# Konstruktive und generische Gewinnung universeller Funktionen

Daniel Mayenberger

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.

im Fachbereich IV der Universität Trier

Meinen lieben Eltern

Für die Anregungen und Hinweise zur dieser Arbeit spreche ich Herrn Professor Dr. Wolfgang Luh meinen Dank aus. Für die Übernahme des Koreferats möchte ich Herrn Professor Dr. Wolfgang Gawronski sehr herzlich danken.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit universellen Laurentreihen, universellen Faberreihen und T-universellen Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen. Zunächst werden wir einen Überblick über den Stand der Forschung geben und darauf aufbauend die Ergebnisse der Arbeit vorstellen. Grob gesagt behandeln wir folgende Fragestellungen:

(1) Kann eine Laurentreihe konstruiert werden, deren Partialsummen universelle Approximationseigenschaften haben?

(2) Kann die Existenz einer Faberreihe, deren Partialsummen über universelle Approximationseigenschaften verfügen, bewiesen werden?

(3) Gibt es auf einem beliebigen Gebiet holomorphe Funktionen, die bezüglich bestimmter Kurvenscharen in dem Gebiet universelle Approximationseigenschaften besitzen?

## 1.1 Bezeichnungen

Wir bezeichnen für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{C}$ mit $M^o$ die Menge der inneren Punkte, mit $\overline{M}$ den Abschluss von $M$. Für den Rand $\overline{M} \setminus M^o$ schreiben wir $\partial M$. Mit $\mathcal{M}(M)$ bezeichnen wir die Menge der Kompakta $K \subset M$, für die $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist. Für $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ schreiben wir kurz $\mathcal{M}$. Mit $\mathbb{D}$ bezeichnen wir die Einheitskreisscheibe $\{z : |z| < 1\}$, mit $\hat{\mathbb{C}}$ die erweiterte komplexe Ebene.
Für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{C}$ verstehen wir unter $H(M)$ die Menge der Funktionen, die auf $M$ holomorph sind; mit $A(M)$ bezeichnen wir die Funktionen, die auf $M$ stetig und auf dem Inneren von $M$ (welches leer sein kann) holomorph sind.
Für zwei beliebige Mengen $M, N \subset \mathbb{C}$ definieren wir den Abstand zwischen $M$ und $N$ als $\operatorname{dist}(M, N) = \inf_{z \in M, w \in N} |z - w|$. Für einpunktige Mengen schreiben wir auch $\operatorname{dist}(z, N)$ statt $\operatorname{dist}(\{z\}, N)$. Ist zusätzlich $\delta > 0$ gegeben, so setzen wir

$U_\delta(M) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, M) < \delta\}$ und bezeichnen letztere Menge als die $\delta$-Umgebung von M. Auch hier schreiben wir $U_\delta(z)$ statt $U_\delta(\{z\})$.
Mit kompakter Konvergenz auf einer beliebigen Menge $M \subset \mathbb{C}$ meinen wir die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum $K \subset M$. Die kompakte Konvergenz erzeugt eine Topologie, bezüglich derer für offene Mengen $O \subset \mathbb{C}$ und kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$ die Mengen $H(O)$ und $A(K)$ zu Frechét-Räumen werden. Die Metrik lässt sich konkret angeben. Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ ist für $f, g \in A(K)$ durch

$$d(f, g) = \max_{z \in K} |f(z) - g(z)|$$

eine Metrik auf $A(K)$ gegeben.
Für eine offene Menge $O \subset \mathbb{C}$ sei eine aufsteigende Ausschöpfung $\{K_n\}_n$ von $O$ durch Kompakta gegeben. Wir setzen dann für Funktionen $f, g \in H(O)$

$$\begin{aligned} p_n(f) &= \max_{z \in K_n} |f(z)|, \\ p(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f)}{1 + p_n(f)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

und

$$d(f, g) = p(f - g).$$

Damit wird $(H(O), d)$ zu einem vollständigen metrischen Raum. Insbesondere ist $O = \mathbb{C}$ zulässig. Wir bemerken, dass eine Funktionenfolge $\{f_n\}_n$ in $(H(O), d)$ genau dann gegen eine Funktion $f \in H(O)$ konvergiert, wenn $\{f_n(z)\}_n$ auf $O$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem gilt folgende Tatsache, die wir gesondert herausheben, da wir an späterer Stelle darauf zurückgreifen werden:

