_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt folgende Ungleichung:

$$(*) \qquad 1 - \alpha(_kp_{k+\ell}) \leq \prod_{i=k}^{k+\ell-1} (1-\alpha(_ip_{i+1})) \;\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \;\forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Einen Beweis dieser Ungleichung findet man in (19).

Die $[P]$-f.s. Konvergenz einer stochastischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit unabhängigen Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist äquivalent zur P-stochastischen Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Ein Resultat von Ueno (1957) verallgemeinert diese Aussage auf Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$, deren Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ über $X_n = f_n \circ Y_n, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovprozeß, definiert sind. Es gilt der folgende Satz.

Satz 17 *(Ueno)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein reellwertiger Markovprozeß mit* $\varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_kp_{k+1}) > 0$*. Konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ *P-stochastisch, dann konvergiert die stochastische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$*-f.s.*

Beweis:
In Random Processes and Learning von Iosifescu,Theodorescu, Seite 54
Ein Analogon zum klassischen Kolmogoroff'schen Drei-Reihen-Satz hat Iosifescu (1967) bewiesen (Random Processes and Learning von Iosifescu,Theodorescu, Seite 54).

Satz 18 *(Iosifescu)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein reellwertiger Markovprozeß mit* $\varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_kp_{k+1}) > 0$*. Dann folgt aus der* $[P]$*-f.s. Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$: $\forall\, c > 0$ *konvergieren die Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$, $\sum_{n=0}^{\infty} E(X_n^c)$, $\sum_{n=0}^{\infty} Var(X_n^c)$.
Gibt es umgekehrt mindestens ein $c > 0$*, so dass die Reihen konvergieren, dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$*-f.s.*

Bemerkung:
Die Bedingung $\varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_kp_{k+1}) > 0$ in Satz 17 kann nicht ersatzlos gestrichen werden.Beweise von Satz 17 und 18 stehen in (19).

Beispiel:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.a. ZV mit $P\{X_n = 1\} = p_n, P\{X_n = 0\} = 1 - p_n$. Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei hierbei so gewählt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} p_n^2 < +\infty$ gelte. Somit konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ P-stochastisch, aber nicht $[P]$-f.s. (Borel-Cantelli-Lemma). Mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei der folgende Prozeß definiert: $Y_0 = 0$ $[P]$-f.s. und $Y_{2k} = X_k, Y_{2k+1} = -X_k, k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Unabhängigkeit der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man unmittelbar die Eigenschaft, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Markovprozeß ist. Ferner gilt für die Folge der Einschrittübergangskerne $({}_np_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ dieses Prozesses:
$\alpha({}_kp_{k+1}) = \begin{cases} 0; k \text{ gerade} \\ 1; k \text{ ungerade} \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir $\varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_kp_{k+1}) = 0$.
Der Prozeß $\left(\sum_{k=0}^{n} Y_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert per Konstruktion P-stochastisch und divergiert $[P]$-f.s., denn:

$$\sum_{k=0}^{n} Y_k = \begin{cases} 0; & \text{falls } n > 1 \text{ und ungerade ist} \\ X_m; & \text{falls } n = 2m, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung:
Da die Eigenschaft von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, nämlich ein Markovprozeß zu sein, im Gegensatz zur Unabhängigkeit nicht umordnungsinvariant ist (d. h. $(Y_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist im allgemeinen kein Markovprozeß mehr), müssen wir etwas anders vorgehen, falls wir die Markoveigenschaft ausnutzen wollen. In diesem Kapitel gehen wir von folgender Situation

aus: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt konvergent (konvergent mit bedingter oder unbedingter Summe) im Sinne einer Konvergenzart der Stochastik, so möge für die konvergente Umordnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ gelten, dass $(Y_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Markovprozeß mit der geforderten Ergodizitätsbedingung ist. Vertreten wir diesen Standpunkt, was wir im folgenden tun, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ schon im Sinne der jeweiligen Konvergenzart der Stochastik konvergiert und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Markovprozeß mit $\varliminf\limits_{k\to\infty} \alpha({}_kp_{k+1}) > 0$ ist. Man kann folgendes Resultat formulieren:

Satz 19
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Markovprozeß, dessen Einschrittübergangskerne $\{{}_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Bedingung $\varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) >$ 0 genügen. Dann gelten folgende Aussagen:

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt P-stochastisch genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ P-stochastisch mit unbedingter Summe konvergiert.

(2.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt P-stochastisch genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ P-stochastisch mit bedingter Summe konvergiert.

(3.) In der Situation (2.) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von ZV.

Beweis:

(1.) Es konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt P-stochastisch.

$\overset{\text{Satz 5}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ Teilfolgen $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} X_{n_k}$ P-stochastisch.
Der Prozeß $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Markovprozeß und somit auch $\{Y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Es ist $\{{}_{n_k}p_{n_{k+1}}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Familie der zu $\{Y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Einschnittübergangskerne. Aus der Voraussetzung wissen wir, dass $\varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) > 0$ gilt. D. h.

$$\exists\, \gamma > 0, N \in \mathbb{N}_0 : \inf_{n\geq N} \alpha({}_np_{n+1}) \geq \gamma > 0.$$

Die Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{N}_0$ ist per Definition strikt isoton und somit gilt:

$$\exists\, K \in \mathbb{N}_0\ \forall\, k \geq K : n_k \geq N$$

$$\Longrightarrow \; \forall\, k \geq K \;\text{ gilt: } \alpha({}_{n_k}p_{n_{k+1}}) \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} 1 - \prod_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} (1 - \alpha({}_i p_{i+1}))$$

$$\underset{\alpha({}_ip_{i+1}) \geq \gamma}{\overset{n_k \geq N}{\geq}} \; 1 - \prod_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} (1-\gamma)$$

$$= \; 1 - (1-\gamma)^{n_{k+1}-n_k-1} \underset{0 \leq 1-\gamma < 1}{\geq} 1 - (1-\gamma) = \gamma > 0.$$

$$\Longrightarrow \; \forall\, k \geq K \text{ gilt: } \alpha({}_{n_k}p_{n_{k+1}}) \geq \gamma > 0 \Longrightarrow \inf_{k \geq K} \alpha({}_{n_k}p_{n_{k+1}}) \geq \gamma > 0$$

$$\Longrightarrow \; \varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_{n_k}p_{n_{k+1}}) > 0$$

Somit erfüllt der Markovprozeß $\{Y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Bedingung $\varliminf_{k\to\infty} \alpha({}_{n_k}p_{n_{k+1}}) > 0$.

$$\overset{\text{Satz 16}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} X_{n_k} \text{ konvergiert } [P]\text{-f.s. } \forall \text{ Teilfolgen } \{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ von } \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

$$\overset{\text{Satz 17}}{\Longrightarrow} \forall\, c > 0 \text{ konvergieren die Reihen: } \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\Big\{|X_{n_k}| \geq c\Big\}\Big), \sum_{k=0}^{\infty} E(X_{n_k}^c), \sum_{k=0}^{\infty} Var\,(X_{n_k}^c)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, c > 0 \text{ konvergieren die Reihen : } (**) \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\Big\{|X_n| \geq c\Big\}\Big), \sum_{n=0}^{\infty} |E(X_n^c)| \text{ sowie } \sum_{n=0}^{\infty} Var(X_n^c).$$

Somit ist $(**)$ äquivalent zur unbedingten P-stochastischen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$.

(2.) Es konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt P-stochastisch.

$$\overset{(1.)}{\Longrightarrow} \exists\, c > 0 \text{ so, dass die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} E(X_n^c) \text{ nicht absolut und somit bedingt konvergiert.}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} E(X_n^c) \text{ konvergiert mit bedingter Summe.}$$

Definieren wir $Z_n := X_n^c - E(X_n^c) \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, so erhalten wir einen Prozeß $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, der gemäß $(**)$ unbedingt P-stochastisch konvergiert. Hieraus folgt die P-stochastische Konvergenz mit bedingter Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n^c$. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$ folgt die Behauptung (2.) und somit auch (1.). (3.) ist Konsequenz des Riemann'schen Umordnungssatzes. □

Bemerkung:

(i) Eine analoge Aussage für unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz bzw. $[P]^*$-f.s.-Konvergenz mit unbedingter Summe von $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ lässt sich auf diese Weise nicht verifizieren. Zwar haben wir die $[P]$-f.s. Konvergenz einer jeden Teilreihe $\sum_{k=0}^{\infty} X_{n_k}$, jedoch ist wegen fehlender Metrisierbarkeit der $[P]$-f.s. Konvergenz ein Teilreihenkriterium für die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz nicht verwendbar.

(ii) Die Ergodizitätsbedingung $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) > 0$ in Satz 17 ist wesentlich. Ich möchte dies an einem Beispiel illustrieren, das wir auch hinsichtlich anderer Gesichtspunkte noch studieren werden.

Beispiel:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.i.v. reellwertiger Zufallsvariablen mit $EX_1 = 0$ und $EX_1^2 < +\infty$. Somit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Wir betrachten die stochastische Reihe, die entsteht, wenn man in folgender Reihe die Klammern entfernt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{X_n}{n} - \frac{X_n}{n} + \frac{X_n}{n} - \ldots + \frac{X_n}{n} - \frac{X_n}{n} \Big)$$

Die Folge der Summanden dieser entstehenden Reihe bildet einen Markovprozeß, da die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind. Da aus $E|X_1|^2 < +\infty$ und der Eigenschaft der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u.i.v. zu sein folgt: $\exists\ [P] - \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ sowie $L^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$, erhalten wir aufgrund der Konstruktion der obigen Reihe, dass diese $[P]$-f.s. und im L^2-Sinn konvergiert. Gemäß dem Beispiel von Hadwiger konvergiert diese Reihe bedingt im L^2-Sinn, allerdings mit unbedingter Summe. Ferner bemerken wir, dass die Reihe der Varianzen der Summanden divergiert und dennoch $[P]$-f.s. Konvergenz der stochastischen Reihe vorliegt.
Die Voraussetzung $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) > 0$ in Satz 18 kann nicht ersatzlos gestrichen werden.

Wir können allerdings zeigen, dass eine stochastische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$, mit $X_n = f_n \circ Y_n$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovfolge mit korrespondierenden Einschrittübergangskernen $\{{}_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, schon mit bedingter Summe im L^2-Sinn konvergiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt L^2-konvergiert und $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) > 0$ gilt.

Folgende Definitionen werden benötigt.

Definition 11

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei σ-Algebren über Ω mit $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, für $i = 1, 2$.

(i) $\varphi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sup_{B\in\mathcal{F}_2} (\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |P(B|\mathcal{F}_1)(\omega) - P(B)|)$ heißt φ-Koeffizient.

(ii) $\alpha(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) := 1 - \sup\limits_{B\in\mathcal{F}_2}(\operatorname{ess}\sup\limits_{\omega\in\Omega} P(B|\mathcal{F}_1)(\omega) - \operatorname{ess}\inf\limits_{\omega\in\Omega} P(B|\mathcal{F}_1)(\omega))$ heißt α-Koeffizient der σ-Algebren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.

Bemerkungen:

(1.) Aus den Definitionen folgt unmittelbar: $0 \le \alpha \le 1$ und $0 \le \varphi \le 1$.

(2.) Die σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sind unabhängig genau dann, wenn $\alpha(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = 1$ ist.

(3.) Es gilt folgende Ungleichungskette zwischen den Koeffizienten:

$$\frac{1}{2}[1-\alpha(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)] \le \varphi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \le 1-\alpha(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)\ \forall\ \mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}.$$

Wir benötigen einige Resultate, die wir hier kurz zitieren werden(vgl.(19)S.45-51) .

Satz 20
Es sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{Z_k\}_{k=0}^n$ reellwertige Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. $\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^n$ seien σ-Algebren in $(\Omega,\mathcal{F})$ mit $\sigma(X_k) \subset \mathcal{A}_k\ \forall\ k = 1,\ldots,n$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\left|Var\Big(\sum_{k=0}^n Z_k\Big) - \sum_{k=0}^n Var\ Z_k\right| \le 4\cdot\max\Big(\max_{0\le i\le n-1}\sum_{j=i+1}^n \varphi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j);\max_{0<j\le n}\sum_{i=0}^{j-1}$$
$$\varphi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)\Big)\sum_{k=0}^n Var\ Z_k$$

Satz 21 *(Ueno)*
Es sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Markovprozeß mit korrespondierenden Einschrittübergangskernen $\{{}_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die σ-Algebra $\mathcal{A}_k$ sei definiert durch $\mathcal{A}_k = \sigma(Y_k)$. Es gilt dann $\forall\ k\in\mathbb{N}_0\ \forall\ \ell,m\in\mathbb{N}$ die Beziehung:

$$\alpha\Big(\sigma\Big(\bigcup_{i=0}^k \mathcal{A}_i\Big);\sigma\Big(\bigcup_{j=k+\ell}^{k+\ell+m-1}\mathcal{A}_i\Big)\Big) = \alpha({}_kp_{k+\ell}).$$

Hierbei ist ${}_kp_{k+\ell}$ der ℓ-Schrittübergangskern vom Zeitpunkt k zum Zeitpunkt $k+\ell$.

Satz 22 *(Dobrushin)*
Es sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Markovprozeß aus $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Einschrittübergangskernen $\{{}_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Für ein $n\ge 1$ definiere man $\alpha^{(n)} := \min\limits_{0\le i\le n-1}\alpha({}_ip_{i+1})$.

$$\Longrightarrow Var\Big(\sum_{k=0}^n X_k\Big) \ge \frac{\alpha^{(n)}}{8}\sum_{k=0}^n Var X_k.$$

Beweis: [Iosifescu, Random Processes and Learning, Theorem 1.2.7, Seite 46 ff]

Hinsichtlich der bedingten L^2-Konvergenz stochastischer Reihen mit Markovfolgen $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man folgendes Resultat angeben.

Satz 23
Es sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein reellwertiger Markovprozeß, so dass* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *aus* $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ *ist. Die korrespondierenden Einschrittübergangskerne* $\{{}_np_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mögen* $\varliminf\limits_{n\to\infty}\alpha({}_np_{n+1}) > 0$ *erfüllen. Dann gilt:*

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ *konvergiert bedingt im* L^2*-Sinn genau dann, wenn* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ L^2*-konvergiert mit bedingter Summe.*

(2.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ *konvergiert unbedingt im* L^2*-Sinn genau dann, wenn* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ L^2*-konvergiert mit unbedingter Summe.*

(3.) In der Situation (1.) ist Γ_A *eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.*

Wir benötigen beim Beweis folgendes Lemma.

Lemma 2:
Es sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Markovprozeß, $\alpha^{(n)} := \min\limits_{0\le i\le n-1}\alpha({}_ip_{i+1}), n \ge 1$. Es gelte $\alpha^{(n)} > 0$. Dann erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\Big|Var\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) - \sum_{k=1}^{n} Var X_k\Big| \le 4\cdot\frac{(1-\alpha^{(n)}) + (1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{(n)}}\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k$$

Beweis:
Aus Satz 19, Satz 20 und Bemerkung (3.) oben folgt die Abschätzung: $\forall\ n \ge 1$

$$\Big|Var\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) - \sum_{k=1}^{n} Var\ X_k\Big| \le$$

$$4\cdot\max\Big(\max_{1\le i\le n-1}\sum_{j=i+1}^{n}[1-\alpha({}_ip_j)]^{\frac{1}{2}};\ \max_{1<j\le n}\sum_{i=1}^{j-1}[1-\alpha({}_ip_j)]^{\frac{1}{2}}\Big)\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k$$

Lemma 1 $\implies \alpha({}_ip_j) \ge 1 - \prod\limits_{\ell=i}^{j-1}(1-\alpha({}_ip_{i+1}))\quad (*)$

$\alpha^{(n)} = \min\limits_{1\le i\le n-1}\alpha({}_ip_{i+1})\ \forall\ j = 1,\dots,n-1 \qquad (**)$

$$\underset{(*),(**)}{\leq} \quad 4\cdot\max\Big(\max_{1\leq i\leq n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(1-\alpha^{(n)})^{\frac{j-i-1}{2}};\max_{1<j\leq n}\sum_{i=1}^{j-1}(1-\alpha^{(n)})^{\frac{j-i-1}{2}}\Big)\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k$$

$$\leq \quad 4\cdot\Big(\sum_{j=2}^{n}((1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}})^j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} VarX_k\Big) = 4\cdot(1-\alpha^{(n)})\Big(\sum_{j=0}^{n-2}((1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}})^j\Big)$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} VarX_k\Big)$$

$$= \quad 4\cdot(1-\alpha^{(n)})\Big(\frac{1-((1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}})^{n-1}}{1-(1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k\Big) = 4\cdot\Big(\frac{(1-\alpha^{(n)})-(1-\alpha^{(n)})^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k\Big)$$

$$\leq \quad 4\cdot\Big(\frac{(1-\alpha^{(n)})+(1-\alpha^{(n)})^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{(n)}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} Var\ X_k\Big)$$

□

Beweis von Satz 23:

(1.) Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha({}_np_{n+1}) > 0$ folgt: $\exists\ \gamma > 0, M\in\mathbb{N}_0$ mit $\inf\limits_{k\geq M}\ \alpha({}_kp_{k+1}) \geq \gamma > 0$. Bezeichnen wir für ein festgewähltes $n > M$ $\alpha_M^{(n)} := \min\limits_{M\leq i\leq n-1}\ \alpha({}_ip_{i+1}) \Longrightarrow \alpha_M^{(n)} \geq \gamma > 0$. Aus Satz 21 und Lemma 2 erhalten wir $\forall\ n,m > M$ mit $m\leq n$ die Ungleichungen:

$$\frac{\alpha_M^{(n)}}{8}\sum_{k=m}^{n} VarX_k \leq Var(\sum_{k=m}^{n} X_k) \leq \frac{8}{\alpha_M^{(n)}}\sum_{k=m}^{n} VarX_k. \qquad (*)$$

Somit konvergiert die zentrierte Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n - EX_n)$ im L^2-Sinn genau dann, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ VarX_k$ konvergiert, denn:

(a) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ VarX_k \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon\in\mathbb{N}_0\ \forall\ n,m\geq N_\varepsilon$ mit $n > m$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} Var\ X_k < \varepsilon$$

Somit folgt $\forall\ n,m\geq\max\{N_\varepsilon, M\}$ unter Ausnutzung von $(*)$

$$Var\ \Big(\sum_{k=m}^{n} X_k\Big) < \frac{8}{\gamma}\varepsilon$$

$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Longrightarrow} \Big\{\sum\limits_{k=0}^{n}(X_k - EX_k)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine L^2-Cauchy-Folge und somit konvergent.

(b) Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n - EX_n)$ im L^2-Sinn $\Longrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$ mit $n > m$ gilt:

$$Var\left(\sum_{k=m}^{n} X_n\right) < \varepsilon$$

Somit folgt $\forall\, n, m \geq \max\{N_\varepsilon, M\}$ unter Ausnutzung von $(*)$

$$\sum_{k=m}^{n} Var\ X_k < \frac{8}{\gamma}\varepsilon \overset{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} Var\ X_n \text{ konvergiert.}$$

(2.) Es konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt im L^2-Sinn. Aus der L^2-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$. Somit konvergiert die zentrierte Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n - EX_n)$ im L^2-Sinn. Bezeichnen wir den Prozeß $\{(X_n - EX_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, so folgt aus (1.) die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\ Z_n$. Da die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Var\ Z_{n_k}$ konvergiert, folgt mit (1.) die L^2-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Z_{n_k}$. Mit Satz 1 können wir auf unbedingte L^2-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$ schließen. Aus der bedingten L^2-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ und der Darstellung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$ folgt die bedingte Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$. Da diese gemäß dem Riemann'schen Umordnungssatz mit bedingter Summe konvergiert, folgt die Behauptung (1.) und somit auch (2.) und (3.). $\square$

Definition 12

Es sei $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definierter L^2-Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$, und $EX_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. $\underline{X}$ heiße quasiorthogonal, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt eine monoton fallende Folge $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit $\varrho_0 = 1, 0 \leq \varrho_n \leq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho_n < +\infty$ so, dass

$$E[X_n X_m] \leq \varrho_{n-m}(E(X_n^2))^{\frac{1}{2}}(E(X_m^2))^{\frac{1}{2}}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \leq n \text{ gilt.}$$

Bemerkung:

(1.) Jede Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ paarweise orthogonaler Zufallsvariablen ist trivialerweise quasiorthogonal. Man setze lediglich $\varrho_0 = 1$ und $\varrho_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(2.) Aus der Eigenschaft von $\underline{X}$ quasiorthogonal zu sein, folgt natürlich nicht : $\exists \lim\limits_{n,m\to\infty} E[X_n X_m] = 0$.

Definition:
Es sei $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß und $\forall\, a \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_{a,n}$ die gemeinsame Verteilungsfunktion der $X_a, \ldots, X_{a+n}$.

(1.) Mit $M_{a,n}$ bezeichnen wir $\max\limits_{a\le k\le n} \left|\sum\limits_{j=a}^{a+k} X_j\right|$, $\forall\, a \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

(2.) Mit $g : \mathcal{M} \to [0,\infty[$ sei ein Funktional bezeichnet, wobei $\mathcal{M} := \{F_{a,n} | a \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Der folgende Satz wurde von Serfling [1970 a] formuliert und verallgemeinert die fundamentale Maximalungleichung für orthogonale Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Satz 24 *(Serfling)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger Prozeß aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ferner sei $g : \mathcal{M} \to [0,\infty[$ ein Funktional gemäß obiger Definition. Besitzt dieses Funktional g folgende Eigenschaften:

(1.) $g(F_{a,k}) + g(F_{a+k,m}) \le g(F_{a,k+m})\ \forall\, 0 \le k < k+m\ \forall\, a \ge 0$

(2.) $E\Big(\sum\limits_{j=a}^{a+n} X_j\Big)^2 \le g(F_{a,n})\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0\ \forall\, a \in \mathbb{N}_0$, *so folgt:*

$$E\Big[M_{a,n}^2\Big] \le \Big[\frac{\log(2(n+1))}{\log 2}\Big]^2 g(F_{a,n})\ \forall\, n \ge 0\ \forall\, a \ge 0$$

Auf Basis dieses Satzes zeigt Serfling folgenden Konvergenzsatz.

Satz 25 *(Serfling)*
Es seien die Voraussetzungen von Satz 19 erfüllt. Ferner sei $h : \mathcal{M} \to [0,\infty[$ ein Funktional mit der Eigenschaft (1.) in Satz 19, sowie den Bedingungen

(3.) $h(F_{a,n}) \le K < +\infty\ \forall\, a \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

(4.) $g(F_{a,n}) \le \frac{K\cdot h(F_{a,n})}{\log^2(a+1)}\ \forall\, a \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *dann gilt:* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ *konvergiert $[P]$-f.s..*

Der obige Konvergenzsatz ist auf die Situation eines quasiorthogonalen Prozesses $\underline{X}$ anwendbar. Einen Beweis zu folgendem Satz findet man in [Stout, almost sure convergence, page 28].

Satz 26
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein darauf definierter quasiorthogonaler Prozeß. Dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1) E X_n^2$ die $[P]$-f.s. Konvergenz der stochastischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)EX_n^2$ folgt nicht die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Beispiele hierzu findet man in Arbeiten von Karoly Tandori schon in der Situation paarweise orthogonaler $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Unter Verwendung von Satz 24 können wir allerdings hinreichende Kriterien für die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit quasiorthogonalen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ beweisen, die die klassischen Resultate für Reihen mit orthogonalen Folgen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ verallgemeinern.

Satz 27
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X}$ ein darauf definierter quasiorthogonaler Prozeß. Ferner sei $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge mit Werten in $\mathbb{N}$, für die die Beziehung $\log(\nu_{n+1}) = \mathcal{O}(\log(\nu_n))$ gelte. Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine positive monoton wachsende Funktion mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(\nu_n)} < +\infty$. Dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)\varphi(n)EX_n^2$ die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

Beweis:

(1.) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist quasiorthogonal, d. h. $\exists$ Folge $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\varrho_0 = 1, 0 \leq \varrho_n \leq 1$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho_n < +\infty$ so, dass folgende Beziehung gilt:

$$E[X_n X_m] \leq \varrho_{n-m}(EX_n^2)^{\frac{1}{2}}(EX_m^2)^{\frac{1}{2}} \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0, m \leq n. \qquad (*)$$

Es sei $\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung und $\{X_{\gamma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zugehörige Umordnung von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad E[X_{\gamma(n)}X_{\gamma(m)}] \leq \varrho_{|\gamma(n)-\gamma(m)|}(EX_{\gamma(n)}^2)^{\frac{1}{2}}(EX_{\gamma(m)}^2)^{\frac{1}{2}} \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n. (**)$$

Definieren wir $Y_n := X_{\gamma(n)}$ und $\varrho_{n-m}^{\gamma} := \varrho_{|\gamma(n)-\gamma(m)|} \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0, m \leq n$, so ist $\{\varrho_n^{\gamma}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Umordnung der Folge $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\varrho_0^{\gamma} = 1$.

Es seien $a \geq 0$ und $n \geq 1$ festgewählt.

$$\Longrightarrow \quad E\Big[\sum_{j=a+1}^{a+n} X_{\gamma(j)}\Big]^2 = \sum_{j=a+1}^{a+n} EX^2_{\gamma(j)} + 2 \cdot \sum_{a+1 \leq i < j \leq n} E[X_{\gamma(i)}X_{\gamma(j)}]$$

$$= \quad \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + 2 \cdot \sum_{a+1 \leq i < j \leq a+n} E[Y_iY_j]$$

$$\overset{(**)}{\leq} \quad \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + 2 \cdot \sum_{a+1 \leq i < j \leq a+n} \varrho^{\gamma}_{j-i}(EY_i^2)^{\frac{1}{2}}(EY_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \quad \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + 2 \cdot \sum_{i=a+1}^{a+n-1} \sum_{j=i+1}^{a+n} \varrho_{j-i}(EY_i^2)^{\frac{1}{2}}(EY_j^2)^{\frac{1}{2}} \ ((\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ monoton fallend})$$

$$= \quad \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k \sum_{i=a+1}^{a+n-k} (EY_i^2)^{\frac{1}{2}}(EY_{i+k}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \quad \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k \sum_{i=a+1}^{a+n-k} (EY_i^2 + EY_{i+k}^2) \leq \sum_{j=a+1}^{a+n} EY_j^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k\Big)$$
$$\Big(\sum_{k=a+1}^{a+n} EY_k^2\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad E\Big[\sum_{j=a+1}^{a+n} X_{\gamma(j)}\Big]^2 \leq 2 \cdot \Big(\sum_{j=a+1}^{a+n} EX^2_{\gamma(j)}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \varrho_k\Big).$$

Definieren wir für $F^{\gamma}_{a,n}$ (gemeinsame Verteilungsfunktion der $X_{\gamma(a+1)}, \ldots, X_{\gamma(a+n)}$) das Funktional $g_\gamma(F^{\gamma}_{a,n}) := 2 \cdot \Big(\sum_{j=a+1}^{a+n} EX^2_{\gamma(j)}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \varrho_k\Big)$, so sind die Voraussetzungen von Satz 24 erfüllt. Es gibt somit zu jeder Abbildung $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ ein Funktional g_γ mit : $\forall\ a \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0$

$$(***) \qquad E\Big[\max_{a \leq k \leq n} \Big|\sum_{j=a}^{a+k} X_{\gamma(j)}\Big|\Big]^2 \leq \Big(\tfrac{\log(2(n+1))}{\log 2}\Big)^2 g_\gamma(F^{\gamma}_{a,n}) = \log_2^2(2(n+1))$$
$$\Big(\sum_{j=a}^{a+n} EX^2_{\gamma(j)}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \varrho_k\Big)$$

(2.) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$. Bezeichnen wir mit $I_k := \{\nu_k, \nu_k + 1, \ldots, \nu_{k+1}\}, k \in \mathbb{N}_0$ und für ein festgewähltes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\{\varepsilon^k_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $\varepsilon^k_n := \begin{cases} 1; & \gamma(n) \in I_k \\ 0; & \gamma(n) \notin I_k \end{cases}$.

Wir erhalten somit $\forall\ p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p \leq q$ die Beziehung:

$$\sum_{n=p}^{q} X_{\gamma(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=p}^{q} \varepsilon^k_n X_{\gamma(n)}.$$

Es sei $Z_k := \sup\limits_{\substack{p \leq q \\ p,q\in\mathbb{N}_0}} \Big|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon^k_n X_{\gamma(n)}\Big| \Longrightarrow Z_k \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\ \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$

Ferner erhalten wir die Abschätzung $Z_k \leq 2 \cdot \sup\limits_{q \in \mathbb{N}_0} \Big| \sum\limits_{n=0}^{q} \varepsilon_n^k X_{\gamma(n)} \Big| \; \forall\, k \in \mathbb{N}_0$.

Somit erhalten wir unter Verwendung von $(***)$ die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
E[Z_k^2] &\leq \log_2^2(\nu_{k+1} - \nu_k)\Big(\sum_{\gamma(n) \in I_k} EX_{\gamma(n)}^2\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\nu_{k+1}-\nu_k} \varrho_n\Big) \\
&\leq K \cdot \log_2^2 \nu_k \Big(\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}} EX_n^2\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n\Big) \qquad \text{(Man beachte } \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n < +\infty\text{)}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\nu_k) E[Z_k^2] &\leq \varphi(\nu_k) \log_2^2(\nu_k)\Big(\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}} EX_n^2\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n\Big) \\
&\leq \tilde{K} \sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}} \varphi(n) EX_n^2 \log^2(n+1); \; \tilde{K} \text{ ist positive eine Konstante.}
\end{aligned}
$$

Aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \log^2(n+1) EX_n^2 < +\infty$ folgt somit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi(\nu_k) E[Z_k^2] < +\infty$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(\nu_n)}$ folgt die Abschätzung (man beachte den Satz von der monotonen Konvergenz):

$$
\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \leq \Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\nu_k) Z_k^2\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(\nu_k)}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad [P] - \text{f.s.},
$$

d. h. $\exists\, \Omega^* \in \mathcal{F}$ mit $P(\Omega^*) = 1$, so dass $\forall\, \omega^* \in \Omega^*$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Z_k(\omega^*)$ konvergiert

$$
\Longrightarrow \; \forall\, \omega^* \in \Omega^* \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, N = N(\omega^*, \varepsilon) \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \sum_{k=N}^{\infty} Z_k(\omega^*) < \varepsilon.
$$

Es sei $p = p(\omega^*, \varepsilon)$ so gewählt, dass die Abschnittssumme $\sum\limits_{n=0}^{p-1} X_{\gamma(n)}(\omega^*)$ alle $X_n(\omega^*)$ enthält, mit $n \in I_k, 0 \leq k < N(\omega^*, \varepsilon)$. Wir erhalten dann $\forall\, q \geq p :$

$$
\Big|\sum_{n=p}^{q} X_{\gamma(n)}(\omega^*)\Big| \leq \sum_{k=N}^{\infty} Z_k(\omega^*) < \varepsilon
$$

$$
\overset{\varepsilon > 0}{\underset{\text{beliebig}}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}(\omega^*) \text{ konvergiert} \overset{P(\Omega^*) = 1}{\Longrightarrow} \text{ Behauptung.} \qquad \square
$$

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes 27 erhalten wir den folgenden

Satz 28
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X}$ ein darauf definierter quasiorthogonaler Prozeß. Dann gelten folgende Aussagen:

(1.) Gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)(\log\ \log(n+2))^{1+\varepsilon} EX_n^2$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt $[P]^*$-f.s. .

(2.) Gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (EX_n^2)^{1-\varepsilon}$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt $[P]^*$-f.s. .

Wir sind nun in der Lage, einen Charakterisierungssatz hinsichtlich der bedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz stochastischer Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit Markovfolgen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ anzugeben ($X_n = f_n \circ Y_n, n \in \mathbb{N}_0$).

Satz 29
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein darauf definierter Markovprozeß, dessen Einschrittübergangskerne der Bedingung $\underline{\lim}_{n \to \infty} \alpha({}_n p_{n+1}) > 0$ genügen. Gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\bar{c} > 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+2)$ $(\log\ \log(n+2))^{1+\varepsilon} Var(X_n^{\bar{c}})$ konvergiert, so gelten folgende Aussagen

(1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert bedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe konvergiert.

(2.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe konvergiert.

(3.) In der Situation (1.) ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beweis:
Die Aussage (2.) ist unmittelbare Konsequenz der Aussage (1.).

(1.) Es konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt $[P]^*$-f.s. .

$\overset{\text{Satz 17}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, c > 0$ konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^c$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var X_n^c$.

$\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > \bar{c}\})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^{\bar{c}}$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)(\log\ \log(n+2))^{1+\varepsilon} Var X_n^{\bar{c}}$ konvergieren.

(2.) Betrachten wir die gestutzte und zentrierte Folge $\{(X_n^{\overline{c}} - EX_n^{\overline{c}})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und bezeichnen wir diese mit $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, so ist $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Prozeß aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Behauptung:
Der Prozeß $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist quasiorthogonal.
Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ festgewählt, dann folgt $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$E[Z_m Z_{m+n}] \leq |E[Z_m Z_{m+n}]| \leq 2 \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}(\sigma(Z_m), \sigma(Z_{m+n}))(EZ_m^2)^{\frac{1}{2}}(EZ_{m+n}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Aus der Ungleichung $\varphi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq 1 - \alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ erhalten wir:

$$E[Z_m Z_{m+n}] \leq 2 \cdot (1 - \alpha(\sigma(Z_m), \sigma(Z_{m+n})))^{\frac{1}{2}}(EZ_m^2)^{\frac{1}{2}}(EZ_{m+n}^2)^{\frac{1}{2}} \forall\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$$

Aus Satz 21 wissen wir, dass $\alpha(\sigma(Y_m), \sigma(Y_{m+n})) = \alpha({}_m p_{m+n})$ gilt.
Aus dem Lemma von Dobrushin (Lemma 1) erhalten wir die Abschätzung:

$$\alpha({}_m p_{m+n}) \geq 1 - \prod_{j=m}^{m+n-1} (1 - \alpha({}_j p_{j+1})) \text{ und somit : (beachte} \alpha(\sigma(Z_m), \sigma(Z_{m+n})) \leq \alpha(\sigma(Y_m), \sigma(Y_{m+n})))$$

$$E[Z_m Z_{m+n}] \leq 2 \cdot \Big(\prod_{j=m}^{m+n-1} (1 - \alpha({}_j p_{j+1}))\Big)^{\frac{1}{2}} (EZ_m^2)^{\frac{1}{2}}(EZ_{m+n}^2)^{\frac{1}{2}} \forall\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$$

Da $\varliminf_{n\to\infty} \alpha({}_n p_{n+1}) > 0$, sei o.b.d.A. $\inf_{n\geq 0} \alpha({}_n p_{n+1}) = \gamma > 0$. Somit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$E[Z_m Z_{m+n}] \leq 2 \cdot (\sqrt{1-\gamma})^{n-1}(EZ_m^2)^{\frac{1}{2}}(EZ_{m+n}^2)^{\frac{1}{2}} \forall\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}.$$

Definieren wir die Folge $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch: $\varrho_0 = 1$ und $\varrho_n = (1-\gamma)^{\frac{n}{2}} \forall\, n \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho_n < +\infty$. Da $EZ_n = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ ist, folgt somit die Behauptung.

(3.) Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)(\log\ \log(n+2))^{1+\varepsilon}\ VarX_n^{\overline{c}}$ in Verbindung mit Satz 28 erhalten wir die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$. Hieraus folgt unter Beachtung der bedingten $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ und der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq \overline{c}\})$ die bedingte Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^{\overline{c}}$. Somit konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^{\overline{c}}$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe. Wörtlich analog zum Beweis zu Satz 9 folgt die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Insgesamt erhalten wir damit die Aussagen (1.), (2.) und (3.). □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Ergodizitätsbedingung in Satz 18, nämlich $\varliminf_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) > 0$, nicht ersatzlos gestrichen werden kann.

Das Drei-Reihen-Kriterium für stochastische Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ mit Summanden $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die einen Markovprozeß bilden, ist nicht notwendig, falls $\varliminf_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) = 0$ gilt.

<u>Beispiel:</u>
Es sei $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen, definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P(\{X_n \in \{-1, 1\}\}) = 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0, P(\{X_0 = 1\}) = P(\{X_0 = -1\}) = \frac{1}{2}$. Die Folge sei ein Markovprozeß mit folgenden Einschrittübergangskernen:

$${}_np_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$
d.h. $P(\{X_{n+1} = 1 | X_n = -1\})$

$= P(\{X_{n+1} = -1 | X_n = 1\}) = 1 \;\forall\, n$

$\Longrightarrow \;\alpha({}_np_{n+1}) = 0 \;\forall\, n$ und somit gilt: $\varliminf_{n\to\infty} \alpha({}_np_{n+1}) = 0$.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine deterministische Folge reeller Zahlen mit $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Longrightarrow \;\underline{Y} = \{a_nX_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Markovprozeß mit Zustandsraum

$$E = \{\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots\} \text{ und es gilt: } EY_n = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \; VarY_n = \frac{1}{n} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \;\sum_{n=0}^{\infty} VarY_n^c = +\infty \;\forall\, c \geq 1$. Aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX_n$ konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1, denn es gilt:

$$P\Big(\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} a_nX_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{\sqrt{n}}\Big\}\Big) = P\Big(\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} a_nX_n = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \frac{1}{2},$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX_n$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe, obwohl die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} EX_n^c$ absolut konvergiert und dies $\forall\, c \geq 1$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Drei-Reihen-Kriterium in Satz 18 nicht hinreichend ist, falls der Markovprozeß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht der Bedingung $\varliminf_{n\to\infty} ({}_np_{n+1}) > 0$ genügt.

<u>Beispiel:</u>

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $a_n \neq 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent ist. Ferner sei Z eine reellwertige, beschränkte Zufallsvariable. Betrachten wir die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $Y_n = a_n \cdot Z, n \in \mathbb{N}_0$, so ist diese ein

Markovprozeß. Nun möge zusätzlich $EZ = 0$ gelten. Wir erhalten somit die Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EY_n$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} VarY_n$, obwohl $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ $[P]$-f.s. divergiert. Aufgrund der Konstruktion von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist unmittelbar klar, dass $\varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha({}_n p_{n+1}) = 0$ gilt.

Definition 14:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Die Folge $(X_j)_{j=0}^n$ reellwertiger Zufallsvariablen heißt austauschbar, falls $\forall$ Permutationen $\pi : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \dots, n\}$ gilt: $P^{(X_0,\dots,X_n)} = P^{(X_{\pi(0)},\dots,X_{\pi(n)})}$

(ii) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reellwertiger Zufallsvariablen heißt austauschbar, falls $\forall\ J \subset \mathbb{N}_0, |J| < \infty$ gilt: $(X_n)_{n\in J}$ sind austauschbar.

Satz 30
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge austauschbarer Zufallsvariablen. Ferner sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen.

(i) Ist $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ $[P]$-f.s. .

(ii) Ist $X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ absolut $[P]$-f.s. .

(iii) Ist $X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ bedingt $[P]^*$-f.s., so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

(iv) Ist $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und konvergieren $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$, wobei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ gelte, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe.
$\Gamma_A = \{Z | Z = Y + \alpha E^{\mathcal{G}}(X_0), \alpha \in \mathbb{R}\}$
$Y := [P] - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(X_k - E^{\mathcal{G}}(X_0)$ *und $\mathcal{G}$ sei die σ-Algebra der permutationsinvarianten Mengen.*

Beweis:

(ii) Es gilt $E\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k X_k\right| \le \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| E|X_k| = \left(\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k|\right) E|X_0| (*)$.
Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$, folgt: $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\, \forall\, n, m \ge N_\varepsilon\ \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon / E|X_0|$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \forall\, n, m \geq N_\varepsilon : E\left[\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k\, X_k|\right] < \varepsilon$

$\Longrightarrow \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist absolut L^1-konvergent und somit absolut $[P]$-f.s. konvergent.

(iii) Folgt unmittelbar aus der Aussage (ii).

(i) Die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind austauschbar und somit bedingt unabhängig gegeben $\mathcal{G}$(σ-Algebra der permutationsinvarianten Mengen).
Somit ist $(a_n X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bedingt unabhängig gegeben $\mathcal{G}$ und wir bezeichnen $a_n X_n =: Y_n \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Da die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergieren, erhalten wir die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n E^{\mathcal{G}}(X_n) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 E^{\mathcal{G}}(X_n^2)$$

(Man beachte, dass $E^{\mathcal{G}}(X_n) = E^{\mathcal{G}}(X_0)$, sowie $E^{\mathcal{G}}(X_n^2) = E^{\mathcal{G}}(X_0^2)\,[P]$-f.s. gilt.)
Es existiert eine reguläre Version der bedingten Verteilung von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Bezug auf $\mathcal{G}$. Für festgewähltes $\omega \in \Omega$ betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}_0}, P^\omega)$, wobei $P^\omega(A) = P^{\mathcal{G}}(A)(\omega) \;\forall\, A \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}_0}$ sei. Der zugehörige Koordinatenprozeß $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge reellwertiger unabhängiger Zufallsvariablen. Ferner gilt für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega : E^\omega(\xi_n) = E^{\mathcal{G}}(Y_n)(\omega)$ sowie $Var^\omega(\xi_n) = Var^{\mathcal{G}}(Y_n)(\omega), n \in \mathbb{N}_0$.
Da die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E^\omega(\xi_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n E^{\mathcal{G}}(X_n)(\omega)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var^\omega(\xi_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 Var^{\mathcal{G}}(X_n)(\omega)$ für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$ konvergieren, erhalten wir aus dem Zwei-Reihen-Satz für unabhängige Zufallsvariablen:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n(\tilde{\omega})$ konvergiert für $[P^\omega]$-fast alle $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$. Somit gilt für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$ und $\forall\, \varepsilon > 0$: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P^\omega\left(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \left|\sum\limits_{k=m}^{\infty} \xi_k(\tilde{\omega})\right| > \varepsilon\}\right) = 0$.
Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt somit:

$$\exists \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega\in\Omega : \left|\sum_{k=n}^{\infty} Y_k(\omega)\right| > \varepsilon\}\right) = \lim_{m\to\infty} E\left[P^\omega\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \left|\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k(\tilde{\omega})\right| > \varepsilon\}\right)\right]$$
$$= E\underbrace{\left[\lim_{m\to\infty} P^\omega\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \left|\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k(\tilde{\omega})\right| > \varepsilon\}\right)\right]}_{=0 \text{ für } [P]-\text{fast alle } \omega\in\Omega} = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_k\,[P]$-f.s., d. h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ ist $[P]$-f.s. konvergent.

(iv) Die Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $Z_k := X_k - E^{\mathcal{G}}(X_0), k \in \mathbb{N}_0$ ist austauschbar, da $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ austauschbar ist.
Somit ist die Folge $(a_k Z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ bedingt unabhängig gegeben $\mathcal{G}$. Ist $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ festgewählt, so ist $(a_{\gamma(k)} Z_{\gamma(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls bedingt unabhängig gegeben $\mathcal{G}$. Bezeichnen wir mit P_γ^ω die reguläre Version der bedingten Verteilung von $(a_{\gamma(k)} Z_{\gamma(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$

gegeben $\mathcal{G}, \omega \in \Omega$, so ist der zu $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}_0}, P_\gamma^\omega)$ gehörige Koordinatenprozeß $(\xi_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit:
$E^\omega(\xi_n^\gamma) = E^{\mathcal{G}}(Y_{\gamma(n)})(\omega)$ für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$, wobei $Y_{\gamma(n)} = a_{\gamma(n)} Z_{\gamma(n)}$.
Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ schließen wir (vgl. Teil (i)) auf die $[P_\gamma^\omega]$-f.s. Konvergenz der jeweiligen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n^\gamma$, für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$. Somit erhalten wir die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\gamma(k)} Z_{\gamma(k)}$ (vgl. Teil (i)).
Bezeichnen wir mit $Y := [P] - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} Y_k$, so erhalten wir für $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$:
$P\left(\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_{\gamma(k)} = Y\right\}\right) = 1.$
Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k E^{\mathcal{G}}(X_0)$ konvergiert $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergiert.
Somit erhalten wir mit dem Riemann'schen Umordnungssatz:

$$\Gamma_A = \{Z | Z = Y + \alpha E^{\mathcal{G}}(X_0), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

□

Beispiel:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge u.i.v. reellwertiger Zufallsvariablen mit $EX_0 = 0, VarX_0 < +\infty$, sowie Z eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u.a. Zufallsvariable mit $P^{X_0} = P^Z$. Dann ist die Folge $(X_n + Z)_{n\in\mathbb{N}_0}$ austauschbar. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergiert und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, so erhalten wir:
$\Gamma_A = \left\{Y | Y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X_n + \alpha \cdot Z, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$

Kapitel IV

Martingale im Limes und Prozesse mit mischenden Summanden

In diesem Kapitel wollen wir Konvergenzkriterien für Prozeße mit mischenden Zuwächsen angeben. Hierbei werden wir den Begriff des Martingals im Limes verwenden. Daher führen wir folgende Definition ein.

Definition 15:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein darauf definierter reellwertiger Prozeß aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ heißt Martingal im Limes, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists\, [P] - \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \Big| S_m - E^{\mathcal{F}_m}(S_n) \Big| = 0.$$

Bemerkung:
Louis H. Blake zeigte, dass jedes amart $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal im Limes ist. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Allerdings ist ein Martingal im Limes, welches die Bedingung $E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n|\Big] < +\infty$ erfüllt, schon ein amart.
(Zum Begriff amart vgl. Kapitel V)
[Beweise dieser Aussagen findet man in J. London Math. Soc. (2), 18 (1978), 381-384]

Ein Analogon zum Konvergenzsatz von Doob gilt für Martingale im Limes und ist für den reellwertigen Fall von Mucci nachgewiesen worden.

Satz 31 *(Mucci)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein reellwertiges Martingal im Limes, welches $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$ erfüllt. Dann konvergiert dieser Prozeß $[P]$-f.s. .

Beweis: [Pacific J. Math., 48 (1973), Seite 197 - 203]

Definition 16:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von σ-Algebren in $(\Omega, \mathcal{F})$. Die Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $\mathcal{F}_n = \sigma\Big(\bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j\Big)\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.
Die Folge $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ heiße Ψ-mischend, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine monoton fallende Abbildung $\Psi : \{N, N+1, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ so gibt, dass $\Psi(n) \downarrow 0, n \to \infty$ und $\forall\, m \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq N : \forall\, A \in \mathcal{F}_m\ \forall B \in \mathcal{A}_{m+n}\ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \Psi(n)P(A)P(B)$. Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von reellwertigen Zufallsvariablen heißt Ψ-mischend, falls die Folge $\{\sigma(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der korrespondierenden σ-Algebren Ψ-mischend ist.

Beispiele:

(1.) Jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängiger (reellwertiger) Zufallsvariablen ist Ψ-mischend. Man setze lediglich $N = 1$ und $\Psi \equiv 0$.

(2.) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandraum E, welche stationär und ergodisch ist. Es seien p_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeiten. Existiert ein $\beta \in (0,1)$ so, dass $\forall\, j \in E$ gilt: $\sup_{i\in E} p_{ij} \leq (1+\beta) \inf_{i\in E} p_{ij} \implies (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Ψ-mischend. Einen Beweis dieser Aussage lieferten Blum, Hanson & Koopmans [1963]. In dieser Arbeit wird allgemeiner charakterisiert, wann stationär ergodische Markovprozesse, mit nicht notwendig abzählbarem Zustandsraum, Ψ-mischend sind.

(3.) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Wir betrachten mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diejenige Folge, die definiert ist durch: $Y_0 = X_0, Y_n = X_n - X_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen mit $N = 1, \Psi(1) = 1, \Psi(n) \equiv 0\ \forall\, n \geq 2$.

(4.) In Verallgemeinerung zu dem (3.) Beispiel ist folgender Prozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Ψ-mischend.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfülle die Bedingung:
Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ die Folgen $(X_j)_{j=0,\dots,n}, (X_{n+j+m})_{j\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind. Man setze $N = m$ und $\Psi(n) \equiv 0\ \forall\, n > N$.

Unter Ausnutzung des Satzes 31 können wir folgenden Konvergenzsatz zeigen.

Satz 32
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\sum_{n\geq N} \Psi(n) < +\infty$.

(1.) Aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} EX_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} VarX_n$ folgt die $[P]$-f.s. Konvergenz des Partialsummenprozesses $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(2.) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} VarX_n$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(α) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert bedingt P-stochastisch.

(β) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert P-stochastisch mit bedingter Summe und Γ_A ist eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beim Beweis dieses Resultats greifen wir auf zwei Hilfsresultate zurück, die wir zunächst angeben werden.

Lemma 2:
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender σ-Algebren in $(\Omega, \mathcal{F})$ mit gegebenen $N \in \mathbb{N}$ und Ψ. Es sei für ein festgewähltes $m \in \mathbb{N}_0$ $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_m$ eine σ-Unteralgebra. Dann gilt $\forall\, n \geq N$ und jede integrierbare und bezüglich $\mathcal{A}_{m+n}$ messbare Zufallsvariable X:

$$\left| E^{\mathcal{G}}(X) - EX \right| \leq \Psi(n) E|X| \qquad (*)$$

Beweis:

(α) $\forall\, B \in \mathcal{A}_{m+n}\ \forall\, A \in \mathcal{F}_m$ gilt: $\Big|P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big| \leq \Psi(n)P(B)$ $[P]$-f.s., denn es sei

$\Omega_1 := \Big\{\omega \in \Omega \Big| P^{\mathcal{F}_m}(B)(\omega) \geq P(B)\Big\} \in \mathcal{F}_m$

$\Longrightarrow \int\limits_A \Big|P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big| dP = \int\limits_{A\cap\Omega_1} \Big(P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big) dP - \int\limits_{A\cap\Omega_1^c} \Big(P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big) dP$
$\forall\, A \in \mathcal{F}_m$

$\int\limits_{A\cap\Omega_1} \Big(P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big) dP = |P(B \cap A \cap \Omega_1) - P(B)P(A \cap \Omega_1)| \leq$

$\Psi(n)P(B)P(A \cap \Omega_1) \leq \Psi(n)P(B)\ \forall\, A \in \mathcal{F}_m$

$$\Longrightarrow \Big|P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big| \mathbb{1}_{\Omega_1} \leq \Psi(n)P(B)\ \ [P] - \text{f.s.}$$

analog gilt:

$$\Big|P^{\mathcal{F}_m}(B) - P(B)\Big| \mathbb{1}_{\Omega_1^c} \leq \Psi(n)P(B)\ \ [P] - \text{f.s.}$$

$\underset{B \in \mathcal{A}_{m+n} \text{ beliebig}}{\Longrightarrow}$ (α)

(β) Ist X eine bezüglich $\mathcal{F}_m$ messbare Treppenfunktion, so folgt mit (α) die Beziehung ($*$). Unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen erhalten wir mit Standardschluß die Behauptung für integrierbares X.

(γ) Aus (α), (β) folgt die Behauptung ($*$) $\forall\ \sigma$-Unteralgebren $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_m$.

Eine analoge Argumentation wie im Beweis zum obigen Lemma liefert ein weiteres Resultat.

Lemma 3:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann gilt $\forall\, k \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq N$:

$$\Big|E(X_{k+n}X_k) - E(X_{k+n})E(X_k)\Big| \leq \Psi(n)\Big(E|X_{k+n}|^2\Big)^{1/2}\Big(E|X_k|^2\Big)^{1/2}$$

Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln können wir nun Satz 32 beweisen.

Beweis:
Durch g.g.f. zentrieren der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nehmen wir zunächst an, dass $EX_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ sei. Für festgewähltes $0 \leq k < N$ betrachten wir die Folge $\{X_{nN+k}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die σ-Algebra $\mathcal{G}_m$ sei definiert durch $\mathcal{G}_m = \sigma(X_{0N+k}, \ldots, X_{mN+k})$. Der Prozeß $\Big\{\sum\limits_{j=0}^{m} X_{jN+k}\Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist ein bezüglich $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ adaptierte, integrierbare Folge (man beachte, dass $\mathcal{G}$

eine Filtration ist).

Behauptung:
$\Big\{ \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist ein an $\mathcal{G}$ adaptiertes Martingal im Limes.

Beweis:
$$\sup_{n>m} \Big| E^{\mathcal{G}_m}\Big(\sum_{j=0}^{n} X_{jN+k} \Big) - \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big| = \sup_{n>m} \Big| E^{\mathcal{G}_m}\Big(\sum_{j=m+1}^{n} X_{jN+k} \Big) \Big|$$
$$\leq \sup_{n>m} \sum_{j=m+1}^{n} \Big| E^{\mathcal{G}_m}\Big(X_{jN+k} \Big) \Big| \underset{\text{Lemma 2}}{\leq} \sup_{n>m} \sum_{j=m+1}^{n} \Psi((j-m)N) E|X_{jN+k}|$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sup_{n>m} \sum_{j=m+1}^{n} \Psi((j-m)N)(E|X_{jN+k}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=m+1}^{\infty} \Psi((j-m)N)(E|X_{jN+k}|^2)^{\frac{1}{2}} \ (*)$$
Aus $\sum_{n\geq N} \Psi(n) < +\infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} EX_n^2 < +\infty$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=m+1}^{\infty} \Psi((j-m)N)(E|X_{jN+k}|^2)^{\frac{1}{2}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$.
Somit gilt: $\exists \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \Psi((j-m)N)(E|X_{jN+k}|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Aus $(*)$ folgt daher die Beziehung:

$$\exists \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \Big| E^{\mathcal{G}_m}\Big(\sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big) - \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big| = 0 \quad [P]-\text{f.s.}$$
$\Longrightarrow \Big\{ \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal im Limes.

Behauptung:
$\Big\{ \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist L^2-konvergent.

Beweis: $\forall\, a \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$E\Big(\sum_{j=a+1}^{a+n} X_{jN+k} \Big)^2 = \sum_{j=a+1}^{a+n} EX_{jN+k}^2 + 2 \cdot \sum_{a+1\leq i<j\leq a+n} E(X_{iN+k}X_{jN+k})$$
$$\underset{\leq}{\text{Lemma 3}} \sum_{j=a+1}^{a+n} EX_{jN+k}^2 + 2 \cdot \sum_{a+1\leq i<j\leq a+n} \Psi((j-i)N)(E(X_{iN+k}^2))^{\frac{1}{2}}(E(X_{jN+k}^2))^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sum_{j=a+1}^{a+n} E(X_{jN+k}^2) + 2 \cdot \Big(\sum_{\ell=1}^{n-1} \Psi(\ell N) \Big) \Big(\sum_{i=a+1}^{a+n} E(X_{iN+k}^2) \Big)$$
$$= \sum_{j=a+1}^{a+n} E(X_{jN+k}^2) \Big(1 + 2 \cdot \sum_{\ell=1}^{n-1} \Psi(\ell N) \Big)$$
Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} EX_n^2$ und $\sum_{n\geq N} \Psi(n)$ konvergieren absolut und somit jede ihrer Teilreihen. Daher erhalten wir aus der obigen Abschätzung, dass $\Big\{ \sum_{j=0}^{m} X_{jN+k} \Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ eine L^2-Cauchy-Folge ist.

Der Prozeß $\left\{\sum\limits_{j=0}^{m} X_{jN+k}\right\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ genügt daher insbesondere der Beziehung

$(*) \sup\limits_{m\in\mathbb{N}_0} E\left|\sum\limits_{j=0}^{m} X_{jN+k}\right| < +\infty.$

Aus Satz 31 folgt: $\exists\ [P] - \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{m} X_{jN+k}\ \forall\ 0 \leq k < N$

$\Longrightarrow\ \exists [P] - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$. Diese Aussage gilt für Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $EX_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Konvergiert daher die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$, so folgt die Behauptung (1.).

Es konvergiere die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ Var\ X_n$. Ist $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ Var\ X_{n_k}$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Ψ-mischend mit $\sum\limits_{n\geq N} \Psi(n) < +\infty$. Daher ist auch $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ Ψ-mischend mit $\sum\limits_{\substack{n_k\geq N\\ k\in\mathbb{N}_0}} \Psi(n_k) < +\infty$.

Betrachten wir die zentrierte Folge $(Y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$, d.h. $Y_{n_k} = (X_{n_k} - EX_{n_k}) \forall\ k \in \mathbb{N}_0$, so folgt aus den obigen Überlegungen:

$$\exists\ [P] - \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} Y_{n_k} \implies \exists\ P - \text{stoch} - \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} Y_{n_k}.$$

Mit Satz 5 schließen wir auf die unbedingte P-stochastische Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n - EX_n)$. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt P-stochastisch, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n$ bedingt und mit dem Riemann'schen Umordnungssatz folgt aus (α) die Aussage (β). Aus (β) folgt, gemäß Satz 3, (α). □

Bemerkung:
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $EX_n = 0 \forall\ n \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$-f.s. bereits dann, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1.) $\forall\ 0 \leq k < N$ gilt: $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}_0} E\left|\sum\limits_{j=0}^{m} X_{jN+k}\right| < +\infty$

(2.) Die Reihe $\sum\limits_{n\geq N} \Psi(n)(EX_n^2)^{\frac{1}{2}}$ konvergiert, wobei $(EX_n^2)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gelte.

Beweis: Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem Beweis zu Satz 32.

In Bezug auf die $[P]$-f.s. Konvergenz eines Partialsummenprozesses $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Ψ-mischenden Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man ein zu Satz 29 analoges Resultat formulieren. Zunächst einmal bemerken wir, dass auf die Existenz der 2. Momente der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Satz 32 verzichtet werden kann. Da bei Stutzung der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Ψ-Mischungseigenschaft erhalten bleibt, kann man unter Beachtung des

Borel-Cantelli-Lemma folgende Aussage formulieren:

Satz 33
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen mit $\sum\limits_{n\geq N}\Psi(n) < +\infty$. Existiert ein $c > 0$ so, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^c$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\ X_n^c$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\})$ konvergieren, erhalten wir die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

Satz 34
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen mit $\sum\limits_{n\geq N}\Psi(n) < +\infty$ und existieren ein $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)(\log\log(n+2))^{1+\varepsilon}\ Var\ X_n^c$ konvergiert, dann gilt:

(1.) Aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\}) < +\infty$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |EX_n^c| < +\infty$ folgt die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

(2.) Aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\}) < +\infty$ und der bedingten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^c$ folgt die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.
In diesem Fall ist Γ_A eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.

Beweis:
Mit Lemma 3 schließt man, dass $\{(X_n^c - EX_n^c)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein quasiorthogonaler Prozeß ist. Nun ist Satz 28 anwendbar und mit dem Lemma von Borel-Cantelli und dem Riemann'schen Umordnungssatz erhalten wir die Behauptung.

Bemerkungen:

(1.) Für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Ψ-mischender Zufallsvariablen, im Sinne der obigen Definition, folgt aus der P-stochastischen Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ nicht die $[P]$-f.s. Konvergenz.

(2.) Aus der bedingten L^2-Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$, mit Ψ-mischenden Summanden, kann nicht auf L^2-Konvergenz mit bedingter Summe geschlossen werden. Darüber hinaus zeigt das folgende Beispiel, dass Kriterium (1.) aus Satz 32 hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Beispiel
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen, die folgenden Bedingungen genügt:

(1.) $X_0 = 0$ $[P]$-f.s.

(2.) $EX_n = 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}, \; Var\; X_n = \frac{1}{n} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$

(3.) $\exists \, K > 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N} : |X_n| \leq K$ $[P]$-f.s.

Betrachten wir die Folge $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} X_k \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen, so erhalten wir aus dem Zwei-Reihen-Satz die $[P]$-f.s. Divergenz der stochastischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Mit $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen erklärt, die der Bedingung $Y_0 = 0$ $[P]$-f.s. und $Y_n = X_n - X_{n-1} \; \forall \, n \in \mathbb{N}_0$ genügt.

Aus (3.) erhalten wir somit eine gleichmäßig stochastisch beschränkte Folge $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$, so konvergiert diese im L^2-Sinn, denn $\forall \; N \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum\limits_{k=0}^{N} Y_k = X_N$ und $X_N \underset{N \to \infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} 0$.

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \; VarY_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ divergiert.

Die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ ist auch bedingt L^2-konvergent, denn:

Betrachten wir die Teilfolgen $\{Y_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\{Y_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, so sind diese Folgen von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen.

Ferner divergieren die Reihen der Varianzen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \; Var\; Y_{2n}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \; Var\; Y_{2n+1}$, so dass gemäß dem Zwei-Reihen-Satz die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{2n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{2n+1}$ $[P]$-f.s. und im L^2-Sinn divergieren. Hieraus folgt die oben aufgestellte Behauptung.

Behauptung:
Die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ konvergiert im L^2-Sinn
mit unbedingter Summe.

Beweis:
Es sei $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$, für die die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{g(n)}$ L^2-konvergent ist. Mit S_∞ bezeichnen wir den $L^2 - \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} Y_{g(k)}$.

Annahme: $\left(E\left[S_\infty^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} > 0$

$$\overset{L^2\text{-Konv.}}{\Longrightarrow} \quad \exists \, K \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \left(E\Big[\sum_{j=0}^{k} Y_{g(j)} - S_\infty\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{(E[S_\infty^2])^{\frac{1}{2}}}{4} \; \forall \, k \geq K (*)$$

Es sei $k > K$ festgewählt und $m := \max\{g(0), \dots g(k)\}$. Wir wählen nun $\ell > k$ so groß, dass in der Abschnittssumme $\sum\limits_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)}$ insbesondere alle Summanden $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ enthalten sind. Es ergibt sich somit:

$$\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} = \sum_{j=0}^{m} Y_j + \sum_{j \in M_m^\ell} Y_{g(j)}, \text{ wobei } M_m^\ell := \{j \in \{0, \dots \ell\} | g(j) > m\}.$$

Aufgrund der Konstruktion der Folge $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ergibt sich somit:

$$\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} = \sum_{j \in M_m^\ell} Y_{g(j)} + X_m$$

Da $\ell > k$ gewählt war, folgt somit gemäß $(*)$:

$$\Big(E\Big[\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} - S_\infty\Big]^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{(E[S_\infty^2])^{\frac{1}{2}}}{4} \quad (**)$$

$Y_r = X_r - X_{r-1} \; \forall \, r \geq 1$ und $m = \max\{g(0), \dots, g(k)\}, EY_r = 0 \; \forall \, r$

$$\Longrightarrow \; \forall \, j \in M_{m+1}^\ell \;\; : \;\; E\Big[\Big(\sum_{r=0}^{k} Y_{g(r)}\Big)\Big(\sum_{j \in M_m^\ell \cap M_{m+1}^\ell} Y_{g(j)}\Big)\Big] = 0$$

$$E\Big[\Big(\sum_{j=0}^{k} Y_{g(j)}\Big) X_m\Big] \leq 2EX_m^2$$

Insgesamt erhalten wir:

$E\Big[\Big(\sum\limits_{j=0}^{k} Y_{g(j)}\Big)\Big(\sum\limits_{j \in M_m^\ell} Y_{g(j)}\Big)\Big] \leq 2EX_m^2$, wobei $m = \max\{g(0), \dots, g(k)\}$ und $M_m^\ell := \{j \in \{0, \dots, \ell\} | g(j) > m\}$ ist.

Da $\sum\limits_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} = X_m + \sum\limits_{j \in M_m^\ell} Y_{g(j)}$ ist, folgt somit

$$(***) \;\; E\Big[\Big(\sum_{j=0}^{k} Y_{g(j)}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)}\Big)\Big] \leq 2EX_m^2, \text{ wobei } m = max\{g(0), \dots, g(k)\} \text{ ist.}$$

Aus den Beziehungen $\sum\limits_{j=0}^{k} Y_{g(j)} = S_\infty + \Big(\sum\limits_{j=0}^{k} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)$ und $\sum\limits_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} = S_\infty + \Big(\sum\limits_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)$ erhalten wir die Abschätzung (man beachte $(***)$):

$$E[S_\infty^2] + E\Big[S_\infty\Big(\sum_{j=0}^{k} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)\Big] + E\Big[S_\infty\Big(\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)\Big]$$
$$+E\Big[\Big(\sum_{j=0}^{k} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\ell} Y_{g(j)} - S_\infty\Big)\Big] \leq 2EX_m^2$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir hieraus

$$E[\mathcal{S}_\infty^2] \underset{(*),(***)}{\leq} \frac{E[S_\infty^2]}{4} + \frac{E[S_\infty^2]}{4} + \frac{E[S_\infty^2]}{16} + 2EX_m^2 = \frac{9}{16}E[S_\infty^2] + 2EX_m^2$$

Wir wissen, das $EX_m^2 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. Somit $\exists\, N \in \mathbb{N}_0 \;\forall\, m \geq N$ gilt: $EX_m^2 < \frac{1}{32}E[S_\infty^2]$

$$\Longrightarrow \; E[S_\infty^2] \leq \frac{5}{8}E[S_\infty^2] \Longrightarrow \text{ Widerspruch zu } (E[S_\infty^2])^{\frac{1}{2}} > 0$$

Somit muß $E[S_\infty^2] = 0$ gelten, d. h. jede L^2-konvergente Umordnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{g(n)}$ konvergiert gegen 0. □

Somit konvergiert die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ bedingt im L^2-Sinn, aber mit unbedingter Summe. Wir merken an, dass der Partialsummenprozeß $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} Y_k\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Markovprozeß ist, da die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige Zufallsvariablen sind.

Beispiel:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, mit $X_0 = 0$ und $P(\{X_n = 1\}) = p_n, P(\{X_n = 0\}) = 1 - p_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch: $Y_0 = X_0$ und $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge Ψ-mischender Zufallsvariablen. Ist $p_n = \frac{1}{n} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ $[P]$-f.s., denn: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ und mit dem Borel-Cantelli-Lemma folgt unter Beachtung der Konstruktion der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ die Behauptung. Allerdingt konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ P-stochastisch, da $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$ ist.

Definition 17:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von σ-Algebren in $(\Omega, \mathcal{F})$. Mit $\mathcal{F}_n := \sigma\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j\Big)$ heißt die Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-mischend, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine monoton fallende Funktion $\varphi : \{N, N+1, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\varphi(n) \downarrow 0$ für $n \to \infty$ so gibt, dass $\forall\, A \in \mathcal{F}_m \;\forall\, B \in \mathcal{A}_{m+n}$ $|P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leq \varphi(n)P(A)$ gilt.
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von reellwertigen Zufallsvariablen heißt φ-mischend, falls die Folge $(\sigma(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-mischend ist.

Bemerkung:
Jede Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Ψ-mischender Zufallsvariablen ist auch φ-mischend. Die Umkehrung gilt nicht.

Man erhält eine zu Lemma 2 analoge, aber schlechtere Abschätzung für bedingte

Erwartungen. Es gilt folgendes Resultat:

Lemma 4:
Es sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge φ-mischender σ-Algebren und X eine beschränkte Zufallsvariable, messbar in Bezug auf $\mathcal{A}_{m+n}$, wobei $n \geq N$ sei. Dann gilt für jede σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_m$ die Abschätzung:

$$\Big| E^{\mathcal{G}}(X) - EX| \leq 2 \cdot \varphi(n) \cdot C \; [P] - \text{f.s., wobei } |X| \leq C \text{ sei.}$$

Lemma 5:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von gleichmäßig beschränkten φ-mischenden reellwertigen Zufallsvariablen. Dann gilt $\forall\, n \geq N \;\forall\, m \in \mathbb{N}_0$:

$$|E(X_m X_{m+n}) - EX_m EX_{m+n}| \leq 2 \cdot \varphi(n) C^2$$

Hierbei ist $C > 0$ die gleichmäßige obere Schranke der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis:
$E(X_m X_{m+n}) - EX_m EX_{m+n} = E\Big(X_m\Big(E^{\mathcal{F}_m}\Big(X_{m+n}\Big) - EX_{m+n}\Big)\Big)$

$\Longrightarrow \; |E(X_m X_{m+n}) - EX_m EX_{m+n}| = \Big|E\Big[X_m\Big(E^{\mathcal{F}_m}(X_{m+n}) - EX_{m+n}\Big)\Big]\Big|$

$\leq CE\Big|E^{\mathcal{F}_m}(X_{m+n}) - EX_{m+n}\Big| \underset{\text{Lemma 4}}{\leq} \; 2c^2\varphi(n).$ □

Mit Satz 31, kann man analog zu Satz 33 folgendes Resultat formulieren und beweisen.

Satz 35
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge φ-mischender Zufallsvariablen mit $\sum\limits_{n\geq N} \varphi^{\frac{1}{2}}(n) < +\infty$.

(1.) Existiert ein $c > 0$ so, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} VarX_n^c$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^c$ konvergieren, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$-f.s. .

(2.) Existiert ein $c > 0$ so, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| > c\})$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} VarX_n^c$ konvergieren,so sind folgende Aussagen äquivalent:

- *(α) Der Partialsummenprozeß $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert bedingt P-stochastisch.*
- *(β) Der Prozeß $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert P-stochastisch mit bedingter Summe und Γ_A ist eine Lokationsfamilie von Zufallsvariablen.*

Beweis:
Man argumentiert analog wie im Beweis zu Satz 33. Man verwendet hierbei Lemma 4, Satz 32 und das Lemma von Borel-Cantelli. Darüber hinaus benötigt man folgende

Abschätzung:
$\forall\, X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit X messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$ und Y messbar bezüglich $\mathcal{A}_2$ gilt:

$$|E(XY) - EXEY| \leq 2\varphi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)(EX^2)^{\frac{1}{2}}(EY^2)^{\frac{1}{2}}$$

□

Definition 18:

Für eine reellwertige Zufallsvariable X sei $\text{essosc}\ X := \text{ess sup}\ X - \text{ess inf}\ X$.

Bemerkung:
Im Unterschied zu Satz 33 benötigen wir in Satz 35 die starke Voraussetzung an die Konvergenzgeschwindigkeit der $(\varphi(n))_{n\geq N}$ gegen 0. Möchte man die Voraussetzung $\sum\limits_{n\geq N} \varphi^{\frac{1}{2}}(n) < +\infty$ zu $\sum\limits_{n\geq N} \varphi(n) < +\infty$ abschwächen, benötigen wir die Bedingung $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\text{essosc}\ X_n^c)^2 < +\infty$, um einen Nachweis der $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ erbringen zu können. Es gilt dann folgender Satz.

Satz 36
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge φ-mischender reellwertiger Zufallsvariablen mit $\sum\limits_{n\geq N} \varphi(n) < +\infty$ und existiert ein $c > 0$ so, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX_n^c$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\text{essosc}\ X_n^c)^2$ konvergieren, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]$-f.s. .

Beweis:
Man nutze den Konvergenzsatz für Martingale im Limes unter Beachtung der folgenden Ungleichung:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq N : |E(X_m^c X_{m+n}^c) - EX_m^c EX_{n+n}^c| \leq \varphi(n)(\text{essosc}\ X_m^c)(\text{essosc}\ X_{m+n}^c)$$

□

Bemerkung:
Die obigen Konvergenzaussagen für Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit φ-mischenden Summanden $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man auch ohne Ausnutzung des Konvergenzsatzes für Martingale im Limes nachweisen. Allerdingt benötigt man die Voraussetzung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varphi\Big(\sigma\Big(\bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j\Big), \sigma\Big(\bigcup_{j=N+n}^{\infty} \mathcal{A}_j\Big)\Big) = \eta < 1 \quad (*)$$

Unter dieser Voraussetzung schließt man, wie in der Situation unabhängiger Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, aus der P-stochastischen Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X_j$ auf die $[P]$-f.s. Konvergenz derselbigen. Unter Ausnutzung einer Version einer Ottaviani-Ungleichung, kann man mit Voraussetzung $(*)$ diese Implikation nachweisen. [vgl.

Iosifescu, Theodorescu, Random-Processes and Learning, Seite14]

Im obigen Beweiszugang kann man auf die Voraussetzung $(*)$ ersatzlos verzichten. Diese Voraussetzung ist nötig, falls man aus der P-stochastischen Konvergenz auf die $[P]$-f.s. Konvergenz schließen möchte.

Es ist klar, dass man nun auch noch ein entsprechendes Analogon zu Satz 34 in der Situation φ-mischender Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ formulieren kann. Auf eine solche Formulierung kann hier verzichtet werden.

Definition 19:

Es sei $\underline{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß. $\underline{X}$ heißt m-abhängig, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ die Folgen $(X_j)_{j=0,\ldots,n}, (X_{n+j+m})_{j\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig sind.

Bemerkung:

(1.) Jede m-abhängige Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist offenbar Ψ-mischend.

(2.) Man kann nachweisen, dass ein reellwertiger Gaußprozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann m-abhängig ist, wenn er Ψ-mischend ist. [vgl. Blum, Hanson, Koopmans [1963]]

In Verallgemeinerung zur Situation von Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit unabhängigen Summanden kann man folgendes Resultat formulieren.

Satz 37
Es sei $\underline{X}$ ein reellwertiger m-abhängiger stochastischer Prozeß. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt $[P]^*$-f.s. genau dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\}), \sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\ X_n^c$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |EX_n^c|$ konvergieren. Insbesondere konvergiert eine bedingt $[P]^*$-f.s. konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe, falls es ein $c > 0$ gibt, für das die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\ X_n^c$ konvergiert.

Beweis:

(1.) Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt $[P]^*$-f.s., so konvergiert jede Teilreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} X_{n_k}$ $[P]$-f.s. . Betrachten wir für festgewähltes $0 \leq k < m$ speziell die Teilfolge $(X_{mj+k})_{j\in\mathbb{N}_0}$, so erhalten wir die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X_{mj+k}\ \forall\ 0 \leq k < m$. Die Folge $(X_{mj+k})_{j\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so dass wir aus dem Kolmogoroff'schen Drei-Reihen-Satz schließen: $\forall\ c > 0$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(\{|X_{mj+k}| \geq c\}), \sum_{j=0}^{\infty} Var\ X^c_{jm+k} \text{ sowie } \sum_{j=0}^{\infty} EX^c_{jm+k}\ \forall\ 0 \leq k < m$$

$\Longrightarrow\ \ \forall\ c > 0$ konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n| \geq c\}), \sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\ X^c_n$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX^c_n$. Aus der Annahme der bedingten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX^{\tilde{c}}_n$ für ein $\tilde{c} > 0$ könnte man auf bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ schließen und somit einen Widerspruch erzeugen.

$\Longrightarrow\ \forall\, c > 0$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |EX^c_n|$.

(2.) Aus der absoluten Konvergenz der obigen drei Reihen schließt man auf die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X_{jm+k}\ \forall\ 0 \leq k < m$. Hieraus folgt aber die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

(3.) Es konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt $[P]^*$-f.s., dann existiert ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ für das die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\gamma(n)}$ $[P]$-f.s. konvergiert und ein $\tilde{\gamma} \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ für das die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{\tilde{\gamma}(n)}$ nicht $[P]$-f.s. konvergiert.
Insbesondere konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $[P]$-f.s. mit $[P]-\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$. Für jedes festgewählte $0 \leq k < m$ gilt somit: $\exists\ [P]-\lim\limits_{n\to\infty} X_{mn+k} = 0$. Die Folge $(X_{mj+k})_{j\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen. Wir erhalten mit dem Borel-Cantelli-Lemma die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(\{|X_{mj+k}| > c\}) \quad \forall\, 0 \leq k < m \quad \forall\, c > 0.$$

Nach Voraussetzung konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Var\, X^{\overline{c}}_n$ für ein $\overline{c} > 0$ und somit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} Var\, X^{\overline{c}}_{jm+k}\ \forall\, 0 \leq k < m$.

<u>1. Fall:</u>
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |EX^{\overline{c}}_n| < +\infty \underset{(1.),(2.)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. . Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ bedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert.

<u>2. Fall:</u>
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX^{\overline{c}}_n$ divergiert.

Mit dem Zwei-Reihen-Satz für unabhängige Zufallsvariablen schließen wir auf unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(X^{\overline{c}}_{jm+k} - EX^{\overline{c}}_{jm+k}) \quad \forall\, 0 \leq k < m$. Da es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X^{\overline{c}}_{\gamma(n)}$ $[P]$-f.s. konvergent, folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX^{\overline{c}}_{\gamma(n)}$ und somit wegen des 1. Falls die bedingte Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} EX^{\overline{c}}_{n}$. Mit dem Riemann'schen Umordnungssatz folgert man die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe unter Verwendung des Lemma von Borel-Cantelli . $\square$

Wir geben abschließend ein Beispiel eines φ-mischenden stochastischen Prozesses $\underline{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, der nicht Ψ-mischend ist. Dabei greifen wir auf folgendes Resultat von Blum, Hanson und Koopmans zurück.

Satz 38
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein stationär ergodischer Markovprozeß (reellwertig). Dann sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Ψ-mischend ist:
$\exists\, M \in \mathbb{N}$ und ein $\beta \in (0,1)$ so, dass

(i) $p^{(M)}(x,\cdot)$ *ist absolut stetig in Bezug auf die stationäre Wahrscheinlichkeit* π.*(*$p^{(M)}(x,\cdot)$ *ist hier der M-Schritt Übergangskern)*

(ii) $\pi \otimes \pi(\{|a^{(M)}(x,y)| > \beta\}) = 0$

Hierbei sei $a^{(M)}(x,y) := g^{(M)}(x,y) - 1$ und $g^{(M)}(x,y)$ die Dichte von $p^{(M)}(x,\cdot)$ in Bezug auf π.

Beweis:
[Blum, Hanson, Koopmans; Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie [1963], Seite 8 ff]

Das folgende Resultat findet man in „Stochastic Processes" von Doob auf Seite 197 ff.

Satz 39
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stationärer Markovprozeß (reellwertig). Es existiere ein Maß μ auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ mit $0 < \mu(\mathbb{R}) < +\infty$ und ein $\nu \in \mathbb{N}, \delta > 0$ sowie eine Menge $C \in \mathcal{B}$ mit $\mu(C) > 0$ und $f_0^{(\nu)}(\xi,\eta) \geq \delta, \xi \in \mathbb{R}, \eta \in C$.

Hierbei sei $f_0^{(\nu)}(\xi,\cdot)$ die Dichte des in Bezug auf μ absolut stetigen Teils von $p^{(\nu)}(\xi,\cdot)$. Dann existiert eine stationäre absolute Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\cdot)$ mit $\pi(C_1) \geq \delta\mu(C_1)$, falls $C_1 \subset C$ und es gilt $\forall\, A \in \mathcal{B}, \xi \in \mathbb{R}$:
$|p^{(n)}(\xi,A) - \pi(A)| \leq [1 - \delta\mu(C)]^{(\frac{n}{\nu})-1}, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

(1.) In der Situation von Satz 39 ist der Markovprozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-mischend, gemäß der Definition des φ-Koeffizienten, falls $[1-\delta\mu(C)]^{(\frac{n}{\nu})-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt.

(2.) Es sei $\underline{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stationär ergodischer Markovprozeß mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}$, Initialverteilung π und Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. Aus Satz 38 (ii) folgert man, dass folgende Bedingung für die Ψ- Mischungseigenschaft von $\underline{X}$ notwendig ist:

$$\exists\, M \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \geq M\ \forall\, i,j \in \mathbb{N} \text{ ist } q_{ij}^{(\nu)} > 0.$$

Beispiel:
Es sei $\underline{X}$ ein stationärer Markovprozeß mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}$ und Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$.
Es gelte $q_{ij} = \frac{1}{2}$, falls $j = 1$ oder $j = i$ und $q_{ij} = 0$ sonst. Dann ist $\underline{X}$ ein stationär ergodischer Markovprozeß mit stationärer Verteilung π, die folgende Eigenschaft besitzt: $\forall\, i \in \mathbb{N}$ ist $\pi(\{i\}) = \frac{1}{2^i}$. Es gilt allerdings: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, i,j \in \mathbb{N}$ mit $q_{ij}^{(n)} = 0$.
Somit schließen wir aus Bemerkung (2.), dass $\underline{X}$ nicht Ψ-mischend ist.

Behauptung:
$\underline{X}$ ist φ-mischend.

Beweis:
$\underline{X}$ erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 39, denn man setze dort $\mu = \pi, \nu = 1, \delta = \frac{1}{2}$ sowie $C = \{1\}$. Dann folgt $\forall\, A \in 2^{\mathbb{N}}, i \in \mathbb{N} : |p^{(n)}(i,A) - \pi(A)| \leq [1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Unter Beachtung von Bemerkung (1.) folgt die Behauptung.

Kapitel V

Bedingte und unbedingte Konvergenz asymptotischer Martingale

Innerhalb dieses Kapitels wird das Verhalten asymptotischer Martingale bezüglich der Umordnung ihrer Zuwächse hinsichtlicher der $[P]$-f.s., der stochastischen Konvergenz und der L^p-Konvergenz untersucht. Zunächst einmal stellen wir einige grundlegende Begriffsbildungen und Resultate für asymptotische Martingale zusammen. Innerhalb dieses Kapitels sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein an die kanonische Filtration adaptierter Partialsummenprozeß, d.h. $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n) \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$. Da wir in späteren Abschnitten Resultate für Prozesse $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ in Hilberträumen bzw. Banachräumen formulieren werden, führen wir folgende allgemeine Definition ein.

Definition 20:

(1.) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein darauf definierter stochastischer Prozeß mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||)$. Ist der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so heißt $\underline{S}$ asymptotisches Martingal, falls das Netz $(E[S_\tau])_{\tau \in \Sigma}$ in $(E, ||\cdot||)$ konvergiert. Hierbei ist Σ die Menge aller beschränkten Stoppzeiten bezüglich $\mathbb{F}$. Σ wird zu einer gerichteten Menge durch die Definition: $\sigma, \tau \in \Sigma,\ \sigma \leq \tau :\Longleftrightarrow\ \sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ für $[P]$-fast alle $\omega \in \Omega$.

(2.) Ein Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt Martingal, falls $\forall\ m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ die Beziehung $E^{\mathcal{F}_m}[S_n] = S_m$ $[P]$- f.s. gilt.

(3.) Ein Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt Quasimartingal, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} E\Big[||E^{\mathcal{F}_n}[S_{n+1}] - S_n||\Big]$ konvergiert.

Bemerkungen:

(1.) Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal oder Quasimartingal, so ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ schon ein asymptotisches Martingal.

(2.) Jedes Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist trivialerweise ein Quasimartingal.

Satz 40 *(Optimal sampling theorem)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein asymptotisches Martingal mit Werten in $(E, ||\cdot||)$. Ist $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine isotone Folge von Stoppzeiten in Σ, dann ist der Prozeß $\{S_{\sigma_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ein asymptotisches Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_{\sigma_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis: [Edgar & Sucheston, Seite 185]

Definition 21:

Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $\mathcal{M} := \{\mu | \mu \text{ ist Vektormaß von endlicher Variation}\}$

$(E, ||\cdot||)$ besitze die Radon-Nikodym-Eigenschaft, falls $\forall$ Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und alle $\mu \in \mathcal{M}, \mu : \mathcal{F} \longrightarrow E$, mit $\mu << P$ gilt: $\exists$ Bochner-integrierbare Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow E$ mit $\mu(A) = E[X \mathbb{1}_A] \, \forall \, A \in \mathcal{F}$.
X heißt eine Radon-Nikodym-Derivierte von μ bezüglich P.

Definition 22:

Ein Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ heißt uniformes asymptotisches Martingal, falls $\underline{S}$ aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist und folgende Bedingung erfüllt ist: $\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, m_0 \in \mathbb{N}_0 \, \forall \, \tau, \sigma \in \Sigma$ mit $m_0 \leq \sigma \leq \tau$

$$E\Big[||E^{\mathcal{F}_\sigma}[S_\tau] - S_\sigma||\Big] < \varepsilon.$$

Bemerkung:
Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein uniformes asymptotisches Martingal, so ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein asymptotisches Martingal. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Ein Beispiel hierzu findet man in
[Edgar & Sucheston, Seite 197]. Allerdings sind im reellwertigen Fall beide Begriffsbildungen äquivalent.Auf die L^1-Beschränktheit von $\underline{S}$, sowie der RNE von E kann in dem folgenden Resultat verzichtet werden, falls $\underline{S}$ ein uniformes asymptotisches Martingal ist.

Satz 41 *(Riesz-Zerlegung)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein asymptotisches Martingal mit Werten in $(E, ||\cdot||)$. $(E, ||\cdot||)$ besitze die Radon-Nikodym-Eigenschaft. Ist $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E||S_n|| < +\infty$, so existiert eine $[P]$-f.s. eindeutige Zerlegung $S_n = M_n + Z_n \, \forall \, n \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal und $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ erfüllt die Bedingung: $\lim\limits_{n \to \infty} ||E[Z_n \mathbb{1}_A]|| = 0 \, \forall \, A \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m$.

Beweis: [Edgar & Sucheston, Seite 193]

Bemerkung:
Ist $\underline{S}$ ein uniformes asymptotisches Martingal, so konvergiert das Netz $(Z_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ $[P]$-f.s. und im L^1-Sinn.

Im folgenden führen wir eine neue Begriffsbildung im Zusammenhang mit asymptotischen Martingalen ein. Darüber hinaus kürzen wir ab nun die Bezeichnung asymptotisches Martingal in amart ab.

Definition 23:

Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein amart mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||)$.

(i) Die Folge $(X, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Zuwächse von $\underline{S}$ bezeichnen wir mit ADF (Differenzenfolge eines asymptotischen Martingals).

(ii) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ heiße unbedingtes amart, falls das aus der Riesz-Zerlegung resultierende amartpotenzial unbedingt P-stochastisch konvergiert.

Satz 42

(1.) Jedes Martingal, Quasimartingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *mit Werten in einem Hilbertraum* $(H, <;>)$ *ist ein unbedingtes uniformes amart.*

(2.) Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein* L^1 *beschränktes Submartingal, Supermartingal mit Werten in* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *so ist* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein unbedingtes amart.*

Beweis:
siehe im Anschluß an den Beweis zu Satz 61.

Nicht jedes amart $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein unbedingtes amart. Hierzu geben wir ein einfaches Beispiel an.

Beispiel: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konstruierte Partialsummenfolge. Konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein deterministisches amart und umgekehrt. Man wähle lediglich als Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die triviale Filtration, d.h. $\mathcal{F}_n = \{\emptyset, \Omega\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

(α) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, so ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein unbedingtes amart und umgekehrt.

(β) Konvergiert hingegen die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt, so ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kein unbedingtes amart.

Definition 24:

Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Prozeß aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, ||\cdot||)$ und $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Folge seiner Zuwächse. Für $a \in \mathbb{R}^+$ sei $\tau_a := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : ||S_n|| > a\}$ die Eintrittszeit der Bariere a. $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ heiße der Klasse C zugehörig, falls $E\Big[||X_{\tau_a}1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}}||\Big] < +\infty$ gilt und dies $\forall\, a > 0$.

Satz 43
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein Martingal (Quasimartingal) mit Werten in* $(E, ||\cdot||)$ *und* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E||S_n|| < +\infty$. *Dann ist* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *der Klasse* C *zugehörig.*

Beweis:

(1.) Da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal ist, folgt mit Satz 40, dass der gestoppte Prozeß $\underline{S}^\tau = \{S_{\tau\wedge n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls ein Martingal ist und das für jede Stoppzeit τ. Definieren wir $A := \{\tau < +\infty\}$, so folgt: $\exists\ [P] - \lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau\wedge n}1\!\!1_A = S_\tau 1\!\!1_A$.

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} E\Big[||S_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] &= E\Big[\liminf_{n\to\infty} ||S_{\tau\wedge n}||\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\Big] \\ &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} E\Big[||S_{\tau\wedge n}||\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\Big] \leq \liminf_{n\to\infty} E\Big[||S_{\tau\wedge n}||\Big]. \end{aligned}$$

Da $\{||S_{\tau\wedge n}||\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein reellwertiges Submartingal ist, folgt :
$E\Big[||S_{\tau\wedge n}||\Big] \leq E\Big[||S_n||\Big]$.

Somit gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E\Big[||S_{\tau\wedge n}||\Big] \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E[||S_n||]$
$\implies E\Big[||S_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E[||S_n||] < +\infty \implies E\Big[||X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] < +\infty$.

(2.) Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Quasimartingal.

$$\implies S_n = X_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Big(X_k - E^{\mathcal{F}_{k-1}}(X_k)\Big)}_{=:M_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} E^{\mathcal{F}_{k-1}}(X_k)}_{=:A_n} \quad \forall\, n \geq 1.$$

$\implies$ $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit $M_0 = 0$ ist ein Martingal und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E[||M_n||] < +\infty$, da $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E[||S_n||] < +\infty$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E\Big[||E^{\mathcal{F}_{k-1}}(X_k)||\Big] < +\infty$. Somit gilt für eine beliebige Stoppzeit τ gemäß (1.) $E\Big[||M_\tau||\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\Big] < +\infty$. Wir bezeichnen die Zuwächse von $(\underline{A}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit $(\underline{Y}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$. Da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Quasimartingal ist, folgt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||Y_n|| < +\infty$ $[P]$-f.s. und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E||Y_n|| < +\infty$. Ist demnach τ eine Stoppzeit bezüglich $\mathbb{F}$, so gilt:

$$E\Big[||Y_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] = E\Big[\sum_{n=0}^{\infty} ||Y_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}||\Big] \leq \sum_{n=0}^{\infty} E||Y_n|| < +\infty.$$

$\implies E\Big[||Y_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] < \infty$ und $E\Big[||\Delta M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] < +\infty$, wobei
$\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$.

Somit folgt unter Verwendung der Doob-Zerlegung, dass die Folge $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Zuwächse von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Beziehung $E\Big[||X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] < +\infty$ genügen.
□

Bemerkung:
Analog zeigt man, dass ein L^1-beschränktes reellwertiges Submartingal (Supermartingal) aus der Klasse C ist. Auch hier gilt für τ die Beziehung $E\Big[||X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}||\Big] < +\infty$
Allgemeiner kann man für die Klasse uniformer amarts folgendes Resultat formulieren.

Satz 44
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein banachraumwertiges uniformes amart mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||S_n|| < +\infty$. *Dann ist* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein Prozeß aus der Klasse* C.

Beweis:

(1.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein amart, somit folgt unter Verwendung von Satz 41 :
$\underline{S} = \underline{M} + \underline{Z}$, wobei $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal und $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein amartpotenzial ist und das Netz $\{Z_\tau\}_{\tau\in\Sigma}$ $[P]$-f.s. und im L^1-Sinn konvergiert.
Somit gilt insbesondere $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||Z_n|| < +\infty$. Daher ist das Martingal $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ L^1-beschränkt.
$(||M_n||)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein L^1-beschränktes nichtnegatives Submartingal und wir können auf $\sup_{\sigma\in\Sigma} E||M_\sigma|| < +\infty$ schließen.
Aus der L^1-Konvergenz von $\{Z_\tau\}_{\tau\in\Sigma}$ erhalten wir $\sup_{\sigma\in\Sigma} E||Z_\sigma|| < +\infty$
$\Longrightarrow \sup_{\sigma\in\Sigma} E||S_\sigma|| < +\infty$ (Man beachte die Riesz-Zerlegung).

(2.) Es gilt $S_{\tau_a\wedge n}(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_{\tau_a}(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}$.
Mit dem Lemma von Fatou ergibt sich die Abschätzung
$E||S_{\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}|| \le \liminf_{n\to\infty} E||S_{\tau_a\wedge n}\mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}||$
$\le \liminf_{n\to\infty} E||S_{\tau_a\wedge n}|| \le \sup_{\sigma\in\Sigma} E||S_\sigma|| < +\infty$
$\Longrightarrow E||X_{\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}|| < +\infty \ \forall a > 0$.
$\Longrightarrow$ Behauptung.

$\square$

Bemerkungen:

(1.) Wir werden an späteren Beispielen nachweisen, dass die Klasse asymptotischer Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus C eine echte Oberklasse der L^1-beschränkten amarts ist. D. h., es gibt amarts $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||S_n|| = +\infty$, die der Klasse C zugehörig sind.

(2.) Es wird sich herausstellen, dass $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe, in der Situation von Martingalen, im allgemeinen keine unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz impliziert.

Wir kommen nun zu einem Satz, der die Frage der bedingten und unbedingten $[P]^*$-f.s. -bzw. P-stochastischen Konvergenz für unbedingte amarts klärt. Die Voraussetzungen können im allgemeinen nicht mehr abgeschwächt werden, wie wir später an Beispielen sehen werden.

Satz 45
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges unbedingtes amart aus der Klasse* C. *Erfüllt das amart* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *die Bedingung* $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]$*-f.s., so gelten folgende Aussagen:*

(1.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert unbedingt* P*-stochastisch.*

(2.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert* $[P]^*$*-f.s. mit unbedingter Summe,*
aber im allgemeinen nicht unbedingt $[P]^*$*-f.s. .*

Beim Beweis unserer obigen Behauptung verwenden wir ein auch für sich alleine gesehenes interessantes Zerlegungsresultat für L^1-beschränkte Martingale. Dieses Resultat stammt von R.F. Gundy.

Satz 46 *(Gundy)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges Martingal mit* $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$. *Dann existieren* $\forall\ K > 0$ *Martingale* $(T^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0), (\underline{U}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0), (\underline{V}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1.) $S_n = T_n^K + U_n^K + V_n^K$ $[P]$*-f.s.* $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

(2.) $P\Big(\Big\{ \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \Big|T_n^K\Big| > 0 \Big\}\Big) \leq \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n|}{K}$

(3.) $E\Big[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big| U_n^K - U_{n-1}^K \Big| \Big] \leq 4 \cdot \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n|$

(4.) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E\Big[V_n^K\Big]^2 \leq 2 \cdot K \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n|$

Beweis: [Stout, almost sure convergence,Page44]

Nun sind wir in der Lage Satz 45 zu beweisen.

Beweis:

(1.) Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein L^1-beschränktes Martingal, dann folgt mit Satz 42, dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes amart aus der Klasse C ist.
Definieren wir $\Omega_K := \Big\{ \omega \in \Omega : \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \Big| T_n^K(\omega) \Big| = 0 \Big\} \overset{\text{Satz 46 (2.)}}{\Longrightarrow} \Omega = \bigcup\limits_{K \in \mathbb{N}} \Omega_K [P]$-f.s. . Sei $\varepsilon > 0$ festgewählt $\Longrightarrow\ \exists\ K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $P(\Omega_{K_\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$ und das gemäß Satz 46 zu K_ε existierende Martingal $(T^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ erfüllt die Bedingung:
$T_n^{K_\varepsilon}(\omega) = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0\ \forall\ \omega \in \Omega_{K_\varepsilon}$. Somit ist $(T^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ auf Ω_{K_ε} trivialerweise absolut $[P]$-f.s. konvergent. Das Martingal $(\underline{U}^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ genügt gemäß Satz 46 (3.) und der L^1-Beschränktheit von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Beziehung:

$E\Big[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big| U_n^{K_\varepsilon} - U_{n-1}^{K_\varepsilon} \Big| \Big] < +\infty$. Hieraus folgt die absolute $[P]$-f.s. Konvergenz

von $(\underline{U}^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$. Das L^2-Martingal $(\underline{V}^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist wegen (4.) in Satz 46 und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$ L^2-beschränkt. Da $\underline{V}^{K_\varepsilon}$ paarweise orthogonale Zuwächse besitzt und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E\Big[V_n^{K_\varepsilon}\Big]^2 < +\infty$ gilt, folgt die unbedingte L^2-Konvergenz und somit die unbedingte P-stochastische Konvergenz von $(\underline{V}^{K_\varepsilon}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$.
Somit folgt aus Satz 46 (1.) in Verbindung mit den obigen Überlegungen, dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ auf Ω_{K_ε} unbedingt P-stochastisch konvergiert. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt aufgrund von $\Omega = \bigcup\limits_{K\in\mathbb{N}} \Omega_K [P]$-f.s. die unbedingte P-stochastische Konvergenz von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ auf Ω. Gemäß dem Doob'schen Konvergenzsatz konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s. . Ist somit $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{g(n)}$ $[P]$-f.s. konvergiert, dann gilt:

$P\Big(\Big\{\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{g(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n\Big\}\Big) = 1$, da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch konvergiert.

(2.) Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes amart mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$. Gemäß Satz 41 existieren $[P]$-f.s. eindeutig bestimmte Prozesse $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ und $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit $S_n = M_n + Z_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, wobei $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal ist und $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Eigenschaft besitzt, dass das Netz $(Z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ $[P]$-f.s. und im L^1-Sinn konvergiert. $(Z, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert gemäß der Definition eines unbedingten amarts unbedingt P-stochastisch.

(3.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist aus der Klasse C mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]$-f.s. .
Für ein festgewähltes $a > 0$ betrachten wir die Stoppzeit
$\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : |S_n| > a\}$. Unter Verwendung von Satz 40 sieht man, dass $\underline{S}^{\tau_a} = \Big(S_{\tau_a\wedge n}\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein amart ist.

Behauptung:
$\underline{S}^{\tau_a}$ ist L^1-beschränkt.

Beweis:
$\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Big|S_{\tau_a\wedge n}\Big| = \sum_{m=0}^{n} \Big|S_m\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a=m\}} + \Big|S_n\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a>n\}}$$

$$\Longrightarrow E\Big[\Big|S_{\tau_a\wedge n}\Big|\Big] = E(\sum_{m=0}^{n} \Big[\Big|S_m\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a=m\}}\Big]) + E\Big[\Big|S_n\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a>n\}}\Big]$$

$$\leq E(\sum_{m=0}^{n} \Big[\Big|S_m\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a=m\}}\Big]) + a$$

$$\Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E\Big[\Big|S_{\tau_a\wedge n}\Big|\Big] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(\sum_{m=0}^{n} \Big[\Big|S_m\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a=m\}}\Big]) + a$$

$$\leq E(\Big|S_{\tau_a}\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}) + a$$

$$\leq E(\Big|S_{\tau_a-1}\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}) + E(\Big|X_{\tau_a}\Big| \mathbb{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}) + a$$

$\leq 2a + E(\left|X_{\tau_a}\right| \mathbb{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}) < +\infty$

Aus dem Konvergenzsatz für L^1-beschränkte amarts erhalten wir:

$$\exists\ [P] - \lim_{n\to\infty} S_{\tau_a \wedge n} =: S_\infty^{\tau_a} \text{ und } S_\infty^{\tau_a} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Aus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]$-f.s. folgt: $\Omega = \bigcup\limits_{a\in\mathbb{N}} \{\tau_a = +\infty\}[P]$-f.s. . $(*)$

Auf $\{\tau_a = +\infty\}$ gilt: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(S_{\tau_a\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert $[P]$-f.s. .

Aus der Riesz-Zerlegung von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ folgt:
$\underline{S}^{\tau_a} = \underline{M}^{\tau_a} + \underline{Z}^{\tau_a}$ $[P]$-f.s., wobei $\underline{M}^{\tau_a}$ das aus Stoppen von $\underline{M}$ durch τ_a resultierende Martingal ist. $\underline{Z}^{\tau_a}$ ist L^1-konvergent und somit L^1-beschränkt. Aus der obigen Überlegung wissen wir, dass $\underline{S}^{\tau_a}$ ebenfalls L^1-beschränkt ist. Somit ist aber $\underline{M}^{\tau_a}$ L^1-beschränkt.

$\overset{(1.)}{\Longrightarrow}$ $\underline{M}^{\tau_a}$ konvergiert unbedingt P-stochastisch und ist darüber hinaus $[P]$-f.s. konvergent.

Es gilt $\left\{M_{\tau_a\wedge n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\{\tau_a = +\infty\}$.
Somit konvergiert $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch auf $\{\tau_a = +\infty\}$ $\forall\ a > 0$.

$\overset{(*)(2.)}{\Longrightarrow}$ $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert unbedingt P-stochastisch und $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe. $\square$

Bemerkung:
Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein reellwertiges Submartingal (Supermartingal) aus der Klasse C mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]-$f.s., so gelten ebenfalls die Aussagen aus Satz 45.

Die Zugehörigkeit zur Klasse C eines unbedingten amarts $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist zwar gemäß Satz 45 hinreichend, aber keineswegs notwendig für eine unbedingte P-stochastische Konvergenz von $\underline{S}$. Man kann sogar ein Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konstruieren, welches absolut $[P]$-f.s. konvergiert, aber für das $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| = +\infty$ gilt.

Beispiel 1
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \lambda|_{\mathcal{B}\cap[0,1]}|)$.
Wir definieren darauf folgenden Partialsummenprozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$:
$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei erklärt über $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma\Big(\Big\{\Big[0, \frac{1}{2^n}\Big[, \ldots, \Big[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\Big]\Big\}\Big)$ $\forall\ n \geq 1$.

$S_0 := 0$ $[P]$-f.s. und $S_1 := 2^0 \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - 2^0 \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, sowie

$S_n := 4^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^n}[} - 2^{2n-3} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}[} - S_{n-1} \mathbb{1}_{[\frac{2}{2^n},1]} \quad (n \geq 2)$

(1.) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist an $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert und integrierbar.

(2.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein Martingal, denn

$$\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_{n+1} dP = \int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_n dP \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Man rechnet nämlich folgendes nach:

$\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_{n+1} dP = 4^n \int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^{n+1}}[} d\lambda - 2^{2(n+1)-3} \int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{2}{2^{n+1}}[} d\lambda -$

$\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_n \mathbb{1}_{[\frac{2}{2^{n+1}},1]} d\lambda$

$$\underset{[2/2^{n+1},1] \cap [0,\frac{1}{2^n}[= \emptyset}{=} 4^n \lambda\Big(\Big[0, \frac{1}{2^{n+1}}\Big[\Big) - 2^{2n-1} \lambda\Big(\Big[\frac{1}{2^{n+1}}, 2/2^{n+1}\Big[\Big) = 4^n \cdot 2^{(n+1)} - 2^{2n-1} \cdot 2^{-(n+1)}$$

$$= 2^{-(n+1)} \Big(2^{2n} - \tfrac{1}{2} 2^{2n}\Big) = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{-(n+1)} = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

$$= \underbrace{\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} 4^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^n}[} d\lambda}_{=4^{n-1} \cdot 2^{-n}} - \underbrace{\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} 2^{2n-3} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}[} d\lambda}_{=0} - \underbrace{\int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_{n-2} \mathbb{1}_{[\frac{2}{2^n},1]} d\lambda}_{=0} = \int\limits_{[0,\frac{1}{2^n}[} S_n dP$$

Aufgrund der Konstruktion der Filtration $\mathbb{F}$ und des Prozesses $\underline{S}$ ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal.

(3.) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n| = +\infty$, denn

$$E|S_n| = E\Big|4^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^n}[} - 2^{2n-3} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n},2/2^n[} - S_{n-1} \mathbb{1}_{[2/2^n,1]}\Big|$$

$$= 4^{n-1} \lambda([0, \tfrac{1}{2^n}[) + 2^{2n-3} \lambda([\tfrac{1}{2^n}, 2/2^n[) + E|S_{n-1} \mathbb{1}_{[2/2^n,1]}|$$

$$\geq 4^{n-1} \lambda([0, \tfrac{1}{2^n}[) + 2^{2n-3} \lambda([\tfrac{1}{2^n}, 2/2^n[)$$

$$= 2^{2n-2} \cdot 2^{-n} + 2^{2n-3} \cdot 2^{-n} = 2^{n-2} + 2^{n-3} \geq 2^{n-2} \; \forall \; n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \sup_n E|S_n| \geq \sup_n (2^{n-2}) = +\infty.$$

(4.) Das Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert absolut $[P]$-f.s. und somit absolut P-stochastisch.

Begründung:
Für ein festewähltes $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $G_N := [2/2^N, 1]$.
$\Longrightarrow P(G_N) = \lambda([2/2^N, 1]) = \frac{2^N - 2}{2^N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1.$
Es gilt: $\Omega = \bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}} G_N$. Betrachten wir das Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ auf G_N, wobei $N \in \mathbb{N}$ festgewählt sei.
Wir erhalten $\forall \; \omega \in G_N \; \forall \; n > N : S_n^{(\omega)} - S_{n-1}^{(\omega)} = 0$

$\Longrightarrow \underline{S}$ konvergiert absolut in $\omega \in G_N$.
Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war und $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_N$ gilt, folgt somit die absolute $[P]$-f.s. Konvergenz des Prozesses $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$.

(5.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist in diesem Beispiel der Klasse C zugehörig und aufgrund von (4.) gilt: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]$-f.s. .
Es sei $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 |\ |S_n| > a\}$, wobei $a > 0$ festgewählt ist. Aus der Konstruktion des Prozesses folgt: $\exists\ N_a \in \mathbb{N}_0 \forall n > N_a \forall \omega \in [0, 2/2^{N_a}[$ gilt $|S_n| > a$. Wir erhalten $\{\tau_a = \infty\} \supseteq \{\tau_a > N_a\}$ und somit $\{\tau_a < \infty\} \subseteq \{\tau_a \leq N_a\}$.
Hieraus erhalten wir die Abschätzung $E|S_{\tau_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}}| \leq E|S_{N_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}}| \leq E|S_{N_a}| < +\infty$.
Also gilt insbesondere $E|X_{\tau_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}}| < +\infty$.

Beispiel 2
Wir betrachten wiederum den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1]; \mathcal{B} \cap [0,1]; \lambda|_{\mathcal{B}\cap[0,1]})$. Die Familie der Mengen $\{A_{n,i}\}_{1\leq i\leq 2^n, n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $A_{n,i} := \left]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]$.
Die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen sei definiert durch:

$$X_{2^m+1}(\omega) = \begin{cases} 2^{m/2}, & 0 < \omega < 2^{-(m+1)} \\ -2^{m/2}, & 2^{-(m+1)} < \omega < 2^{-m}, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$X_{2^m+j}(\omega) = X_{2^m+1}(\omega - \frac{j-1}{m}), j = 1, \ldots, 2^m.$

$\underline{X}$ heißt Haar'sches Orthogonalsystem, denn: $EX_k = 0\ \forall\ k, EX_k^2 = 1\ \forall\ k$ und $E[X_k X_\ell] = 0\ \forall\ k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \neq \ell$. Die Filtration $\mathbb{F}$ sei die kanonische Filtration zu $\underline{X}$.
Bekanntlich ist $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N})$ eine MDF aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ den linearen Raum der $\mathcal{F}_k$- messbaren Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ist bekanntlich die orthogonale Projektion eines $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ auf $\mathcal{M}$ gegeben durch:

$$E^{\mathcal{F}_k}(Z) = \sum_{\ell=1}^{k} < Z, X_\ell > X_\ell \text{ mit } < Z, X_\ell > := E[ZX_\ell]\ \forall\ \ell.$$

Der Prozeß $\{E^{\mathcal{F}_k}(Z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein an $\mathbb{F}$ adaptiertes L^2-Martingal. Es gilt:

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} E\Big|E^{\mathcal{F}_n}(Z)\Big|^2 < +\infty$, da $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist.
Somit folgt mit Satz 45, dass dieser Prozeß unbedingt P-stochastisch und $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe konvergiert.

Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N})$ konvergiert allerdings im allgemeinen nicht unbedingt $[P]^*$-f.s.. Unter Verwendung des folgenden Satzes können wir diese Behauptung nachweisen.

Satz 47
Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *das Haar'sche Orthogonalsystem.*
Ferner sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen. Dann konvergiert die Haar-Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ *unbedingt* $[\lambda]^*$*-f.ü. genau dann, wenn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ *absolut* $[\lambda]$*-f.ü. konvergiert.*

Beweis: [Khasin, Orthogonal-Series, Seite 93]

Es sei für festgewähltes $k \in \mathbb{N}$ $\{X_{k,i}\}_{i=1}^{2^k}$ der k-te Block des Haar'schen Orthogonalsystems, d.h. $X_k = \sum\limits_{i=1}^{2^k} X_{k,i}$.

Wir betrachten nun die Haar-Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k/2}k} \sum\limits_{i=1}^{2^k} X_{k,i} \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}k} X_k$.
Aus der Konstruktion des Haar'schen ONS folgt: $|X_k| = 2^{k/2}[\lambda]$-f.ü. $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

$\implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{k/2}k} X_k \right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Somit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}k} X_k$ gemäß Satz 47 bedingt $[P]^*$-f.s. .

Andererseits genügt die Folge $\left\{ \frac{1}{2^{k/2}k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ der Bedingung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k/2}k} \right)^2 < +\infty$. Das Haar'sche Orthogonalsystem ist vollständig und $\left\{ \frac{1}{2^{k/2}k} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Aus dem Satz von Riesz-Fischer können wir somit auf die Existenz einer Zufallsvariablen $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ schließen mit:

$$< Z, X_k >= \frac{1}{2^{k/2}k} \;\forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die obige Haar-Reihe die Fourierentwicklung einer Zufallsvariablen $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nach diesem ONS. Das Martingal $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k/2}k} X_k \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert somit unbedingt P-stochastisch und $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe.

Dieses Beispiel zeigt, dass bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz reellwertiger Prozesse $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit stochastisch abhängigen Zuwächsen $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ nicht zwangsläufig $[P]^*$-f.s. bedingter Summe konvergieren. Die Situation stochastisch unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzw. die bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ ist auf Martingaldifferenzenfolgen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nicht übertragbar. Wir werden jedoch ein hinreichendes Kriterium für die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von Martingalen $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ angeben. Das Beispiel (1.) oben belegt, dass die Klasse der L^1-beschränkten unbedingten amarts eine echte Teilklasse der zur Klasse C gehörigen unbedingten amarts ist. Die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe liegt im allgemeinen nicht mehr vor, falls $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0) \notin C$ ist. Insbesondere erhält man dann auch bedingte P-stochastische Konvergenz, die auch eine mit bedingter Summe sein kann. Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz 48
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann existiert zu jeder bedingt konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ reeller Zahlen ein unbedingtes amart mit $P\left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \right\} > 0$. Insbesondere konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe.

Beweis:
Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergiert.

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P(\{X_0 = -1\}) = 1$ und $P(\{X_n = -1\}) = 1 - \frac{1}{2^n}$, sowie $P(\{X_n = 2^n - 1\}) = \frac{1}{2^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Es sei $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n \neq -1\}$, dann ist τ eine Stoppzeit bezüglich $\mathbb{F}$ und es gilt:

$$P(\{\tau = +\infty\}) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\{X_n = -1\}) = \prod_{n\in\mathbb{N}_0} P(\{X_n = -1\}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) > 0$$

[Das unendliche Produkt konvergiert absolut, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$ ist.]

Definieren wir den Partialsummenprozeß $\underline{S}$ über: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X_k \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}}, n \in \mathbb{N}_0$, so folgt die Adaptiertheit von $\underline{S}$ an $\mathbb{F}$ und die Integrierbarkeit unmittelbar aus der Konstruktion von $\underline{S}$. Ferner gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : EX_n = 0$ und $EX_0 = -1$. Für beliebig, aber festgewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$E^{\mathcal{F}_n}[S_{n+1}] = E^{\mathcal{F}_n}\Big[\sum_{k=0}^{n+1} a_k X_k \mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\Big] = S_n + E^{\mathcal{F}_n}\Big[a_{n+1}X_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau\geq n+1\}}\Big]$$

$$= S_n + a_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau\geq n+1\}} E^{\mathcal{F}_n}[X_{n+1}] \underset{(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{u.a.}}{=} S_n + a_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau\geq n+1\}} \underbrace{E[X_{n+1}]}_{=0} = S_n \ [P]$$

Somit ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal und gemäß Satz 42 ein unbedingtes amart. $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert $[P]^*$-f.s. mit bedingter Summe, denn:

(i) $P\Big(\Big\{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X_n \mathbb{1}_{\{\tau\geq n\}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big\}\Big) = P(\{\tau = +\infty\}) > 0$

$\Longrightarrow$ $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert mit bedingter Summe auf $\{\tau = +\infty\}$.

(ii) Andererseits gilt auf der Menge $\{\tau < +\infty\}$:
zu $\omega \in \{\tau < +\infty\}$ $\exists\, N_\omega \in \mathbb{N}$ mit $X_n(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\geq n\}} = 0$ $\forall n > N_\omega$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_k X_k(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\geq n\}} = \sum_{n=0}^{N_\omega} a_k X_k(\omega)$$

Somit konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ absolut in ω auf $\{\tau < +\infty\}$. Aus (i) und (ii) erhalten wir somit die Behauptung. □

Bemerkung:
Die Konstruktion des Martingals in Satz 48 zeigt allerdings auch, dass die Zugehörigkeit zur Klasse C eines unbedingten amarts nicht notwendig ist, für eine $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe oder auch eine unbedingte P-stochastische Konvergenz. Wir geben nun noch ein zweites Beispiel eines Martingals (und somit eines unbedingten amarts) an, welches aus der Klasse C ist, aber $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| = +\infty$ gilt. Die Konstruktionsidee ist hier eine andere.

Beispiel:
Wir betrachten wiederum als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1]; \lambda|_{\mathcal{B}\cap[0,1]})$.
Es sei $f \in C([0, 1-\varepsilon[) \; \forall \; \varepsilon > 0$ und $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend, $f \notin L^1$. Wir definieren $I_0 := \emptyset$ und $I_n := [0, 1-\frac{1}{n}] \forall \; n \in \mathbb{N}$. Mit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei folgender stochastische Prozeß definiert:

$$S_0 = 0 \; [P] - \text{f.s. und} S_n = f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} + c_n \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]} \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Hierbei sei die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert über $c_n := -2^n E\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[}\Big]$. Für die Folge $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Zuwächse von $\underline{S}$ gilt somit:

$X_0 = 0, X_{n+1} = f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^{n+1}}]} + c_{n+1}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]} - f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} - c_n\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]}$

$\Longrightarrow X_{n+1} = f\Big(\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^{n+1}}[} - \mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[}\Big) + c_{n+1}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]} - c_n\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]}$

$= -f \cdot \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1-\frac{1}{2^n}[} + 2^n\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]} - 2^{n+1}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]}$

$\Longrightarrow |X_{n+1}| \le f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1-\frac{1}{2^n}[} + 2^{n+2}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]} \forall \; n \in \mathbb{N}_0$

$\Longrightarrow X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \forall \; n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $\underline{S} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Es sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n) \forall \; n \in \mathbb{N}$, so ist $\underline{S}$ an $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert. Ferner gilt die Beziehung:

$E^{\mathcal{F}_n}[S_{n+1}] = E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^{n+1}}[} + c_{n+1}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]}\Big]$

$= E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} + f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[} + c_{n+1}\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]}\Big]$

$= f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} + E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big] + c_{n+1} \cdot E^{\mathcal{F}_n}\Big[\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^{n+1}},1]}\Big]$

Hierbei ist $c_{n+1} = -2^{n+1}E\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big] \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$.

(α) $E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big] = d_n\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]}$ aufgrund der Konstruktion von $\mathcal{F}_n$.

$\Longrightarrow E\Big[E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big]\Big] = d_n \cdot E\Big[\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]}\Big] = d_n \cdot \frac{1}{2^n}$

(β) $E\Big[E^{\mathcal{F}_n}\Big[f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big]\Big] = E\Big[f\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big]$

$E\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^{n+1}}[}\Big] - E\Big[f\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[}\Big] = -\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{c_n}{2^n}$

$\overset{(\alpha),(\beta)}{\Longrightarrow} \quad \frac{d_n}{2^n} = -\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{c_n}{2^n} \Longleftrightarrow d_n = -\frac{c_{n+1}}{2} + c_n$

$\Longrightarrow \; E^{\mathcal{F}_n}[S_{n+1}] = f \cdot \mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} + (c_n - \frac{c_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+1}}{2})\mathbb{1}_{[1-\frac{1}{2^n},1]} \overset{\text{Def.}}{=} S_n[P]$

$\Longrightarrow (\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein Martingal und somit ein unbedingtes amart.

Aus der Beziehung $S_n = f \cdot 1\!\!1_{[0,1-\frac{1}{2^n}[} + c_n 1\!\!1_{[1-\frac{1}{2^n},1]}\ \forall\, n$ folgt:

$$\exists\, [P] - \lim_{n\to\infty} S_n = f.$$

$E|S_n| = E\Big[f 1\!\!1_{[0,1-\frac{1}{2^n}[}\Big] + |c_n| \cdot E\Big[1\!\!1_{[1-\frac{1}{2^n},1]}\Big]\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

$\Longrightarrow\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| = +\infty$, da $f \notin L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. .

Begründung:
Zu $\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $P(\{[0, 1 - \frac{1}{2^{N_\varepsilon}}[\}) > 1 - \varepsilon$.
Ferner gilt $\forall\, \omega \in [0, 1 - \frac{1}{2^{N_\varepsilon}}[\ \forall\, n \geq N_\varepsilon : S_n(\omega) = f(\omega)$

$\Longrightarrow\ \forall\, \omega \in [0, 1 - \frac{1}{2^{N_\varepsilon}}[$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) = \sum\limits_{n=0}^{N_\varepsilon} X_n(\omega) = f(\omega)$.
Somit konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt $[P]^*$-f.s. auf $\Omega_\varepsilon = [0, 1 - \frac{1}{2^{N_\varepsilon}}[$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist und $\Omega_\varepsilon \uparrow \Omega\backslash\{1\}, \varepsilon \to 0$ gilt, folgt somit die Behauptung.□

Behauptung:
$(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist der Klasse C zugehörig.

Begründung:
Es sei $a > 0$ festgewählt und τ_a die zugehörige Eintrittszeit. f ist auf $[0,1[$ isoton, stetig mit $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Somit existiert ein $\omega_a \in [0,1]$ mit: $0 \leq f(\omega) \leq a\ \forall\, \omega \in [0, \omega_a]$.
Hieraus folgt $\forall\, \omega \in]\omega_a, 1] : f(\omega) > a$.

Aus der Konstruktion des Prozesses folgt:
Es existiert ein $M_a \in \mathbb{N}_0$ mit $\forall\, n \geq M_a : [0, \omega_a] \subset [0, 1 - \frac{1}{2^n}[$. Somit gilt: $\{\tau_a < +\infty\} \subset \{\tau_a \leq M_a\}$.

Da $\Big\{\Big|S_{\tau_a \wedge n}\Big|\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal ist, folgt somit:

$$E\Big[|S_{\tau_a}| 1\!\!1_{\{\tau_a < +\infty\}}\Big] \leq E\Big[\Big|S_{M_a}\Big| 1\!\!1_{\{\tau_a < +\infty\}}\Big] \leq E\Big[\Big|S_{M_a}\Big|\Big] < +\infty$$

$\Longrightarrow E\Big[|X_{\tau_a}| 1\!\!1_{\{\tau_a < +\infty\}}\Big] < +\infty.$

Da $a > 0$ beliebig gewählt war, folgt somit die Behauptung. □

Grundlegend für die Diskussion der bedingten und unbedingten L^p-Konvergenz von reellwertigen Martingalen, Submartingalen (Supermartingale) sind die folgenden beiden Sätze von Burkholder und Davis.

Satz 49 *(Burkholder-Ungleichungen)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges Martingal. Dann gibt es* $\forall\, p > 1$ *universelle positive Konstanten* A_p *und* B_p *(unabhängig von* $\underline{S}$*) so, dass* $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$A_p \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{n} X_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq \Big\| \sum_{j=0}^{n} X_j \Big\|_p \leq B_p \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{n} X_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p.$$

Hierbei bildet $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die zu $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ gehörige MDF.

Beweis: [G.A. Edgar & Sucheston; Stopping Times and Directed Processes; Seite 278]

Satz 50 *(Davis-Ungleichung)*
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges Martingal. Dann existieren universelle Konstanten* A, B *mit* $0 < A < B < \infty$*, so dass*

$$A \cdot \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{n} X_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_1 \leq \Big\| \max_{0 \leq j \leq n} \sum_{k=0}^{j} X_k \Big\|_1 \leq B \cdot \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{n} X_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_1, \forall\, n \in \mathbb{N}_0, \textit{ gilt.}$$

Beweis: [B. Davis; On the integrability of the martingale square function; Israel Journal Math. [1970], Seite 187 ff]

Unter Verwendung dieser beiden Resultate in Verbindung mit Satz 1 können wir folgendes Resultat formulieren.

Satz 51
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges Martingal aus* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, mit* $1 \leq p < +\infty$.

(i) Ist für ein $p > 1$ *die Bedingung* $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n|^p < +\infty$ *erfüllt, so konvergiert* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *unbedingt im* L^p*-Sinn.*

(ii) Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *aus* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und konvergiert der Prozeß im* L^1*-Sinn, dann liegt schon* L^1*-Konvergenz mit unbedingter Summe vor.*

(iii) Erfüllt der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *die Bedingung* $E\Big[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |S_n|\Big] < +\infty$*, so konvergiert* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *unbedingt im* L^1*-Sinn.*

Beweis:

(i) Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal aus $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ist $|\underline{S}|^p = \{|S_n|^p\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein bezüglich $\mathbb{F}$ adaptiertes nichtnegatives Submartingal und $\{|S_n|^P\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar, denn:
Ist $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen und $G = G(t)$ eine nichtnegative monoton wachsende Funktion, definiert für $t \geq 0$, so dass

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty \text{ und } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E[G(|S_n|)] < +\infty \text{ gelten}$$

$\Longrightarrow$ $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar.

Setzen wir in der obigen Situation $G(t) := t^p, p > 1, t \geq 0$, so erhalten wir die Behauptung.

Da $\{|S_n|^p\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal ist, welches gleichgradig integrierbar ist, gibt es ein $S_\infty \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E|S_n - S_\infty|^p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Insbesondere ist $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine L^p-Cauchy-Folge.
Somit existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ $\forall$ $n, m \geq N_\varepsilon$ mit $m \leq n$ gilt:

$$\Big|\Big| \sum_{k=m}^{n} X_k \Big|\Big|_p < \varepsilon$$

Der Satz von Burkholder liefert die Abschätzung:
$\Big|\Big|\Big(\sum_{k=m}^{n} X_k^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big|\Big|_p < \varepsilon / A_p$ $\forall$ $n, m \geq N_\varepsilon$ mit einer von $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unabhängigen Konstanten $A_p > 0$.

Ist $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige Teilfolge von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, so ist diese wiederum eine MDF und eine erneute Anwendung der Ungleichungen von Burkholder liefert:

$$\Big|\Big| \sum_{j=m}^{k} X_{n_j} \Big|\Big|_p \leq B_p \Big|\Big|\Big(\sum_{j=m}^{k} X_{n_j}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big|\Big|_p \leq B_p \Big|\Big|\Big(\sum_{j=M}^{N} X_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big|\Big|_p < \frac{B_p}{A_p} \cdot \varepsilon$$

wobei $M, N \in \mathbb{N}_0$ so gewählt seien, dass $N, M \geq N_\varepsilon$ gilt und $\{n_m, \ldots, n_k\} \subset \{M, \ldots, N\}$. Somit ist die Folge $\left(\sum\limits_{j=0}^{N} X_{n_j}\right)_{N \in \mathbb{N}_0}$ eine L^p-Cauchy-Folge und konvergiert daher im L^p-Sinn. Also konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt im L^p-Sinn gemäß Satz 1.

(ii) Konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ im L^1-Sinn, so gilt insbesondere: $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$. Damit ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes amart aus der Klasse C und gemäß Satz 45 konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch. Ist folglich $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ eine Abbildung, für die die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_{g(n)}$ L^1-konvergiert, gilt schon aufgrund der unbedingten P-stochastischen Konvergenz die Beziehung:

$$L^1 - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} X_k = L^1 - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} X_{g(k)}.$$

(iii) Analog zur Argumentation in (i) verläuft der Beweis zur Behauptung (iii) unter Ausnutzung der Davis-Ungleichungen und Satz 1.

□

Durch Betrachtung des folgenden Beispiels sehen wir, das die Aussage in (ii) von Satz 51 nicht verbessert werden kann. Hat man eine Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ von unabhängigen reellwertigen Zufallsvariablen mit $EX_n = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$, so folgt aus der L^1-Konvergenz mit unbedingter Summe der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ schon die unbedingte L^1-Konvergenz. Für beliebige MDF $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ trifft dies nicht zu. Es gibt Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$, die bedingt L^1-konvergieren, aber mit unbedingter Summe konvergent sind.

<u>Beispiel:</u>
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1]; \mathcal{B} \cap [0,1]; \lambda|_{\mathcal{B} \cap [0,1]})$ und mit $Y_0^{(0)} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ sowie $\{Y_k^{(i)}\}_{i=1, k \in \mathbb{N}}^{2^k}$ betrachten wir das Haar'sche Orthogonalsystem. Dann bildet diese Familie von Funktionen eine MDF bezüglich der kanonischen Filtration (vgl. Beispiel oben). Für eine Zufallsvariable $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bildet die Folge der Partialsummen $\left\{c_{0,0}(Z) Y_0^{(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{2^k} c_{i,k}(Z) Y_k^{(i)}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal, welches im L^1-Sinn konvergiert und gemäß Satz 45 unbedingt P-stochastisch konvergiert. Die $\{c_{i,k}(Z)\}_{i=1, k \in \mathbb{N}}^{2^k}$ bilden hierbei die Fourierkoeffizienten der Fourierentwicklung von Z nach dem Haar'schen Funktionensystem.

Für ein festgewähltes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir:

$$Z_n := Y_0^{(0)} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k/2} Y_k^{(1)} \Longrightarrow Z_n(\omega) = \begin{cases} 2^{n+1} & ; \quad \omega \in]0, \frac{1}{2^{n+1}}[\\ 0 & ; \quad \omega \in]\frac{1}{2^{n+1}}, 1[\end{cases}$$

$\Longrightarrow \; E|Z_n| = 1 \; \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Es sei $Z := \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} 3^{-\mu}\Big(Y_0^{(0)} + \sum\limits_{k=0}^{4^\mu} 2^{\frac{k}{2}} Y_k^{(1)}\Big)$, dann ist Z wohldefiniert, denn es gilt:

$E|Z| \leq \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} 3^{-\mu} E\Big|Y_0^{(0)} + \sum\limits_{k=0}^{4^\mu} 2^{\frac{k}{2}} Y_k^{(1)}\Big| = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} 3^{-\mu} \underbrace{E|Z_n|}_{=1} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow\ Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Somit konvergiert das Martingal $\Big\{c_{0,0}(Z)Y_0^{(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2^k} c_{i,k}(Z)Y_k^{(i)}\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$ im L^1-Sinn und unbedingt P-stochastisch.

Die Reihe $\sum\limits_{p=1}^{\infty} c_{1,2p}(Z)Y_{2p}^{(1)}$ bildet eine Teilreihe der obigen Fourierentwicklung und es gilt: $\sum\limits_{p=1}^{\infty} c_{1,2p}(Z)Y_{2p}^{(1)} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} 2^p Y_{2p}^{(1)}$.

Diese Teilreihe ist divergent im L^1-Sinn, denn:

$\Big|\sum\limits_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} 2^p Y_{2p}^{(1)}(\omega)\Big| \underset{\text{der } Y_k^{(i)}}{\overset{\text{Def.}}{\geq}} \Big|2^{2p} - \sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^k Y_k^{(1)}(\omega)\Big| \geq 2^{2p} - \sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^{2k} \geq \frac{1}{2}\, 2^{2p}$ und zwar

$\forall\, \omega \in \Big(\frac{1}{2^{2p+1}}, \frac{1}{2^{2p}}\Big)\ \Big[Y_{2n}^{(1)}(\omega) = 0\ \ \forall\, \omega \in \Big(\frac{1}{2^{2p+1}}, \frac{1}{2^{2p}}\Big)\ \forall\, n > p\Big]$

Ferner gilt:

$$E\Big|\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} 2^p Y_{2p}^{(1)}\Big| \geq \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} E\Big|\Big(\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} 2^p Y_{2p}^{(1)}\Big) \mathbb{1}_{]\frac{1}{2^{2p+1}}, \frac{1}{2^{2p}}[}\Big|$$

$$\geq \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2}\, 2^{2p} E\Big[\mathbb{1}_{]\frac{1}{2^{2p+1}}, \frac{1}{2^{2p}}[}\Big] = \frac{1}{2} 2^{2p} \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2^{2p+1}} = \frac{1}{4}\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] + 1\Big)$$

$$\Longrightarrow\ \sup_{n\in\mathbb{N}} E\Big|\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} 2^p Y_{2p}^{(1)}\Big| = +\infty$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{p=1}^{\infty} c_{1,2p}(Z)Y_{2p}^{(1)} \text{ ist } L^1 - \text{divergent.}$$

$\overset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow}$ $\Big\{c_{0,0}(Z)Y_0^{(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2^k} c_{i,k}(Z)Y_k^{(i)}\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bedingt im L^1-Sinn, aber wegen der unbedingten P-stochastischen Konvergenz, im L^1-Sinn mit unbedingter Summe.

<u>Bemerkungen:</u>
Die Ungleichungen in den Sätzen 49 und 50 besitzen auch noch Gültigkeit für Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit Werten in Hilberträumen. Beweise hierfür findet man in Arbeiten von Burkholder [1991], Theorem 3.3., oder auch in einer Arbeit von 1981 (12). Somit kann man analog zu Satz 42 folgendes Resultat formulieren.

Satz 52
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein Martingal mit Werten in einem Hilbertraum* $(H, ||\cdot||)$.

(i) Ist für ein $p > 1$ die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||S_n||^p < +\infty$ erfüllt, so konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt im L^p-Sinn.

(ii) Erfüllt der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Bedingung $E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||\Big] < +\infty$, so konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt im L^1-Sinn.

Satz 51 kann nicht ohne weiteres auf die Situation L^p-beschränkter Submartingale oder Supermartingale ausgedehnt werden. Man könnte dem Verdacht erliegen, den Doob'schen Zerlegungssatz zu verwenden, um eine unbedingte L^p-Konvergenz reellwertiger Submartingale (Supermartingale), im Falle $1 < p < \infty$, nachzuweisen. Es stellt sich allerdings heraus, dass aus der L^p-Beschränktheit eines Supermartingals $(p > 1)$ nicht auf die L^p-Beschränktheit des aus der Doob-Zerlegung resultierenden Martingalteils geschlossen werden kann. Das folgende Beispiel belegt diesen Sachverhalt.

Beispiel:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, definiert durch:

$X_0 = X_1 = 0\ [P]-$f.s., sowie $P\{X_n = -n\} = \frac{1}{n^3}, P\{X_n = 1\} = \frac{1}{n^3}$ und $P\{X_n = \gamma_n\}$ $= 1 - \frac{2}{n^3}, n \geq 2$

Hierbei sei $\gamma_n = \frac{n-1}{n^3-2}$.

Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine MDF, denn $EX_0 = EX_1 = 0$ und

$$EX_n = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{n-1}{n^3-2}(1 - \frac{2}{n^3}) = 0 \ \ \forall n \geq 2.$$

Somit folgt aus der Unabhängigkeit der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Behauptung. Das Martingal $\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht L^2-beschränkt, denn:

$$EX_n^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \gamma_n^2(1 - \frac{2}{n^3}) \geq \frac{1}{n}\,\forall n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} EX_n^2 \geq \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n} = +\infty \Longrightarrow \sup_n E\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right)^2 \geq \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n} = +\infty.$$

Es sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Z_1 = X_0, Z_2 = X_1$, sowie $Z_n = (n-1)\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=-(n-1)\}}$, falls $n \geq 3$.

$\Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein isotoner, bezüglich der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erzeugten Filtration $\mathbb{F}$ adaptierter, vorhersehbarer, Prozeß.

Definieren wir die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Z_k, n \in \mathbb{N}$$

so ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal.

Der Prozeß $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist absolut L^1-konvergent, denn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|Z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} EZ_k = \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)P\{X_{k-1} = -(k-1)\} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)}{(k-1)^3} < +\infty.$$

Der Prozeß $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch nicht L^2-beschränkt, denn:

$$E\left(\sum_{k=3}^{n}(Z_k - EZ_k)\right)^2 \underset{(*)}{=} \sum_{k=3}^{n} E(Z_k - EZ_k)^2 = \sum_{k=3}^{n}(EZ_k^2 - (EZ_k)^2)$$
$$= \sum_{k=3}^{n} \tfrac{1}{k-1} - \sum_{k=3}^{n} \tfrac{1}{(k-1)^4} \quad ((*)(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sind unabhängig})$$

Somit erhalten wir $\sup\limits_{n\geq 3} E\left(\sum\limits_{k=3}^{n}(Z_k - EZ_k)\right)^2 \geq \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-1} = +\infty.$

Da $\sum\limits_{k=3}^{\infty} EZ_k < +\infty$, können wir auf $\sup\limits_{n\geq 3} E\left(\sum\limits_{k=3}^{n} Z_k\right)^2 = +\infty$ schließen.

Das Submartingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch L^2-beschränkt, denn:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n}(X_{k-1} + Z_k) + X_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{1}_{\{X_{k-1}=1\}} + \gamma_k \mathbb{1}_{\{X_{k-1}=\gamma_k\}}\right) + X_n$$

(Man beachte, dass $X_0 = X_1 = 0\,[P]$-f.s.).

Somit gilt die folgende Abschätzung:

$$||S_n||_2 \leq \sum_{k=1}^{n} ||\mathbb{1}_{\{X_{k-1}=1\}}||_2 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k ||\mathbb{1}_{\{X_{k-1}=\gamma_k\}}||_2 + ||X_n||_2$$
$$\leq \sum_{k=2}^{n} \tfrac{1}{k^{3/2}} + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k \sqrt{\tfrac{k^3-2}{k^3}} + \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{n^3} + \left(\tfrac{n-1}{n^3-2}\right)^2 (1 - 2/n^3)$$
$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k^{3/2}} + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k + 3 < +\infty$$
$$\Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} ||S_n||_2 < +\infty$$

Hilfsüberlegung 3:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein isotoner (mit Wahrscheinlickeit 1) Prozeß aus $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), 1 \leq p < +\infty$, der $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n|^p < +\infty$ erfüllt. Dann konvergiert $(S_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im L^p-Sinn $\forall\, \gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$.

Beweis:
Bezeichnen wir mit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Zuwächse, d.h. $X_0 = S_0$ und $X_n = S_n - S_{n-1}$ für $n \geq 1$, so erhalten wir aus der $[P]$-f.s. Isotonie von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dass $X_n \geq 0\,[P]$-f.s. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen o.b.d.A. an, dass $S_0 = X_0 \geq 0\,[P]$-f.s. gilt.

1. Fall: $1 < p < +\infty$
Es sei $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Aus der Nichtnegativität der Zufallsvariablen $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ erhalten wir mit der Doob'schen L^p-Ungleichung für nichtnegative Submartingale:

$$\left(E\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{j=0}^{k} X_{n_j}\Big)^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}(E(\overline{S}_\infty)^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\left(E\Big(\sum_{n=0}^{k} X_n\Big)^p\right)^{1/p} < +\infty$$

Hierbei ist $\overline{S}_\infty := [P] - \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{k} X_{n_j}$.

Wir erhalten aus der obigen Ungleichung in Verbindung mit der Nichtnegativität der Folge $\left(\sum\limits_{j=0}^{k} X_{n_j}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die L^p-Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X_{n_j}$.

Mit Satz 1 können wir auf die unbedingte L^p-Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schließen.

2. Fall: $p = 1$
Aufgrund der Nichtnegativität der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ES_n < +\infty$ folgt die absolute und somit unbedingte L^1-Konvergenz unmittelbar aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. $\square$

Satz 53
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein reellwertiges Submartingal (Supermartingal) aus $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), 1 < p < +\infty$. Sind folgende Bedingungen

(1.) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n|^p < +\infty$ *und* *(2.)* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E\left(\sum\limits_{k=0}^{n} E(X_{k+1}|\mathcal{F}_k)\right)^p < +\infty$ *erfüllt,*
dann konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt im L^p-Sinn.

Beweis:
Man schließt unter Ausnutzung der Doob-Zerlegung mit Satz 51 in Verbindung mit der obigen Hilfsüberlegung 3.

Bemerkung:
Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein reellwertiges Submartingal (Supermartingal) mit $E\Big[\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|S_n|\Big] < +\infty$, so ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt L^1-konvergent.

Beweis:
Aus $E\Big[\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|S_n|\Big] < +\infty$ schließt man in Verbindung mit dem Satz der monotonen

Konvergenz auf die unbedingte L^1-Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Ferner erhalten wir dann, unter Ausnutzung der Doob-Zerlegung, für den Martingalteil $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Eigenschaft $E\Big[\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |M_n|\Big] < +\infty$. Wiederum können wir unter Verwendung von Satz 51 auf die unbedingte L^1-Konvergenz von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ schließen.

□

Im nächsten Resultat geben wir ein hinreichendes Kriterium für die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz L^1-beschränkter Martingale an. Hierbei wird auf entsprechende Resultate für Orthogonalreihen zurückgegriffen. Die Methode der Stoppzeiten in Verbindung mit dem Borel-Cantelli Lemma erweist sich dabei ebenfalls als nützlich.

Satz 54
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein reellwertiges Martingal mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$. *Existieren ein* $\varepsilon > 0$ *und* $K > 0$ *so, dass folgende Bedingungen gelten:*

(1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(E\left[X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K > n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K > n\}}\right)\right]^2\right)^{1-\varepsilon} < +\infty$

(2.) $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\left|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} > n\} \cap \{\tau_K \leq n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} > n\} \cap \{\tau_K \leq n\}}\right)\right| > 0\right\}\right)$
$< +\infty \; \forall \, \overline{K} \geq K$

Dann konvergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *unbedingt* $[P]^*$*-f.s. .*

Beweis:
Da $E^{\mathcal{F}_{n-1}}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K < n\}}\right) = \mathbb{1}_{\{\tau_K < n\}} \underbrace{E^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n)}_{=0} = 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k = X_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K < k\}} + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K > k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K > k\}}\right)\right)$$

wobei $\tau_K := \inf\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \left|\sum_{k=0}^{n} X_k\right| > K\right\}$.

Die so entstehenden drei Partialsummenprozesse sind gerade die Martingale des Gundy'schen Zerlegungssatzes.

Auf $\Omega_K := \{\tau_K = +\infty\} = \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K < n\}}\right| = 0\right\}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K < +\infty\}}$ trivialerweise unbedingt $[P]^*$-f.s. $\forall \, K > 0$.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}}\right)\right)$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. auf Ω, da $E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left|X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K = k\}}\right)\right|\right] \leq 4 \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$ ist. Das Martingal $\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K > k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X \mathbb{1}_{\{\tau_K > k\}}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert wegen (1.) gemäß Satz 28 unbedingt $[P]^*$-f.s..

Es sei $\overline{K} > K \Longrightarrow \{\tau_{\overline{K}} = +\infty\} \supset \{\tau_K = +\infty\}$, d.h. $\Omega_{\overline{K}} \supset \Omega_K \; \forall \, \overline{K} > K$.
Analog zu den obigen Argumenten erhält man die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Martingale $\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} > k\}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} = k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} = k\}}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Omega_{\overline{K}}$.

Das Martingal $\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} > k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}} > k\}}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert unbedingt

$[P]^*$-f.s, denn:

$$\left|\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}}\Big)\Big) - \Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}}\Big)\Big)\right|$$

$$= \left|X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}\cap\{\tau_K\le k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}\cap\{\tau_K\le k\}}\Big)\right|$$

$\underset{\text{Borel-Cantelli}}{\overset{(2.)}{\Longrightarrow}}$ $\exists N_{\overline{K}} \in \mathcal{F}$ mit $P(N_{\overline{K}}) = 0$ so, dass $\forall\, \omega \in N^c_{\overline{K}} : \exists\, N_\omega \in \mathbb{N}_0\ \forall\, m \ge N_\omega$:

$$\sum_{k=m}^{\infty}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{K}}>k\}}\Big)\Big)(\omega) = \sum_{k=m}^{\infty}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}}\Big)\Big)(\omega)$$

$\Longrightarrow$ Behauptung.

Aus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty \Longrightarrow \Omega = \bigcup\limits_{\substack{\overline{K}\in\mathbb{N}_0\\ \overline{K}>K}} \Omega_{\overline{K}}$ $[P]$-f.s. und aus den obigen Überlegungen folgern wir die unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n$$

□

Bemerkung:

(1.) Die Voraussetzung in (1.) kann man z. B. zu (1.)' abschwächen.

(1.)' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log^2(n)(\log\ \log(n+2))^{1+\varepsilon} E\Big[X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big]^2 < +\infty$

(2.) In der Situation reellwertiger unabhängiger Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,mit $EX_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, genügt es schon $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus der Klasse C mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n| < +\infty$ $[P]$-f.s. zu fordern, um unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ nachzuweisen.

Satz 55

Es sei $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N})$ eine MDF mit Werten in $(H, <;>)$ und es gelte $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} E||S_n|| < +\infty$. Es sei $\tau_K = \inf\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, ||\sum\limits_{k=1}^{n} X_k|| > K\}$, wobei $K > 0$ sei. Dann gilt:

$$E\Big[\sum_{n=1}^{\tau_K-1} < X_n, X_n >\Big] + E\Big[< S_{\tau_K-1}, S_{\tau_K-1} >\Big] = 2E\Big[< S_{\tau_K}, S_{\tau_K-1} >\Big]$$
$$\le 2K \sup_{n\in\mathbb{N}} E||S_n||$$

Beweis:

(i) Da das Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N})$ $[P]$-f.s. konvergiert, sind S_{τ_K} bzw. S_{τ_K-1} wohldefiniert. Ferner gilt aufgrund der Definition von τ_K $||S_{\tau_K-1}|| \le K$ und somit erhalten wir die Abschätzung

$$E\Big[< S_{\tau_K-1}, S_{\tau_K} >\Big] \le E\Big[||S_{\tau_K-1}|| \cdot ||S_{\tau_K}||\Big] \le K \cdot E\Big[||S_{\tau_K}||\Big] \le K \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} E||S_n||.$$

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ festgewählt. Mit $X_0 := 0$ gilt:

$$< S_{n-1}, S_{n-1} >= \sum_{k=1}^{n-1} < X_k, X_k > +2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} < S_{k-1}, X_k >$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} ||X_k||^2 + ||S_{n-1}||^2 = 2 \cdot ||S_{n-1}||^2 + 2 \cdot < X_n, S_{n-1} > -2 \sum_{k=1}^{n} < S_{k-1}, X_k >$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} < X_k, X_k > + < S_{n-1}, S_{n-1} >= 2 \cdot < S_n, S_{n-1} > -2 \cdot \sum_{k=1}^{n} < S_{k-1}, X_k >$$

$(*)$

Die Gleichung $(*)$ bleibt erhalten, falls man n durch eine beschränkte Stoppzeit τ ersetzt.
Es sei $\sigma_K := \min(\tau_K, n)$

$$\Longrightarrow \quad E\Big[\sum_{k=1}^{\sigma_K} < S_{k-1}, X_k >\Big] = E\Big[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\sigma_K \geq k\}} < S_{k-1}, X_k >\Big]$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{n} E\Big[\mathbb{1}_{\{\sigma_K \geq k\}} < S_{k-1}, X_k >\Big] = \sum_{k=1}^{n} E\Big[E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big[\mathbb{1}_{\{\sigma_K \geq k\}} < S_{k-1}, X_k >\Big]\Big]$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{n} E\Big[\mathbb{1}_{\{\sigma_K \geq k\}} < E^{\mathcal{F}_{k-1}}(S_{k-1}), \underbrace{E^{\mathcal{F}_{k-1}}(X_k)}_{=0} >\Big] = 0$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad E\Big[\sum_{k=1}^{\sigma_K - 1} < X_k, X_k >\Big] + E\Big[< S_{\sigma_K - 1}, S_{\sigma_K - 1} >\Big] =$$

$$2 \cdot E\Big[< S_{\sigma_K}, S_{\sigma_K - 1} >\Big]$$

Auf $\Omega_K := \{\tau_K < +\infty\}$ gilt $| < S_{\sigma_K}, S_{\sigma_K - 1} > | \leq K||S_{\sigma_K}|| \leq K||S_{\tau_K}||$.

Auf Ω_K^c gilt: $| < S_{\sigma_K}, S_{\sigma_K - 1}| \leq K^2$.

$\Longrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} | < S_{\sigma_K}, S_{\sigma_K - 1} > | \leq K^2 + K||S_{\sigma_K}||$ und somit gilt:
$\sup_{n \in \mathbb{N}} | < S_{\sigma_K},\ S_{\sigma_K - 1} > |$ ist integrierbar.

Ferner gilt: $| < S_{\sigma_K - 1}, S_{\sigma_K - 1} > | = ||S_{\sigma_K - 1}||^2 \leq K^2$.

$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{n \to \infty} \Big(E\Big[\sum_{k=1}^{\sigma_K - 1} < X_k, X_k >\Big] + E\Big[< S_{\sigma_K - 1}, S_{\sigma_K - 1} >\Big]\Big)$ sowie $\lim_{n \to \infty} 2 \cdot E\Big[< S_{\sigma_K}, S_{\sigma_K - 1} >\Big]$ und beide Limiten sind gleich.

$$\overset{\text{Def. von}}{\underset{\sigma_K}{\Longrightarrow}} \quad E\Big[\sum_{k=1}^{\tau_K - 1} < X_k, X_k >\Big] + E\Big[< S_{\tau_K - 1}, S_{\tau_K - 1} >\Big]$$

$$= 2 \cdot E\Big[< S_{\tau_K}, S_{\tau_K - 1} >\Big] \qquad \square$$

Analog zum reellwertigen Fall beweist man nun einen Gundy'schen Zerlegungssatz für Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit Werten in einem Hilbertraum $(H, <;>)$.

Satz 56
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal mit Werten in $(H, <;>)$ und es gelte $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E||S_n|| < +\infty$. Dann existieren $\forall\ K > 0$ Martingale $(T^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0), (\underline{U}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ sowie $(\underline{V}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1.) $S_n = T_n^K + U_n^K + V_n^K$ $[P]$-*f.s.* $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

(2.) $P\Big(\Big\{ \sup_{n \in \mathbb{N}_0} ||T_n^K|| > 0 \Big\}\Big) \leq \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E||S_n||}{K}$

(3.) $E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} ||U_n^K - U_{n-1}^K|| \Big] \leq 4 \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E||S_n||$

(4.) $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E\Big[||V_n^K||^2 \Big] \leq 2 \cdot K \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E||S_n||$

Beweis:
Unter Verwendung von Satz 55 zeigt man diese Aussage analog zum reellwertigen Fall. Den Beweis im reellwertigen Fall findet man z. B. in [Stout, almost sure convergence]. □

Satz 57
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes uniformes amart mit Werten in $(H, <;>)$ aus der Klasse C. Erfüllt $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Bedingung $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} ||S_n|| < +\infty$ $[P]$-f.s., so gelten folgende Aussagen:

(1.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert unbedingt P-stochastisch.*

(2.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe.*

Beweis:
Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Satz 45. Man verwendet hierbei Satz 56 und Satz 52. □

Bekanntlich folgt aus der P-stochastischen Konvergenz eines Martingals $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ im allgemeinen nicht die $[P]$-f.s. Konvergenz, es sei denn, die Folge der Summanden $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind stochastisch unabhängig. Wir zitieren zwei Beispiele, die wir später noch etwas ausführlicher diskutieren wollen.

Beispiele:

(1.) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine darauf definierte Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen, die folgender Beziehung genügen: $P(\{Y_n = 1\}) = P(\{Y_n = -1\}) = \frac{1}{2n}$, sowie $P(\{Y_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ sei definiert über: $S_0 = 0$ $[P]$-f.s. sowie

$$S_n = \begin{cases} Y_n, \text{ falls } S_{n-1} = 0 \\ nS_{n-1}|Y_n|, \text{ falls } S_{n-1} \neq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

Es sei $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), n \geq 1$ und $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Somit ist $\underline{S}$ an $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert, integrierbar und es gilt: $\forall\, n \geq 2$

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{F}_{n-1}}(S_n) &= E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(Y_n 1\!\!1_{\{S_{n-1}=0\}} + nS_{n-1}|Y_n| 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}}\Big) \\ &= 1\!\!1_{\{S_{n-1}=0\}} E^{\mathcal{F}_{n-1}}(Y_n) + nS_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}} E^{\mathcal{F}_{n-1}}(|Y_n|) \\ &= 1\!\!1_{\{S_{n-1}=0\}} EY_n + nS_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}} E|Y_n| \\ &= 1\!\!1_{\{S_{n-1}=0\}} \cdot 0 + nS_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}} \cdot \tfrac{1}{n} = S_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}} \\ &= S_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}\neq 0\}} + S_{n-1} 1\!\!1_{\{S_{n-1}=0\}} = S_{n-1} \;\; [P] - \text{f.s.} \end{aligned}$$

Falls $n = 1 \Longrightarrow E^{\mathcal{F}_0}(S_1) = E[S_1] = E\Big[Y_1 1\!\!1_{\{S_0=0\}} + 1 \cdot S_0 1\!\!1_{\{S_0\neq 0\}}\Big] = E[Y_1] = 0 = S_0$

Somit ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal. Aus der Konstruktion von $\underline{S}$ folgt sofort die Beziehung: $S_n = 0 \Longleftrightarrow Y_n = 0\; \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \; P(\{S_n = 0\}) = P(\{Y_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Somit konvergiert der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ P-stochastisch.

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt: $\Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(\{Y_n \neq 0\}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty\Big)$ $P(\{S_n \neq 0, \text{ für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}\}) = P(\{Y_n \neq 0, \text{ für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}\}) = 1$. Somit divergiert $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ punktweise mit Wahrscheinlichkeit 1.

Behauptung:
Das oben konstruierte Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert bedingt P-stochastisch.

Beweis:
siehe im Anschluß an den Beweis zu Satz 58.

(2.) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger u.i.v. Zufallsvariablen mit $P(\{Y_n = 1\}) = P(\{Y_n = -1\}) = \frac{1}{2}\; \forall\, n$. $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), n \in \mathbb{N}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Ereignissen mit $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ und $P(\overline{\lim} B_n) = 1$, wobei $B_n \in \mathcal{F}_n$ gelte. $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ sei über folgende Rekursionsgleichung definiert:

$$S_0 = 0\; [P] - \text{f.s. und } S_{n+1} = S_n(1 + Y_{n+1}) + 1\!\!1_{B_n} Y_{n+1}, n \geq 1$$

Auch hier rechnet man leicht nach, dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal ist mit $P\Big(\Big\{\lim_{n\to\infty} S_n \text{ existiert}\Big\}\Big) = 0$ und $S_n \overset{\text{P-stoch}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0$.

Behauptung:
Auch dieses Martingal konvergiert bedingt P-stochastisch.

Beweis:
siehe im Anschluß an den Beweis zu Satz 58.

Die obigen Beispiele zeigen, dass Martingale, die P-stochastisch konvergieren, nicht $[P]$-f.s. konvergieren müssen. Dies hängt natürlich mit der stochastischen Abhängigkeit der Zuwächse $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ dieser Prozesse zusammen. Beide Martingale konvergieren bedingt P-stochastisch, wie wir nachweisen werden. Dagegen können wir unter einer schwachen Zusatzvoraussetzung nachweisen, dass unbedingt P-stochastisch konvergente Martingale schon $[P]$-f.s. konvergieren müssen. Wir formulieren dieses Resultat gleich für Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit Werten in einem (reellen) Hilbertraum $(H, <;>)$. Es gilt folgender Satz.

Satz 58
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *ein Martingal mit Werten in* $(H, <;>)$ *und es gelte* $E\Big[||X_\tau||\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\Big] < +\infty \ \forall$ *Stoppzeiten* τ. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert* $[P]$*-f.s. (schließlich* $[P]^*$*-f.s. mit unbedingter Summe).*

(2.) $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *konvergiert unbedingt* P*-stochastisch.*

Um den Beweis dieses Resultats durchführen zu können, benötigen wir noch einige Hilfsresultate, die zunächst zusammengestellt werden.

Lemma 4: (Payley Zygmund Ungleichungen)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger ZV mit Werten in $(H,<;>)$, sowie $||X_n|| \in L^4(\Omega,\mathcal{F},P)$. Ferner sei $EX_n = 0$ und $E[||X_n||^4] \leq c\,\mathrm{Var}X_n\ \forall\, n\in\mathbb{N}_0$. Es sei $0<\lambda<1$. Dann gilt:

$$P\Big(\Big\{\Big|\Big|\sum_{j=0}^{\nu} X_j\Big|\Big| > \lambda\Big(\sum_{j=0}^{\nu}\mathrm{Var}\ X_j\Big)^{1/2}\Big\}\Big) > \eta,\ \text{wobei}\,\eta = (1-\lambda^2)^2\min\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{c}\Big), \nu\in\mathbb{N}_0.$$

Beweis: [Kahane; Some random series of functions; page 31; Theorem 3]

Lemma 5: (Bedingte Jensen-Ungleichung in Banachräumen)
Es sei $(E,||\cdot||)$ ein Banachraum, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $X:\Omega\longrightarrow E$ eine Bochner-integrable Zufallsvariable. Es sei $C\subseteq E$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $\varphi: C\longrightarrow\mathbb{R}$ eine konvexe unterhalb stetige Funktion. Ist $X\in C$ $[P]$-f.s. und $E[|\varphi(X)|]<+\infty$, so gilt: $\varphi(E^{\mathcal{G}}(X))\leq E^{\mathcal{G}}(\varphi(X))$ $[P]$-f.s.

Bemerkung:
$\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße konvexe unterhalb stetige Funktion, falls φ konvex ist und $\varphi(c)\leq\liminf_{x\to c}\varphi(x)\ \forall\, c\in C$ gilt.

Beweis:
$\tilde{E} := E\oplus\mathbb{R}$ ist ein Banachraum. $\tilde{C} := \{(x,t) : x\in C, t\geq\varphi(x)\}$ ist eine konvexe und abgeschlossene Menge in $\tilde{E}$, da φ konvex und eine unterhalb stetige Funktion ist. Definiert man $\tilde{X}:\Omega\longrightarrow\tilde{E}$ vermöge $\tilde{X}(\omega) = (X(\omega),\varphi(X(\omega)))$, so ist $\tilde{X}$ Bochnerintegrierbar, $\tilde{X}\in\tilde{C}$ $[P]$-f.s., somit gilt insbesondere $E^{\mathcal{G}}(\tilde{X})\in\tilde{C}$ $[P]$-f.s.. Es gilt aber:

$$E^{\mathcal{G}}(\tilde{X}) = (E^{\mathcal{G}}(X), E^{\mathcal{G}}(\varphi(X)))$$

$$\Longrightarrow E^{\mathcal{G}}(\varphi(X))\geq\varphi(E^{\mathcal{G}}(X))\ [P]\text{-f.s.} \qquad \square$$

Zunächst formulieren und beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 59
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in $(H,<;>)$. Es konvergiere die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt P-stochastisch.

Dann gilt:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}||X_n||^2$ konvergiert $[P]$-f.s.

Beweis:
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt P-stochastisch.

$\overset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow}$ $\forall$ Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n X_n$ konvergiert P-stochastisch. Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige Folge u.i.v. reellwertiger Zufallsvariablen mit $P(\{Y_n = 1\}) = P(\{Y_n = -1\}) = \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}_0$. Diese Folge sei definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$.

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\tilde{\omega})X_n$ konvergiert P-stochastisch für $[\tilde{P}]$-fast alle $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ $\quad (*)$.

Annahme:

$\exists\, E \in \mathcal{F}$ mit $P(E) = \gamma > 0$ so, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||X_n(\omega)||^2 = +\infty$, für $\omega \in E$ gilt.

$\Longrightarrow$ $\exists$ monoton wachsende Indexfolge $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$, so dass

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} ||X_n(\omega)||^2 > k\Big\}\Big) > \gamma/2 \;\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt.}$$

Sind $u_0, \ldots, u_n$ Vektoren aus H und $Y_0, \ldots, Y_n$ gemäß oben gewählt, so folgt mit Lemma 4:

$$\tilde{P}\Big(\Big\{\Big|\Big| \sum_{j=0}^{\nu} Y_j u_j \Big|\Big| > \lambda \Big(\sum_{j=0}^{\nu} ||U_j||^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\}\Big) > \frac{1}{3}(1-\lambda^2)^2, \text{wobei } \lambda \in (0,1)$$

festgewählt sei und $\nu \in \mathbb{N}_0$ ist.

Betrachten wir die Abschnittssumme $\sum\limits_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} Y_n(\tilde{\omega})$, so folgt aus der obigen Ungleichung und für $\omega \in \Big\{ \sum\limits_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} ||X_n||^2 > k \Big\}$

$$\tilde{P}\Big(\Big\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : \Big|\Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} Y_n(\tilde{\omega})X_n(\omega) \Big|\Big| > \frac{1}{2}\sqrt{k}\Big\}\Big) > \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16} > 0$$

Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega} \times \Omega, \tilde{\mathcal{F}} \times \mathcal{F}, \tilde{P} \otimes P)$, so erhalten wir:

$$\tilde{P} \otimes P\Big(\Big\{(\tilde{\omega}, \omega) \in \tilde{\Omega} \times \Omega \Big| \;\Big|\Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} Y_n(\tilde{\omega})X_n(\omega) \Big|\Big| > \frac{1}{2}\sqrt{k}\Big\}\Big) = \frac{3}{16} \cdot \gamma/2$$

(Man beachte hier, dass $\tilde{P} \otimes P$ ein Produktmaß auf $(\tilde{\Omega} \times \Omega, \tilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{F})$ ist).

Definieren wir für $k \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$G_k = \Big\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \Big| P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \Big| \;\Big|\Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} Y_n(\tilde{\omega})X_n(\omega) \Big|\Big| > \frac{1}{2}\sqrt{k}\Big\}\Big) > \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma}{4}\Big\}$$

$\Longrightarrow \tilde{P}(G_k) \geq \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma}{4} \;\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow \tilde{P}\Big(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} G_k\Big) \geq \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma}{4} > 0.$

$\forall\, \tilde{\omega} \in \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} G_k \;\exists\, \infty$ viele Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\tilde{\omega} \in G_k$ und

$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \Big| \ \Big|\Big| \sum\limits_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} Y_n(\tilde{\omega}) X_n(\omega) \Big|\Big| > \frac{1}{2}\sqrt{k}\Big\}\Big) > \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma}{4} > 0$

$\Longrightarrow \ \forall\, \tilde{\omega} \in \overline{\lim_{k\to\infty}} G_k : \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\tilde{\omega}) X_n$ divergiert P-stochastisch.

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu $(*)$ und somit folgt die Behauptung.

$\square$

Wir sind nun in der Lage, die Behauptungen in Satz 58 zu beweisen.

Beweis zu Satz 58:

(i) Es konvergiere $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s. . Dann gilt insbesondere die Beziehung: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n|| < +\infty$ $[P]$-f.s. und es konvergiert $(\underline{X}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s.
Aus $E\Big[||X_\tau|| 1\!\!1_{\{\tau<+\infty\}}\Big] < +\infty \ \forall\, \tau$ erhalten wir
$E\Big[||X_{\tau_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}}||\Big] < +\infty$
Hieraus folgt, dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Klasse C zugehörig ist. Die Voraussetzungen von Satz 57 sind somit erfüllt. Es konvergiert daher $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch.

(ii) Es konvergiere $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch. Aus Satz 59 können wir auf die $[P]$-f.s. Konvergenz der reellen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||X_n||^2$ schließen. Es sei $\sigma := \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||X_n||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ sowie $\sigma_n := \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} ||X_n||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Es sei $\tau_K := \inf\Big\{n \in \mathbb{N}_0 \Big| \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} ||X_k||^2\Big)^{\frac{1}{2}} > K\Big\}$, wobei $K > 0$ festgewählt sei. Somit ist τ_K eine Stoppzeit bezüglich $\mathbb{F}$ und es gilt

$$X_n = X_n 1\!\!1_{\{\tau_K<n\}} + \Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}}\Big)\Big)$$
$$+\Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big)$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ sei.

$\sigma \le K \Longrightarrow \sigma_n \le K \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, d.h. aus $\tau_K = +\infty \Longrightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \Big|\Big|X_n 1\!\!1_{\{\tau_K<n\}}\Big|\Big| = 0$

Somit gilt: $P\Big(\Big\{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \Big|\Big|X_n 1\!\!1_{\{\tau_K<n\}}\Big|\Big| > 0\Big\}\Big) \le P(\{\tau_K < +\infty\}) = P(\{\sigma > K\}) \le \frac{E[\sigma]}{K}$

$$E\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big|\Big|X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}}\Big)\Big|\Big|\Big] \le E\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big|\Big|X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}}\Big|\Big|\Big] +$$
$$E\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big|\Big|E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}}\Big|\Big|\Big]$$
$$\le 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} E\Big|\Big|X_n 1\!\!1_{\{\tau_K=n\}}\Big|\Big| = 2E\Big[\Big|\Big|X_{\tau_K}\Big|\Big| 1\!\!1_{\{\tau_K<+\infty\}}\Big] < +\infty$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K=n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K=n\}}\Big)\Big) \text{ konvergiert } [P]\text{-f.s. } \forall\, K > 0.$$

Es gilt: $E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|^2\Big] \leq$

$$E\Big[\Big(\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big| + \Big|\Big|E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|\Big)^2\Big]$$

$$\leq E\Big[\Big(2\max\Big\{\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|; \Big|\Big|E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|\Big\}\Big)^2\Big]$$

$$\leq E\Big[4\Big(\max\Big\{\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|; \Big|\Big|E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|\Big\}^2\Big]$$

$$\leq E\Big[4\max\Big\{\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|^2; \Big(E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|\Big)\Big)^2\Big\}\Big]$$

$$\underset{\text{Lemma 5}}{\leq} 4E\Big[\max\Big\{\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|^2; E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|^2\Big)\Big\}\Big]$$

$$\Longrightarrow E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|^2\Big] \leq 8 \cdot E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big|\Big|^2\Big] \quad (+)$$

$||X_n||^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 \leq 2 \cdot \sigma_n(\sigma_n - \sigma_{n-1}), \sigma_{-1} := 0$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|^2\Big] \leq 16 \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\sigma_n(\sigma_n - \sigma_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big]$$

$\tau_K > n \Longrightarrow \sigma_n \leq K$ und somit folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big)\Big|\Big|^2\Big] &\leq 16K \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[(\sigma_n - \sigma_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau_K>n\}}\Big] \\ &\leq 16K^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Somit ist das Martingal $\Big\{\sum_{k=0}^{n}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K>k\}}\Big)\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein L^2-beschränktes Martingal mit Werten in $(H, <;>)$ und konvergiert daher $[P]$-f.s.. Auf $\{\tau_K = +\infty\}$ konvergiert das Martingal $\Big\{\sum_{k=0}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K<k\}}\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ trivialerweise $[P]$-f.s. . Das Martingal $\Big\{\sum_{k=0}^{n}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K=k\}} - E^{\mathcal{F}_{k-1}}\Big(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_K=k\}}\Big)\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert $[P]$-f.s., da $\sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\Big|\Big|X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K=n\}} - E^{\mathcal{F}_{n-1}}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_K=n\}}\Big)\Big|\Big|\Big] < +\infty$ gilt. Somit konvergiert das Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s. auf $\{\tau_K = +\infty\}$, da es sich als Summe dieser drei Martingale darstellen läßt. Da $\sum_{n=0}^{\infty} ||X_n||^2 < +\infty$ $[P]$-f.s., folgt: $\Omega = \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \{\tau_K = +\infty\}[P] - f.s..$
Hieraus folgt aber, dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s. auf Ω konvergiert. $\square$

Bemerkungen:

(1.) Die Aussage des obigen Satzes gilt somit auch für Quasimartingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ mit Werten in $(H, <;>)$ oder einem Banachraum $(E, ||.||)$, der zu einem Hilbertraum $(H, <;>)$ isomorph ist.

(2.) Beim obigen Beweis geht entscheidend die Martingaleigenschaft ein. Die Aussage gilt für beliebige Prozesse selbstverständlich nicht mehr. Wir geben ein Beispiel dazu später an.

Zunächsteinmal greifen wir die Beispiele am Anfang dieses Abschnitts auf, die zeigten, dass aus der P-stochastischen Konvergenz eines Martingals nicht auf die $[P]$-f.s. Konvergenz geschlossen werden kann. Beide Martingale konvergieren bedingt P-stochastisch. **Beweis:**

(1.) Angenommen, der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert unbedingt P-stochastisch. Dann folgt mit Satz 58 die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |X_n|^2$. Somit konvergiert die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $[P]$-f.s. mit $X_n \underset{n \to \infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} 0$. Der Prozeß $\underline{S}$ erfüllt die Bedingung: $P(\{\underline{S} \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Somit gilt $\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : P(\{X_n \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Hieraus folgt aber unter der Annahme, dass $X_n \underset{n \to \infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} 0$ konvergiert, die $[P]$-f.s. Konvergenz des Prozesses $\underline{S}$. Damit ergibt sich allerdings ein Widerspruch. Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert demnach bedingt P-stochastisch.

(2.) In Bezug auf das 2. Beispiel argumentiert man analog, da auch für dieses Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ gilt: $P(\{\underline{S} \in \mathbb{Z}\}) = 1$.

Satz 60 *(Tandori)*
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver Zahlen, monoton fallend, mit der Eigenschaft: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)a_n^2 = +\infty$. Dann existiert auf dem Intervall $[0,1]$ ein bezüglich dem Lebesguemaß orthonormiertes Funktionensystem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ für $[\lambda]$-fast alle x divergiert.

Beweis: [G. Alexits; Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Seite 83 ff]

Beispiel:
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \lambda|_{\mathcal{B}\cap[0,1]})$. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch : $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}, n \in \mathbb{N}, a_0 = 1$. Diese Folge ist nichtnegativ und monoton fallend. Ferner gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log^2(n+1)a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Somit existiert gemäß Satz 60 ein von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ abhängendes Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $P\left(\left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(\omega) \text{ konvergiert}\right\}\right) = 0$. Der Partialsummenprozeß $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

ist jedoch L^2-beschränkt, denn: $E\Big[\Big|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k\Big|^2\Big] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot\log^2(k+1)} < 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log^2(k+1)} < +\infty$. Somit gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E\Big[\Big|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k\Big|^2\Big] < +\infty$.

Die Orthogonalreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n$ konvergiert unbedingt im L^2-Sinn und somit unbedingt P-stochastisch. Dieses Beispiel zeigt, wie wesentlich die in Satz 58 geforderte Martingaleigenschaft des Prozesses $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist. Einen Beweis zu Satz 45 bzw. Satz 57 kann man auch unter Ausnutzung eines Resultats von Burkholder angeben. Es gilt folgender Satz von Burkholder:

Satz 61
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal mit Werten in einem Hilbertraum $(H, <;>)$. Ferner gelte: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E[||S_n||] < +\infty$. Dann gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} V_{n+1}X_n$ konvergiert $[P]$-f.s. $\forall$ bezüglich $\mathbb{F}$ vorhersehbaren reellwertigen Prozesse $\underline{V}$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |V_n| \leq 1$ $[P]$-f.s. .

Beweis: [Für reellwertige Martingale $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ in Neveu, Discrete Parameter Martingales, im Hilbertraum z.B. in (12)]
Satz 57 könnte man folgendermaßen beweisen:
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes uniformes amart aus C mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n|| < +\infty$ $[P]$-f.s.
Im 1. Beweisschritt folgert man die unbedingte P-stochastische Konvergenz folgendermaßen:
Es sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$ (deterministisch) und $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein L^1-beschränktes Martingal. Dann ist $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1}X_k\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die $\underline{V}$-Transformierte von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ bezüglich $\underline{V} = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und konvergiert gemäß Satz 61 mit Wahrscheinlichkeit 1. Dies gilt für alle Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Somit konvergiert jede Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n+1}X_n$ P-stochastisch. Mit Satz 5 schließt man auf die unbedingte P-stochastische Konvergenz von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$. Jetzt argumentiert man analog, wie im Beweis zu Satz 45.

Abschließend geben wir hier einen Beweis zu Satz 61 an, der mit einer anderen Beweisidee geführt wird, als die Argumentation von Burkholder.

Beweis:
Gemäß der Gundy-Zerlegung können wir das Martingal $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ in drei Martingale zerlegen, die den Bedingungen aus Satz 56 genügen. Bezeichnen wir die $\underline{V}$-Transformierte von $\underline{V}$ mit $\underline{S}$ durch $\underline{V * S}$, so erhalten wir $(V * S)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_{k+1}X_k, n \in \mathbb{N}_0$ und somit gemäß der Gundy-Zerlegung:

$$(V * S)_n = (V * T^K)_n + (V * U^K)_n + (V * Z^K)_n, n \in \mathbb{N}_0. \quad (+)$$

Die Prozesse $\{(V * T^K)_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \{(V * U^K)_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie $\{(V * Z^K)_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind hierbei Hilbertraumwertige Martingale (man beachte $|V_n| \leq 1$ $[P]$-f.s. $\forall$ n). Auf $\Omega_K := \{\tau_K = +\infty\}$ konvergieren die Martingale $(\underline{T}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0), (\underline{U}^K, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ absolut $[P]$-f.s. in

der Norm $||\cdot||$ des Hilbertraumes.
Somit konvergieren auch $(\underline{V * T^K}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ bzw. $(\underline{V * U^K}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ absolut $[P]$-f.s. auf Ω_K.
Aus der Beschränktheit von $\underline{V}$ folgt, dass $(\underline{V * Z^K}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein L^2-beschränktes Martingal ist und somit $[P]$-f.s. konvergiert. Da $\Omega = \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \{\tau_K = +\infty\}$ $[P]-f.s.$ ist, folgt aus der Darstellung (+) in Verbindung mit den obigen Argumenten die $[P]$-f.s. Konvergenz der Transformierten $\underline{V * S}$ auf Ω. □

Bemerkung:
Es genügt die Voraussetzung $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |V_n| < +\infty$ $[P]$-f.s. an den vorhersehbaren Prozeß $(\underline{V}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ zu stellen, um auf die $[P]$-f.s. Konvergenz von $\underline{V * S}$ zu schließen.

Den noch offen stehenden Beweis zu Satz 42 geben wir nun an.

Beweis zu Satz 42:

(1.) Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Martingal, so ist die Aussage trivial, da das Potenzial $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ der Beziehung $Z_n \equiv 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ genügt.

(2.) Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Quasimartingal und $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$. Es folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=-1}^{\infty} E\Big|\Big|E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1})\Big|\Big| = E\Big(\sum_{n=-1}^{\infty}\Big|\Big|E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1})\Big|\Big|\Big)$. Die Reihe $\sum_{n=-1}^{\infty} E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1})$ konvergiert daher absolut in der Bochnernorm und somit existiert eine Bochnerintegrierbare Zufallsvariable Z mit:

$$Z = [P] - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-1}^{n} E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1}) = L^1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-1}^{n} E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1}).$$

Betrachten wir somit den Prozeß $\Big\{E^{\mathcal{F}_n}(Z)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, so ist dieser ein Martingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E\Big|\Big|E^{\mathcal{F}_n}(Z)\Big|\Big| \leq E||Z|| < +\infty$. Daher konvergiert $\Big\{E^{\mathcal{F}_n}(Z)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbedingt P-stochastisch und $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe gemäß Satz 57 und der obigen Überlegung.
Aus der Doob-Zerlegung folgt $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} S_n &= X_0 - E^{\mathcal{F}_{-1}}(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(X_{k+1} - E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1})\Big) + \sum_{k=-1}^{n-1} E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1}) \\ &= \underbrace{X_0 - E^{\mathcal{F}_{-1}}(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(X_{k+1} - E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1})\Big)}_{=:M_n} + \underbrace{E^{\mathcal{F}_n}(Z)}_{=:\tilde{M}_n} + E^{\mathcal{F}_n}\Big(\sum_{k=-1}^{n-1} E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1}) - Z\Big) \end{aligned}$$

Hierbei sind $(M_n, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0), (\tilde{M}_n, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ Martingale und der Prozeß $\Big\{E^{\mathcal{F}_n}\Big(\sum_{k=-1}^{n-1} E^{\mathcal{F}_k}(X_{k+1}) - Z\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert $[P]$-f.s. und im L^1-Sinn gegen 0.
Unter Ausnutzung der Riesz-Zerlegung schließt man, dass dieser Prozeß das korrespondierende amartpotenzial ist und unbedingt P-stochastisch konvergiert. Somit ist jedes Quasimartingal ein unbedingtes amart.

(3.) Ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein L^1-beschränktes reellwertiges Submartingal, so folgt mit dem Satz von Beppo Levi die absolute L^1-Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1})$ und man schließt analog zu (2.) auf die unbedingte P-stochastische Konvergenz des zugehörigen amartpotenzials. Da $(-\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Submartingal ist, falls $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Supermartingal ist, folgt die Behauptung auch für L^1-beschränkte Supermartingale. □

Das die Klasse der unbedingten amarts reichhaltiger ist, als die Prozesse, die in Satz 42 angegeben sind, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reellwertiger u.i.v. Zufallsvariablen mit $P(\{Y_0 = -1\}) = P(\{Y_0 = 1\}) = \frac{1}{2}$. Ferner seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = +\infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < +\infty$. Der Prozeß $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $X_0 = 1$ $[P]$-f.s. und $X_n = (a_nY_n + b_nY_{n-1})\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_0, \ldots, Y_n), n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert, integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1}) &= E^{\mathcal{F}_n}(a_{n+1}Y_{n+1} + b_{n+1}Y_n) = a_{n+1}E^{\mathcal{F}_n}(Y_{n+1}) + b_{n+1}Y_n \\ &\underset{Y_{n+1} \text{ ist u.a. von } \mathcal{F}_n}{=} a_{n+1}E(Y_{n+1}) + b_{n+1}Y_n = b_{n+1}Y_n\ [P] - f.s.. \end{aligned}$$

Somit ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ <u>kein</u> Quasimartingal, Submartingal oder Supermartingal, denn es gilt insbesondere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E\left|E^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1})\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = +\infty.$$

Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert unbedingt $[P]^*$-f.s. und unbedingt im L^2-Sinn.

Beweis:

Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_nY_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} b_nY_{n-1}$ sind Orthogonalreihen, die aufgrund von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < +\infty$ unbedingt L^2 konvergent sind. Aus dem Zwei-Reihen-Satz für unabhängige Zufallsvariablen schließt man auf unbedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz beider Reihen. Aufgrund der Konstruktion von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ folgt somit die Behauptung. Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein amart.

Beweis:

Die Prozesse $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_kY_{k-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind jeweils Martingale im Bezug auf ihre jeweilige kanonische Filtration. Es gilt:

$$E\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2Y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \text{ bzw. } E\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2Y_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Aus Satz 49 folgt:

$$E\Big[\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{j=1}^{k} a_jY_j\Big|\Big] \le BE\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2Y_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big| \le B\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$E\Big[\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{j=1}^{k} b_jY_{j-1}\Big|\Big] \le BE\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j^2Y_{j-1}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big| \le B\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Mit dem Satz von Beppo Levi folgt somit:

$$E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\Big|\Big[< +\infty \text{ und } E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_kY_k\Big|\Big] < +\infty.$$

Aus der Konstruktion des Prozesses $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ folgt somit:

$$E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|S_n|\Big] < +\infty$$

Da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ $[P]$-f.s. konvergiert und $E\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|S_n|\Big] < +\infty$ gilt, folgt unter Verwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue: $\forall$ isotonen Folgen $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkter Stoppzeiten mit $\sigma_n \uparrow \infty$ konvergiert das Netz $\{E[S_{\sigma_n}]\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Somit ist $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein amart.

Behauptung:
Der Prozeß $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ein unbedingtes amart.

Beweis:
$(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist L^1-konvergent und hieraus folgt: $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|S_n| < +\infty$. Das aus der Riesz-Zerlegung korrespondierende amartpotenzial $(\underline{Z}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ist ebenfalls L^1-beschränkt. Somit gilt für den Martingalteil $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ die Beziehung:
$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|M_n| < +\infty$.

Aus Satz 45 folgt, dass $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch konvergiert. Da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ebenfalls unbedingt P-stochastisch konvergiert, folgt die Behauptung. □

Auf die Stoppzeitbedingung in Satz 58 kann im allgemeinen nicht verzichtet werden. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und darauf definiert eine MDF $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so dass $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch, aber nicht $[P]$-f.s. konvergiert.

Beweis:
Es seien $\Omega_1 = [0,1]; \mathcal{F}_1 = \mathbb{B} \cap [0,1]$, sowie $P_1 = \lambda|_{\mathbb{B}\cap[0,1]}$.

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}, n \in \mathbb{N}$. Satz 50 $\Longrightarrow \exists$ ONS $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(\omega_1)$ für $[\lambda]$-fast alle $\omega_1 \in \Omega_1$ divergiert. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, folgt aus der paarweisen Orthogonalität der $(a_n\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die unbedingte L^2-Konvergenz der Reihe

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$. Bezeichnen wir $Y_n(\omega_1) := a_n\varphi_n(\omega_1), \omega_1 \in \Omega_1, n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ unbedingt P_1-stochastisch.

(ii) Es sei $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine darauf definierte Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften:

$$P_2(\{Z_n = 2^n - 1\}) = \tfrac{1}{2^n} \text{ und } P_2(\{Z_n = -1\}) = 1 - \tfrac{1}{2^n}$$
$$\Longrightarrow EZ_n = (2^n - 1)\tfrac{1}{2^n} - 1 \cdot (1 - \tfrac{1}{2^n}) = 1 - \tfrac{1}{2^n} - 1 + \tfrac{1}{2^n} = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine MDF aus $L^2(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.

Wir definieren die Stoppzeit $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} | Z_n \neq -1\}$
$\Longrightarrow P_2(\{\tau = +\infty\}) = P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = -1\}\right) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} (1 - \tfrac{1}{2^n}) > 0$
Betrachten wir die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $U_n = Z_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}, n \in \mathbb{N}$, so ist diese adaptiert an $(\sigma(Z_1, \ldots, Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und ebenfalls eine MDF, denn
$E^{\sigma(Z_1,\ldots,Z_n)}(U_{n+1}) = E^{\sigma(Z_1,\ldots,Z_n)}(Z_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = E^{\sigma(Z_1,\ldots,Z_n)}(Z_{n+1}(1 - \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}))$

$= (1 - \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}})E^{\sigma(Z_1,\ldots,Z_n)}(Z_{n+1}) \underset{(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ u.a.}}{=} (1 - \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}})E(Z_{n+1}) = 0.$

Betrachten wir die stochastische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}$, so konvergiert diese gemäß der Definition von τ auf $\{\tau < +\infty\}$ absolut punktweise und divergiert auf $\{\tau = +\infty\}$.

(iii) Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2, P_1\otimes P_2)$, sowie die Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, definiert durch: $Y_n(\omega_1, \omega_2) := Y_n(\omega_1), U_n(\omega_1, \omega_2) := U_n(\omega_2) \;\forall\; (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \;\forall\; n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind aus $L^2(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2, P_1\otimes P_2)$ und die Prozesse $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind P-stochastisch unabhängig voneinander. Es gilt : $X_n := Y_nU_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ und betrachten wir $\mathcal{A}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \otimes \sigma(Z_1, \ldots, Z_n) \;\forall\; n \in \mathbb{N}$, so ist $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $(\Omega, \mathcal{F})$, bezüglich derer $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist.

Behauptung:
Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine an $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptierte MDF.

Beweis:
Wir haben lediglich noch $E^{\mathcal{A}_n}(X_{n+1}) = 0$ $[P]$-f.s. zu verifizieren.
$\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \bigotimes \sigma(Z_1, \ldots, Z_n), n \in \mathbb{N}$.

Sei $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_n$ mit $A_1 \in \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), A_2 \in \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$

$$\Longrightarrow \int\limits_A X_{n+1}dP = \int\limits_{A_1\times A_2} X_{n+1}(\omega_1, \omega_2)dP_1 \otimes P_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{A_1} \left(\int\limits_{A_2} Y_{n+1}(\omega_1)U_{n+1}(\omega_2)dP_2(\omega_2)\right) dP_1(\omega_1) = \left(\int\limits_{A_1} Y_{n+1}(\omega_1)dP_1(\omega_1)\right)$$

$$\underbrace{\left(\int_{A_2} U_{n+1}(\omega_2)dP_2(\omega_2)\right)}_{=0}$$

$\Longrightarrow\ \int_A X_{n+1}dP = \int_A E^{\mathcal{A}_n}(X_{n+1})dP = 0\ \ \forall\, A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}.$

$\Longrightarrow\ \int_A E^{\mathcal{A}_n}(X_{n+1})dP = \int_A X_{n+1}dP = 0\ \ \forall\, A \in \mathcal{A}_n$ (Erzeugerargument)

$\Longrightarrow\ E^{\mathcal{A}_n}(X_{n+1}) = 0$ $[P]$-f.s. und somit folgt die Behauptung.

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert unbedingt P-stochastisch.

Beweis:

(1.) Auf $\{\tau < +\infty\}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ punktweise absolut, denn $\forall\,(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $\omega_2 \in \{\tau < +\infty\}$ gilt:

$$\exists\, N_{\omega_2} \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq N_{\omega_2} : U_n(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \forall\, \omega_1 \in \Omega_1$$

$\Longrightarrow\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n U_n$ konvergiert punktweise absolut $\forall\,(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $\omega_2 \in \{\tau < +\infty\}$.

(2.) $\forall\,(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $\omega_2 \in \{\tau = +\infty\}$ gilt: $U_n(\omega_1, \omega_2) = -1$

$\Longrightarrow\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(\omega_1, \omega_2) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\omega_1, \omega_2)\ \forall\,(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $\omega_2 \in \{\tau = +\infty\}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\omega_1, \omega_2)$ divergiert punktweise $\forall\,(\omega_1, \omega_2)$, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(\omega_1, \omega_2)$ punktweise divergiert auf $\Omega_1 \times \{\tau = +\infty\}$, wobei $P(\Omega_1 \times \{\tau = +\infty\}) = P_2(\{\tau = +\infty\}) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}}(1 - \frac{1}{2^n}) > 0$ gilt. Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ unbedingt P-stochastisch konvergiert, konvergiert wegen (1.) die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unbedingt P-stochastisch, aber wegen (2.) nicht $[P]$-f.s. .

□

Ein Analogon zu Satz 58 kann man für reellwertige Submartingale bzw. Supermartingale formulieren.

Satz 62
Es sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein Submartingal (Supermartingal), dessen Zuwächse $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ L^1-beschränkt sind. Konvergiert der Prozeß $\underline{S}$ unbedingt P-stochastisch, dann schon $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe.

Beweis:
Betrachten wir die aus der Doob-Zerlegung von $\underline{S}$ resultierenden Prozesse $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$, $(\underline{A}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ und bezeichnen dessen Zuwächse mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so erhalten wir folgende Abschätzung:

$$X_n = Y_n + Z_n \geq Y_n \; [P] - f.s. \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0 \quad (*)$$

$\Longrightarrow \; X_n^+ \geq Y_n^+ \; [P]$-f.s. $\forall \; n \in \mathbb{N}_0$ und somit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} EY_n^+ \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} EX_n^+ < +\infty$. Andererseits ist $(\underline{Y}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ eine MDF, so dass $0 = EY_n = EY_n^+ - EY_n^- \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$\Longrightarrow \; \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} EY_n^- = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} EY_n^+ < +\infty \Longrightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E|Y_n| < +\infty.$
Aus der unbedingten P-stochastischen Konvergenz von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ schließen wir mit Satz 59 auf die $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n^2$.

$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \; \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n^2 < +\infty[P]$-f.s. und somit $\exists \; [P] - \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$.
Für eine beliebige Stoppzeit τ bezüglich $\mathbb{F}$ erhalten wir:

$$\exists \; [P] - \lim_{n\to\infty} |Y_{\tau\wedge n} 1\!\!1_{\{\tau<+\infty\}}| = |Y_\tau 1\!\!1_{\{\tau<+\infty\}}|$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt somit $\forall$ Stoppzeiten τ

$$E|Y_\tau 1\!\!1_{\{\tau<+\infty\}}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|Y_n| < +\infty.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n^2$ konvergiert, erhalten wir hieraus (vgl. Beweis zu Satz 58) die $[P]$-f.s. Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$.
Aus der P-stochastischen Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ erhalten wir unter Ausnutzung der Doob-Zerlegung die P-stochastische Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$.
Aus $Z_n \geq 0 \; [P]$-f.s. $\forall \; n \in \mathbb{N}_0$ schließt man auf $[P]$-f.s. Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$ und insgesamt auf die $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe des Prozesses $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$. □

Wir möchten abschließend folgende Frage klären. In welchen Banachräumen $(E, ||\cdot||_E)$ konvergieren unbedingte uniforme amarts $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ unbedingt P-stochastisch, falls sie aus der Klasse C mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||_E < +\infty \; [P]$-f.s. sind? Eine Antwort in diese Richtung liefert schon die Bemerkung im Anschluß an Satz 61.

Definition 25:

Ein Banachraum $(E, ||\cdot||_E)$ heißt MT-Raum, falls für alle L^1-beschränkten Martingale $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ und alle Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in $\{-1, 1\}$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X_n$ konvergiert $[P]$-f.s. . Hierbei ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zu $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ gehörige MDF.

Satz 63 *(Burkholder)*
Für einen Banachraum $(E, ||\cdot||_E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $(E, ||\cdot||_E)$ *ist ein MT-Raum.*

(ii) *Es gelten die Burkholder-Ungleichungen für L^p-Martingale, $1 < p < +\infty$, d. h. es gibt eine Konstante $K_p > 0$, so dass $\forall$ Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ und $\forall$ MDF $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $||\sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon_j X_j||_p \leq K_p||\sum\limits_{j=0}^{n} X_j||_p, n \in \mathbb{N}_0$ gelte.*

(iii) $\forall\ \lambda > 0$ *gilt* $\lambda \cdot P(\{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||\sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon_j X_j||_E > \lambda\}) \leq K_E \cdot \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E||\sum\limits_{j=0}^{n} X_j||_E$ $\forall$ *Folgen* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *aus* $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ *mit einer universellen Konstanten* $K_E > 0$.

Beweis: [Annals of Probability, 1981, Seite 997 ff]

Beispiele:

(i) Jeder Hilbertraum $(H, <; >)$ ist ein MT-Raum.

(ii) Die Lebesgue-Räume ℓ^r bzw. $L^r((0, 1)), 1 < r < \infty$, sind MT-Räume.

(ii) Jeder zu einem Hilbertraum isomorphe Banachraum ist ein MT-Raum.

Hilfsüberlegung:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Werten in einem Banachraum $(E, ||\cdot||_E)$. Aus der P-stochastischen Konvergenz des Partialsummenprozesses $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgt die $[P]$-f.s. Konvergenz von $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Beweis:
Der Beweis wird wie im reellwertigen Fall unter Verwendung einer Variante einer Skorokhod-Ungleichung geführt.

Satz 64
Für einen Banachraum $(E, ||\cdot||_E)$ mit Radon-Nikodym Eigenschaft sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $(E, ||\cdot||_E)$ *ist ein MT-Raum.*

(ii) Für alle unbedingten uniformen amarts aus der Klasse C, *mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||_E < +\infty$ $[P]$*-f.s., konvergiert* $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ *unbedingt* P*-stochastisch.*

Beweis:
$(i) \Longrightarrow (ii)$ erhält man mit der Bemerkung im Anschluß an Satz 61 und der Beweisführung wie zu Satz 45 ab Beweisschritt (2.).
$(ii) \Longrightarrow (i)$ erhält man folgendermaßen:
Angenommen $(E, ||\cdot||_E)$ ist kein MT-Raum, dann ist insbesondere (ii) aus Satz 63 verletzt. D. h. $\forall\, j \in \mathbb{N}$ existieren Martingale $(\underline{M}^j, \mathbb{F}^j, \mathbb{N}_0)$ mit Werten in $(E, ||\cdot||_E)$ mit folgender Eigenschaft: $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||M_n^j||_E < 2^{-j}$, und es gibt eine Folge $(\varepsilon_n^j)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$ mit $P(A_j) > \frac{1}{2}$, wobei $A_j := \{\omega \in \Omega : ||\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^j X_k^j||_E > 1 \text{ für gewisse } n \leq n_j\}$. Der zugrundeliegende W-raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kann hierbei so gewählt werden, dass die Prozesse $(\underline{M}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind. Die Folge $(X_0^1, \ldots, X_{n_1}^1, X_0^2, \ldots, X_{n_2}^2, \ldots)$ ist somit eine bezüglich ihrer kanonischen Filtration adaptierte MDF mit Werten in $(E, ||\cdot||_E)$, und es gilt

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}} E||\sum_{i=1}^{\ell}(\sum_{k=0}^{n_i} X_k^i)||_E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n_i\in\mathbb{N}_0} E||\sum_{k=0}^{n_i} X_k^i||_E \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1.$$

Da $(E, ||\cdot||_E)$ die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, konvergiert das Martingal $(\sum_{i=1}^{\ell}(\sum_{k=0}^{n_i} X_k^i))_{\ell\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. und somit P-stochastisch. Für die Martingaltransformierte $\underline{G} = (\sum_{i=1}^{\ell}(\sum_{k=0}^{n_i} \varepsilon_k^i X_k^i))_{\ell\in\mathbb{N}}$ gilt $P(\{\underline{G} \text{ divergiert}\}) \geq P(\overline{\lim}_{n,m\to\infty} ||G_n - G_m||_E > 1) \geq P(\overline{\lim_{i\to\infty}} A_i) = 1$, denn $\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = +\infty$ und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind stochastisch unabhängige Ereignisse. Betrachten wir die Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definiert durch $Y_i := \sum_{k=0}^{n_i} \varepsilon_k^i X_k^i$, so ist diese eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, deren Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ $[P]$-f.s. divergiert. Aus der obigen Hilfsüberlegung wissen wir daher, dass $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ auch nicht P-stochastisch konvergiert. Mit Satz 5 aus Kapitel II können wir auf bedingte P-stochastische Konvergenz des Martingals $(\sum_{i=1}^{\ell}(\sum_{k=0}^{n_i} X_k^i))_{\ell\in\mathbb{N}}$ schließen. Da jedes L^1-beschränkte Martingal $(\underline{M}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes uniformes amart aus der Klasse C ist, mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||_E < +\infty$ $[P]$-f.s., kann (ii) nicht gelten. Somit ist $(E, ||\cdot||_E)$ ein MT-Raum, falls (ii) gilt. □

Bemerkung:

(i) Eine Arbeit von D. J. Aldous(13) zeigt insbesondere, dass Banachräume $(E, ||\cdot||_E)$, die MT-Räume sind, notwendigerweise reflexiv sind. [Math. Proc. Camb., 1979, Seite 117 ff]

(ii) Satz 64 und (i) zeigen somit, dass die unbedingte P-stochastische Konvergenz unbedingter uniformer amarts aus der Klasse C mit Werten in nichtreflexiven Banachräumen $(E, ||\cdot||_E)$ mit Radon-Nikodym-Eigenschaft im allgemeinen nicht mehr vorliegt.

Satz 65

Es sei $(E, ||\cdot||_E)$ ein Banachraum mit Radon-Nikodym-Eigenschaft. Ferner sei $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ ein unbedingtes uniformes amart aus der Klasse C mit Werten in $(E, ||\cdot||_E)$. Aus $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||_E < +\infty$ $[P]$-f.s. folgt die P-stochastische und $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe von $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$.

Beweis:

(i) O.B.d.A. nehmen wir an, dass $(E, ||\cdot||_E)$ ein reeller Banachraum ist. Aus der Bochner-Messbarkeit der $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgt die Existenz eines separablen Banachraums $F \subset E$ mit $P(\{S_n \in F \; \forall n \in \mathbb{N}_0\}) = 1$. Daher nehmen wir o.b.d.A. an, dass $(E, ||\cdot||_E)$ ein separabler Banachraum ist.

(ii) Wie im Beweis zu Satz 45 schließt man unter Ausnutzung der Voraussetzungen auf die Existenz eines $S_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $[P] - \lim_{n\to\infty} ||S_n - S_\infty||_E = 0$. Für $a > 0$ sei $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : ||S_n||_E > a\}$. Die Riesz-Zerlegung liefert:

$$(*) \quad S_{\tau_a \wedge n} = M_{\tau_a \wedge n} + Z_{\tau_a \wedge n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad [P] - f.s.$$

Hierbei ist $(M_{\tau_a \wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(Z_{\tau_a \wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Prozess, der in der Bochner-Norm konvergiert, d. h. insbesondere gilt: $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||Z_{\tau_a \wedge n}||_E < +\infty$.
Da $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ aus der Klasse C ist, erhalten wir $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||S_{\tau_a \wedge n}||_E < +\infty$ und somit aus $(*)$ $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||M_{\tau_a \wedge n}||_E < +\infty$.
Ist $f \in E^*$ eine beliebige stetige Linearform, so erhalten wir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E|f(M_{\tau_a \wedge n})| \leq |||f||| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E||M_{\tau_a \wedge n}||_E < +\infty$$

(Hierbei ist $|||f|||$ die Operatornorm von f).
Mit Satz 45 können wir auf unbedingte P-stochastischen Konvergenz des reellwertigen Martingals $(f(M_{\tau_a \wedge n}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ schließen.
Aus $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||S_n||_E < +\infty$ $[P]$-f.s. folgt: $(**)$ $\Omega = \bigcup_{a\in\mathbb{N}} \{\tau_a = +\infty\}$ $[P]$-f.s. . Da $(M_{\tau_a \wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\{\tau_a = +\infty\}$, folgt mit $(**)$ $\forall\, f \in E^* : (f(M_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

konvergiert unbedingt P-stochastisch. Es konvergiert $(f(Z_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbedingt P-stochastisch $\forall\, f \in E^*$, da $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbedingt P-stochastisch konvergiert.

$\overset{\text{Riesz-Zerlegung}}{\Longrightarrow} (f(S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert unbedingt P-stochastisch $\forall\, f \in E^*$.

(iii) Sei $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ so gewählt, dass $(S_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}_0}$ P-stochastisch konvergiert. Es sei $S_\infty^\gamma := P\text{-stoch-}\lim\limits_{n\to\infty} S_n^\gamma$ in $(E, ||\cdot||_E)$.
$\Longrightarrow\ \forall\, f \in E^* \exists\ P\text{-stoch-}\lim\limits_{n\to\infty}\ f(S_n^\gamma) = f(S_\infty^\gamma)$
$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}\ \forall\, f \in E^* \exists\ N_f \in \mathcal{F}, P(N_f) = 0\ \forall\, \omega \in N_f^c : f(S_\infty^\gamma(\omega)) = f(S_\infty(\omega))\ \ (***)$.
Da $(E, ||\cdot||_E)$ separabel ist (vgl. (i)), existiert eine abzählbar dichte Teilmenge $D \subset E^*$ mit der Eigenschaft:

$$\forall\, x \in E\ ||x||_E = \sup_{f\in D} |f(x)|$$

Definieren wir $N := \bigcup\limits_{f\in D} N_f$, so ist $N \in \mathcal{F}$ mit $P(N) = 0$ und wegen $(***)$ gilt: $P(\{||S_\infty^\gamma - S_\infty||_E > 0\}) = P(\{\sup\limits_{f\in D} |f(S_\infty^\gamma - S_\infty)| > 0\}) = 0$. Also gilt $P\text{-stoch-}\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n^\gamma - S_\infty||_E = 0$, d. h. $(\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert P-stochastisch mit unbedingter Summe.

$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}\ (\underline{S}, \mathbb{F}, \mathbb{N}_0)$ konvergiert $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe. □

Kapitel VI
Cesaro-Mittel und bedingte Konvergenz

Ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reellwertige Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so wird die bedingte $[P]^*$-f.s Konvergenz der daraus gebildeten Reihe durch das Verhalten der Erwartungswerte der gestutzten Folge $\{X_n^c\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gesteuert. Die bedingte $[P]^* - f.s.$ Konvergenz ist zwangsläufig eine $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit bedingter Summe(vgl Kapitel II). Es existiert daher keine reellwertige stochastische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ mit unabhängigen Summanden $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, die $[P]^*$-f.s. mit unbedingter Summe konvergiert, aber nicht unbedingt $[P]^*$-f.s. konvergiert. Betrachtet man hingegen Cesaro-Mittel von unabhängigen Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, so existieren Beispiele,in welchen man die bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz mit unbedingter Summe nachweisen kann. Zunächst geben wir folgende Definition an.

Definition 26:

Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine festgewählte Zahl und $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. $\underline{X}$ heiße $[P]$-f.s. C_k-limitierbar mit Grenzvariable S, falls für die Folge der k-ten Cesaro-Mittel:

$$\frac{\binom{n+k-1}{k-1}X_0 + \binom{n+k-2}{k-1}X_1 + \ldots + \binom{k-1}{k-1}X_n}{\binom{n+k}{k}} \underset{n\to\infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} S \text{ gilt.}$$

Definition 27:

Es sei $A = (\alpha_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix mit $\mathbb{K}$-Einträgen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Ferner sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Dann heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>A-limitierbar</u> zum Wert $s \in \overline{\mathbb{K}}$, wenn

(1.) die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}x_k$ für $i \in \mathbb{N}$ konvergieren und

(2.) die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}x_k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen s konvergiert.

Die Matrix A (bzw. das Limitierungsverfahren A) heißt <u>permanent</u>, falls für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist A-limitierbar zum Wert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Der folgende grundlegende Satz aus der Limitierungstheorie stammt von Toeplitz und ist allgemein bekannt.

Satz 66 *(Permanenzsatz)*
Genau dann ist A permanent, wenn die folgenden Bedingungen alle erfüllt sind:

(P1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| \leq M \; \forall \, i \in \mathbb{N}$, *wobei* $M > 0$ *eine gewisse Konstante sei.*

(P2) $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_{ik} = 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}$

(P3) $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} = 1$

Bemerkung: Die C_k-Limitierung ist permanent.

Definition 28:

Es sei $A = (\alpha_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}_0}$ ein Limitierungsverfahren und $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$.

(1.) $\underline{a}$ heißt unbedingt A-limitierbar, falls für jede bijektive Abbildung $\gamma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ gilt: $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} a_{\gamma(j)} \right)_{i \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.

(2.) $\underline{a}$ heißt bedingt A-limitierbar, falls (1.) nicht gilt und es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ A-limitierbar ist.

(3.) $\underline{a}$ heißt A-limitierbar mit unbedingtem Limes, falls es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, für das $\left(a_{\gamma(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ A-limitierbar ist mit Grenzwert ξ und jede bijektive Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die die Eigenschaft besitzt, dass $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} a_{g(j)} \right)_{i \in \mathbb{N}_0}$ gegen ξ konvergiert.

(4.) $\underline{a}$ heißt A-limitierbar mit bedingtem Limes, falls es $\gamma_i \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, für die $\left(a_{\gamma_i(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ A-limitierbar sind und (3.) nicht gilt $(i = 1, 2)$.

Bemerkungen:

(1.) Ist $A = (\alpha_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}_0}$ ein permanentes Limitierungsverfahren, so ist jede konvergente Folge $\underline{a}$ unbedingt A-limitierbar.

(2.) Für permanente Limitierungsverfahren A gilt gemäß (1.) somit: Ist $\underline{a}$ bedingt A-limitierbar $\Longrightarrow$ $\underline{a}$ ist divergent.

(3.) Es sei A das Verfahren der C_1-Mittel und $\underline{a}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Es gelten folgende Aussagen:

   (α) $\underline{a}$ ist unbedingt C_1-limitierbar genau dann, wenn $\underline{a}$ C_1-limitierbar mit unbedingtem Limes ist.

(β) $\underline{a}$ ist bedingt C_1-limitierbar genau dann, wenn $\underline{a}$ C_1-limitierbar mit bedingtem Limes ist.

Beweis: Da die Aussage (α) unmittelbare Konsequenz von (β) ist, genügt es die Aussage (β) zu verifizieren.

(β) Es sei $\underline{a}$ bedingt C_1-limitierbar und wir nehmen o.B.d.A. an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schon C_1-limitierbar sei. Da das C_1-Verfahren ein permanentes Verfahren ist, folgt mit Bemerkung (1.) oben: $\underline{a}$ ist divergent.

1. Fall:
$\underline{a}$ ist beschränkt $\Longrightarrow$ $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $\xi_1 \neq \xi_2$ und Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi_1$ bzw. $a_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi_2$.

Behauptung:
$\exists$ bijektive Abbildungen $\gamma, \tilde{\gamma} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_{\gamma(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_1 \text{ sowie } \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_{\tilde{\gamma}(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_2.$$

Beweis:
Die Indizes $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \notin \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ können bijektiv auf die Menge $M = \{2^k | k \in \mathbb{N}\}$ abgebildet werden. Es sei $\{r_k | k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung der Indizes $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \notin \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. $\gamma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definieren wir durch:

An die k-ten Positionen, $k \neq 2^m, m \in \mathbb{N}$, setzen wir ein Folgeglied von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und an die 2^m-te Position das r_m-te Folgeglied a_{r_m}

der Abzählung $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{\gamma(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_1$. Analog können wir $\tilde{\gamma}$ konstruieren.

2. Fall:
$\underline{a}$ unbeschränkt $\Longrightarrow$ $\xi_1 = +\infty$ bzw. $\xi_2 = -\infty$ sind als Häufungspunkte möglich. Auch hier können wir bijektive Abbildungen $\gamma, \tilde{\gamma} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ konstruieren, so dass $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{\gamma(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ bzw. $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{\tilde{\gamma}(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ konvergieren.

Da eine divergente Folge $\underline{a}$ mindestens zwei Häufungspunkte besitzt, erhalten wir aus der bedingten C_1-Limitierbarkeit die C_1-Limitierbarkeit mit bedingtem Limes. Ist umgekehrt $\underline{a}$ C_1-limitierbar mit bedingtem Limes(o.B.d.A.$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schon)
$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\xi_1 \neq \xi_2$ und eine bijektive Abbildung $\gamma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_1$ und $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{\gamma(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_2$.

Wie im Beweis zu Satz 3 aus Kapitel I konstruiert man eine bijektive Abbildung $\tilde{\gamma} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so, dass $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} a_{\tilde{\gamma}(j)} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergiert. $\square$

(4.) Die Aussagen unter (3.) gelten bei der Limitierung stochastischer Prozesse $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht mehr.

Definition 29:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine darauf definierte Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Ferner sei $A = (\alpha_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix mit reellen Einträgen.

(1.) $\underline{X}$ heiße $[P]$-f.s. A-limitierbar mit Grenzvariable S, falls es eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$ so gibt, dass $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ A-limitierbar ist $\forall\ \omega \in N^c$ mit Grenzwert $S(\omega)$.

(2.) $\underline{X}$ heiße unbedingt $[P]^*$-f.s. A-limitierbar, falls $\forall\ g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gilt: $\{X_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist $[P]$-f.s. A-limitierbar.

(3.) $\underline{X}$ heiße bedingt $[P]^*$-f.s. A-limitierbar, falls es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\{X_{\gamma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}[P]$-f.s. A-limitierbar ist und (2.) nicht gilt.

(4.) $\underline{X}$ heiße A-limitierbar $[P]^*$-f.s. mit unbedingtem Limes, falls es ein $\gamma \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\{X_{\gamma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}[P]$-f.s. A-limitierbar ist und jede $[P]$-f.s. A-limitierbare Umordnung $\{X_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ den selben $[P]$-f.s. Limes besitzt.

(5.) $\underline{X}$ heiße A-limitierbar $[P]^*$-f.s. mit bedingtem Limes, falls es $\gamma_i \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ gibt, so dass $\{X_{\gamma_i(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}[P]$-f.s. A-limitierbar sind und (4.) nicht gilt $(i = 1, 2)$.

<u>Beispiel:</u>
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit den Eigenschaften:

(1.) $a_n = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ mit $\nexists\ k \in \mathbb{N}$ so dass $n = 2^k$ gilt

(2.) $a_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ mit : $\exists\ k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k$
$\Longrightarrow\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ ist divergent.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist allerdings C_1-limitierbar, denn:

(α) $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leq 1$

(β) $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \geq \frac{1}{n+1}(n+1-[\log_2(n+1)]-1) = \underbrace{1 - \frac{[\log_2(n+1)]+1}{n+1}}_{\overrightarrow{n \to \infty}\ 1}$

$\underset{(\alpha),(\beta)}{\Longrightarrow}\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ gilt:$1 - \frac{[\log_2(n+1)]+1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leq 1$

$\Longrightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = 1$. Es sei

$$M := \{2^k | k \in \mathbb{N}\}, M^c = \{n \in \mathbb{N}_0 | n \notin M\} \Longrightarrow \text{ card } M = \text{card } M^c = \text{card}\mathbb{N}_0$$

Also existiert eine Abbildung $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ mit:

$a_{g(j)} = 1 \ \forall \ j \in M$ und $a_{g(j)} = 0 \ \forall \ j \in M^c$ und $(a_{g(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Die Folge $(a_{g(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist C_1-limitierbar zum Grenzwert 0, denn

(α) $\forall \ n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{g(k)} \geq 0$, da $a_{g(k)} \geq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}_0$.

(β) $\forall \ n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{g(k)} \leq \frac{1}{n+1}([\log_2(n+1)] + 1)$

$$\underset{(\alpha),(\beta)}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{g(k)} \leq \frac{[\log_2(n+1)]+1}{n+1} \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{g(k)} = 0.$$

Somit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ C_1-limitierbar mit bedingtem Limes.

Satz 67

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine darauf definierte Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen.

(1.) Sind die $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und identisch verteilt, so ist $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ unbedingt $[P]^*$-f.s. C_k-limitierbar $\forall \ k \in \mathbb{N}$.

(2.) Sind die $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ symmetrisch verteilt und $[P]$-f.s. C_1-limitierbar, so sind sie schon C_k-limitierbar $[P]^*$-f.s. mit unbedingtem Limes; und dies $\forall \ k \in \mathbb{N}$.

(3.) In der Situation (2.) kann bedingte $[P]^*$-f.s. C_1-Limitierbarkeit vorliegen.

(4.) Es gibt eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, integrierbar, mit $EX_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ und diese ist C_1-limitierbar $[P]^*$-f.s. mit bedingtem Limes.

Beweis:

(1.) Die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ genügt dem starken Gesetz der großen Zahl und es gilt somit $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} X_k \underset{n \to \infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} EX_1$. Da $(X_{g(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ebenfalls eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist, gilt: $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} X_{g(k)} \underset{n \to \infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} EX_1$. Daher ist jede Umordnung $(X_{g(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ $[P]$-f.s. C_1-limitierbar. Jede Umordnung $(X_{g(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist $[P]$-f.s. C_2-limitierbar, denn es gilt:

$$\frac{1}{\binom{n+2}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1-j}{1} X_{g(j)} = \frac{\binom{1}{1} C_0^{(1)} + \ldots + \binom{n+1}{1} C_n^{(1)}}{\binom{1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{1}}, n \in \mathbb{N}_0$$

wobei $C_k^{(1)} := \frac{1}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{k} X_{g(j)} \ \forall \ k \in \mathbb{N}_0$.

Also folgt die C_2-Limitierbarkeit $[P]$-f.s. der Folge $\{X_{g(k)}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus der C_1-Limitierbarkeit in Verbindung mit dem Lemma von Toeplitz. Mit vollständiger Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ erhält man die Behauptung (1.).

(2.) $\underline{X}^g = \{X_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge unabhängiger symmetrisch verteilter Zufallsvariablen für $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$. Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ C_1-limitierbar $[P]$-f.s., dann folgt aus dem Kolmogoroff'schen $0-1$-Gesetz: $\exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} X_k \underset{n\to\infty}{\overset{[P]}{\longrightarrow}} c$. Ferner gilt für die Folge der charakteristischen Funktionen $\{\varphi_{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_k}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Beziehung: $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_k}(t) = e^{itc}$.

Da die Folge $\{\varphi_{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_k}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur aus reellwertigen Funktionen besteht, folgt somit $c = 0$. Ist somit $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ so gewählt, dass $\{\varphi_{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_{g(k)}}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ punktweise konvergiert, dann schon gegen e^{itc} mit $c = 0$.

(3.) Im folgenden konstruieren wir ein Beispiel gemäß der obigen Situation (2.), bei dem keine unbedingte $[P]^*$-f.s. C_k-Limitierbarkeit vorliegt.
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_{2^k} \sim N(0,k) \forall\, k \in \mathbb{N}$ und $X_n \sim N(0,1) \forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 2^k, k \in \mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \frac{Var\ X_k}{k^2} \le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(2^k)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2^k)^2} < +\infty$$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{Var\ X_k}{k^2} < +\infty$. Wir schließen mit dem Kolmogoroff-Kriterium auf die $[P]$-f.s. C_1-Limitierbarkeit der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definieren wir $M := \{2^k | k \in \mathbb{N}\}, N := \{n \in \mathbb{N} | n \notin M\} \Longrightarrow$ card $M =$ card $N =$ card $\mathbb{N}$.
Es existiert somit eine Abbildung $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ so dass die Umordnung $(X_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgender Beziehung genügt:

$$X_{g(n)} \sim N(0,n), \text{falls } n \in N \text{ und } X_{g(n)} \sim N(0,1), \text{falls } n \in M.$$

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} X_{g(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert $[P]$-f.s., denn:

Sei $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben:

Speziell $N = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} X_{g(k)} \overset{W}{=} \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N-\log_2 N} Y_k + \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{\log_2 N} Z_k$
wobei $Y_k \sim N(0,k), Z_k \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & \varphi_{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{g(k)}}(t) = \varphi_{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\log_2 N} Y_k}(t) \cdot \varphi_{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{\log_2 N} Z_k}(t) \\
= \quad & \varphi_{\sum_{k=1}^{N-\log_2 N} Y_k}(t/N) \cdot \varphi_{\sum_{k=1}^{\log_2 N} Z_k}(t/N) = \prod_{k=1}^{N-\log_2 N} \varphi_{Y_k}(t/N) \cdot \prod_{k=1}^{\log_2 N} \varphi_{Z_k}(t/N) \\
= \quad & \underbrace{e^{-t^2/2\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-\log_2 N} k}}_{\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{e^{-t^2/2\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{\log_2 N} 1}}_{\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Teilfolge $\left(\frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{2^m} X_{g(k)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ schwach gegen eine $N(0,\frac{1}{2})$-Verteilung. Würde $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{g(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. konvergieren, dann schon gegen die Konstante $c = 0$. Also divergiert $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{g(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. gemäß dem Kolmogoroff'schen $0-1$-Gesetz. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{g(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert allerdings schwach gegen eine $N(0,\frac{1}{2})$-Verteilung.

(4.) Es sei $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(\{X_n = 1\}) = P(\{X_n = -1\}) = \frac{1}{2}\ \forall\ n \neq 2^k, k \in \mathbb{N}$$

und $P(\{X_{2^k} = k^2\}) = \frac{1}{k^2+2}, P(\{X_{2^k} = \frac{-k^2}{k^2+1}\}) = 1 - \frac{1}{k^2+2}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow\ EX_n = 0 \forall\ n \in \mathbb{N}$ und es gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{VarX_n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2^n)^2} < +\infty.$$

Wir schließen mit dem Satz von Kolmogoroff, dass $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. C_k-limitierbar ist. Es gilt: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{[P]} 0$, da $EX_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir die Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit
$P(\{Y_n = n^2\}) = \frac{1}{n^2+1}$ und $P(\{Y_n = \frac{-n^2}{n^2+1}\}) = 1 - \frac{1}{n^2+1}$

$\Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} P(\{Y_n = n^2\}) < +\infty \Longrightarrow P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{Y_n = n^2\}\right) = 0$

$\Longrightarrow\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{[P]} -1.$ (*)

Sei somit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ diejenige bijektive Abbildung, so dass $\{X_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist mit:

$$P(\{X_{g(n)} = n^2\}) = \tfrac{1}{n^2+1}, P(\{X_{g(n)} = \tfrac{-n^2}{n^2+1}\}) = 1 - \tfrac{1}{n^2+1},\ \text{falls } n \neq 2^k, k \in \mathbb{N} (**)$$
$$P(\{X_{g(n)} = 1\}) = P(\{X_{g(n)} = -1\}) = \tfrac{1}{2},\ \text{falls } n = 2^k, k \in \mathbb{N}$$

Für eine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(\{Z_n = 1\}) = P(\{Z_n = -1\}) = \frac{1}{2}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt gemäß dem starken Gesetz der großen Zahl:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \xrightarrow[n\to\infty]{[P]} 0 \text{ und somit } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{g(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{[P]} -1.$$

Es ist also $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ C_1-limitierbar, $[P]^*$-f.s. mit bedingtem Limes. □

Bemerkungen:

(1.) Im Gegensatz zu stochastischen Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ reellwertiger unabhängiger Zufallsvariablen können C_k-Mittel $[P]^*$-f.s. mit unbedingtem Limes konvergieren, ohne unbedingt $[P]^*$-f.s. zu konvergieren.

(2.) Im Gegensatz zur Situation von Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ unabhängiger Zufallsvariablen steuert sich die bedingte $[P]^*$-f.s. Konvergenz von C_k-Mitteln nicht notwendig über das Verhalten der Reihe der Erwartungswerte.

(3.) Ist $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und konvergiert die Folge $(EX_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so folgt aus der Beschränktheit der Folge der Varianzen $\{\mathrm{Var}X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die unbedingte $[P]^*$-f.s. C_k-Limitierbarkeit. Auf die Beschränktheit der Folge $\{\mathrm{Var}X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann im allgemeinen nicht verzichtet werden.

Satz 68
Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} < +\infty$. Es existiere eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, strikt isoton, mit $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dann existiert eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\underline{X}$ $[P]$-f.s. C_k-limitierbar ist und $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_{g(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. divergiert. Darüber hinaus konvergiert die Folge $(EX_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beweis:

(1.) Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2}$ absolut konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_k}}{n_k^2}$ ebenfalls absolut. Wir können daher o.b.d.A. annehmen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon strikt isoton und nach oben unbeschränkt ist.

(2.) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2}$ konvergiert zwar absolut, aber wegen (1.) können wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so umordnen, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{g(k)}}{k^2} = +\infty$ gilt. Man kann $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}_0}$ so definieren, dass man eine isotone Folge $(N_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ natürlicher Zahlen erhält, für die folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_{k=1}^{N_1+\ldots+N_\ell+\ell} \frac{a_{g(k)}}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{N_1+\ldots+N_\ell} \frac{1}{k} \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, folgt die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{g(k)}}{k^2}$

(3.) Bezeichnen wir die in (2.) exitierende Umordnung $(a_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt gemäß (2.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} = +\infty$.

Es sei $\underline{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P(\{X_n = \alpha_n\}) = P(\{X_n = -\alpha_n\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_n}{n}\right)^2$ und $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \left(\frac{\beta_n}{n}\right)^2$ wobei $\alpha_n := \max(\sqrt{b_n}, n), \beta_n := \min(\sqrt{b_n}, n), b_n = \mathrm{Var} X_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. $\Longrightarrow$ $EX_n = 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var} X_n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} = +\infty$.

Diese Folge $\underline{X}$ ist nicht $[P]$-f.s. C_1-limitierbar, d.h. gemäß dem Kolmogoroff'schen $0-1$-Gesetz divergiert $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s.

Beweis:
Angenommen $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $[P]$-f.s.

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big\{\frac{1}{n}|X_n| \geq \varepsilon\Big\}\Big) < +\infty\ \ \forall\, \varepsilon > 0$$

Aufgrund der Konstruktion der Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt jedoch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\frac{1}{n}|X_n| \geq \varepsilon\}) = +\infty \Longrightarrow \text{Widerspruch zur Annahme.}$$

Betrachten wir die zu $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in (2.) korrespondierende Umkehrabbildung $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so erhalten wir eine Folge $\{X_{g^{-1}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}\ X_{g^{-1}(n)}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} < +\infty$. Somit ist $\{X_{g^{-1}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $[P]$-f.s. C_1-limitierbar. Mit dem Lemma von Toeplitz erhalten wir die $[P]$-f.s. C_k-Limitierbarkeit von $(X_{g^{-1}_{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$. □

Literatur

[1] Doob, Stochastic Processes, 1953

[2] Edgar and Sucheston, Stopping Times and Directed Processes, 1992

[3] Metivier, Semimartingale, 1982

[4] Neveu, Discrete Parameter Martingals, 1975

[5] Shiryaev, Probability, 1984

[6] Krickeberg, Wahrscheinlichkeitstheorie, 1963

[7] L. Egghe, Stopping Time Techniques for Analysts and Probabilists, 1984

[8] A. Gut and D. Schmidt, Amarts and Set Funktion Processes, 1983

[9] Chow and Teicher, Probability Theory, Independence, Interchangeability, 1988

[10] Burkholder, Maximal inequalities as a necessary condition for almost sur convergence, Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie 33, 1964

[11] Burkholder, Distribution function inequalities for martingales, Annals of Probability 1, 1973

[12] Burkholder, A geometrical characterization of Banach spaces in which martingal difference sequences are unconditional, Annals of Probability 9, 1981

[13] D. J. Aldous, unconditional bases and martingales in $L_p(F)$, Mathematic Proc. Cambridge, 1979

[14] G. Pisier, martingales with values in uniformly convex spaces, Israel Journal Math. 20, 1975

[15] A.G. Mucci, Limits for martingal-like sequences, Pacific J. Math. 64, 1973

[16] Blum, Hanson and Koopmaus, on a strong law of large numbers for class of stationary processes, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 1963

[17] Stout, almost sure convergence, 1976

[18] P. Revesz, The Laws of Large Numbers, Academic Press, 1968

[19] Iosifescu and Theodorescu, Random Processes and Learning, 1964

[20] J. Diestel, Uhl, Vector Measures, Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society

[21] Kahane, Some Random Series of Functions, Heath, Lexington, Massachusetts

[22] Davis, On the integrability of the martingale square function, Israel J. Math. 8, 1970

[23] Katznelson and Mc Gehee, Conditionally convergent series in ????, Michigan Math. Journal 21, 1974

[24] Rosenthal, The remarkable Theorem of Levy and Steinitz, American Mathematical Monthly 94, 1987

[25] Hadwiger, Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum, Mathematische Zeitschrift 47, 1941

[26] Mc Arthur, On relationships amongst certain spaces of sequences in an arbitrary Banachspace, Canad. J. Math. 8, 1956

[27] Halperin, Sums of series, Aca. Si. Canada, 1986

[28] Kashin; Orthogonal Series; Translation of Mathematical Monographs 75, 1984

[29] Alexits; Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen

[30] Serfling; Maximalinequalities for moments of dependent random variables, Annals of Mathematical Statistics, 1970