**Satz 1.1.1** *Es sei $O \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $K \subset O$ kompakt, $f \in H(O)$ und $\delta > 0$.*
*Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$U_\varepsilon(f) = \{h \in H(O) : d(h, f) < \varepsilon\} \subset \{g \in H(O) : \max_K |g(z) - f(z)| < \delta\}.$$

**Beweis:**
Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an. Dann existiert eine Folge von Funktionen $\{g_n\}_n$ aus $H(O)$ mit $d(g_n, f) < \frac{1}{n}$ und $\max_K |g_n(z) - f(z)| \geq \delta$. Wie bereits oben bemerkt konvergiert damit $\{g_n(z)\}_n$ auf $O$ kompakt gegen $f(z)$, also konvergiert insbesondere $\{g_n(z)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\max_K |g_n(z) - f(z)| < \delta$ für alle $n \geq N$ und dieser Widerspruch beweist den Satz.

## 1.2 Stand der Forschung

Hier nennen wir die wichtigsten schon bewiesenen Resultate. Diese dienen als Motivation für die Ergebnisse unserer Arbeit. Zuerst erläutern wir kurz die Bedeutung der Methoden, die in unserer Arbeit eine zentrale Rolle spielen.
Zur Gewinnung universeller Funktionen werden zwei grundlegende Methoden eingesetzt, die konstruktive und die generische. Die **konstruktive Methode** beinhaltet die konkrete Definition einer universellen Funktion über einen Grenzprozess, z.B. der Darstellung als Polynomreihe. Die dabei verwendeten Polynome erhält man mit Hilfe der Sätze von Runge über rationale und polynomiale Approximation. Bei der **generischen Methode** wird zunächst die gewünschte Klasse universeller Funktionen rein abstrakt definiert. Dann wird gezeigt, dass sich diese als abzählbarer Durchschnitt von (im betrachteten Funktionenraum) dichten Mengen darstellen lässt. Daraus folgt mit dem Baireschen Kategoriesatz, dass auch die zu Beginn definierte Klasse universeller Funktionen eine dichte $G_\delta$-Menge im jeweils betrachteten Funktionenraum ist.

### 1.2.1 T-universelle Funktionen

#### T-universelle ganze Funktionen

Das erste Resultat stammt von Birkhoff [Bir29] und wurde bereits 1929 bewiesen:

**Satz 1.2.1** *Es existiert eine ganze Funktion $\Phi$ mit folgender Eigenschaft:
Für jede ganze Funktion $f$ gibt es eine unbeschränkte Folge $\{z_n\}_n$ positiver Zahlen, so dass $\{\Phi(z+z_n)\}_n$ auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.*

Die Funktion $\Phi$ aus dem obigen Satz hat die Eigenschaft, dass durch eine Translation im Argument von $\Phi$ jede ganze Funktion beliebig genau angenähert werden kann. Eine Funktion, die dieser Eigenschaft genügt, nennt man *translationsuniversell* oder kurz *T-universell.*
Das Ergebnis von Birkhoff wurde 1941 von Seidel und Walsh [SW41] verallgemeinert:

**Satz 1.2.2** *Es gibt eine ganze Funktion $\Phi$, die folgender Eigenschaft genügt:
Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und jede Funktion $f \in H(G)$ existiert eine Folge komplexer Zahlen $\{z_n\}_n$, so dass $\{\Phi(z+z_n)\}_n$ auf $G$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.*

Ein weiterführendes Resultat aus dem Jahre 1976 stammt von Luh [Luh76]:

**Satz 1.2.3** *Es sei eine unbeschränkte Folge $\{z_n\}_n$ komplexer Zahlen gegeben. Dann existiert eine ganze Funktion $\Phi$ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und jede Funktion $f \in A(K)$ kann ein Teilfolge*

*$\{z_{n_k}\}_k$ von $\{z_n\}_n$ so gewählt werden, dass $\{\Phi(z+z_{n_k})\}_k$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Wir bemerken, dass es keine Rolle spielt, ob eine universelle Funktion $\Phi$ Funktionen $f \in H(G)$ für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ oder Funktionen $f \in A(K)$ für ein Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ approximiert. Nach [Luh86a], Lemma 3, sind diese Eigenschaften sogar äquivalent.
Eine sehr interessante Verallgemeinerung, die eine Motivation für diese Arbeit darstellt, wurde 2000 von Tenthoff [Ten00] gezeigt:

**Satz 1.2.4** *Es existiert eine ganze Funktion $\Phi$, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jede Funktion $f \in A(K)$ sowie für jede Gerade $\Gamma \subset \mathbb{C}$ existiert eine Punktfolge $\{z_n\}_n$ mit $z_n \in \Gamma$ derart, dass $\{\Phi(z+z_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Die Gerade $\Gamma$ in obigem Satz stellt einen *vorgegebenen Approximationsweg* dar. Wir werden später auf solche T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen näher eingehen.
Duyos Ruiz [Duy83] zeigte 1983 die Existenz einer T-universellen ganzen Funktion, deren Potenzreihenkoeffizienten ein vorgegebenes Wachstum aufweisen. Ferner bewiesen Luh, Martirosian und Müller [LMM98b], dass eine T-universelle ganze Funktion eine Potenzreihe mit gewisser vorgegebener Lückenstruktur haben kann.

### T-universelle Funktionen auf Gebieten und offenen Mengen

Seidel und Walsh [SW41] bewiesen 1941 die Existenz einer auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktion $\Phi$, so dass für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G$ und jede auf $G$ holomorphe Funktion $f$ eine Folge $\{\alpha_n\}_n$ existiert, so dass $\left\{\Phi\left(\frac{z+\alpha_n}{1+\overline{\alpha_n}z}\right)\right\}_n$ auf $G$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.
Die Funktion $\Phi$ in diesem Resultat ist streng genommen nicht T-universell, da das Argument „$\frac{z+\alpha_n}{1+\overline{\alpha_n}z}$“ der Funktion $\Phi$ keine lineare Funktion in $z$ ist. Das erste Resultat zu T-universellen Funktionen im Einheitskreis wurde 1976 bewiesen und stammt von Luh [Luh76]:

**Satz 1.2.5** *Es gibt eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$, die über folgende Eigenschaft verfügt:*
*Für jeden Punkt $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und jede Funktion $f \in A(K)$ finden sich Punktfolgen $\{a_n\}_n$ und $\{b_n\}_n$ derart, dass $\{a_n z + b_n\}_n$ für jedes $z \in K$ aus $\mathbb{D}$ heraus gegen $\zeta$ konvergiert. Ferner konvergiert $\{\Phi(a_n z + b_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$.*

Auch zu diesem Satz zeigte Tenthoff [Ten00] eine Version mit vorgegebenen Approximationswegen:

**Satz 1.2.6** *Es existiert eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und jede Funktion $f \in A(K)$ sowie jeden Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$ gibt es eine Funktionenfolge $\{t_n(z)\}_n$ derart, dass $t_n(z)$ für jedes $z \in K$ aus $\{re^{i\vartheta}; r \in [0, 1)\}$ heraus gegen $e^{i\vartheta}$ konvergiert. Außerdem konvergiert $\{\Phi(t_n(z))\}_n$ auf $K$ kompakt gegen $f(z)$.*

Im Jahre 1979 verallgemeinerte Luh [Luh79] das Ergebnis über T-universelle Funktionen von der Einheitskreisscheibe auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G$. Genauer gilt folgendes Ergebnis:

**Satz 1.2.7** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine Funktion $\Phi \in H(G)$, die über folgende Eigenschaft verfügt:*
*Für jeden Punkt $\zeta \in \partial G$, jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ und jede Funktion $f \in A(K)$ finden sich Punktfolgen $\{a_n\}_n$ und $\{b_n\}_n$ derart, dass $\{a_n z + b_n\}_n$ für jedes $z \in K$ aus $G$ heraus gegen $\zeta$ konvergiert. Ferner konvergiert $\{\Phi(a_n z + b_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$.*

Die Forderung „$G \neq \mathbb{C}$“ ist keine wirkliche Einschränkung, da für $G = \mathbb{C}$ wieder der Fall T-universeller ganzer Funktionen vorliegt. Erweitert man die Betrachtung auf die erweiterte komplexe Ebene $\hat{\mathbb{C}}$, so ist dann Unendlich der einzige Randpunkt von $\mathbb{C}$ in $\hat{\mathbb{C}}$.
Luh [Luh88] zeigte 1988, dass auch auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{C}$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten eine T-universelle Funktion $\Phi \in H(O)$ existiert. Zusätzlich sind auch alle Ableitungen von $\Phi$ T-universell. Luh, Martirosian und Müller [LMM98a] fügten 1998 eine weitere Eigenschaft hinzu: Für eine solche offene Menge $O \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in O$ gibt es eine T-universelle Funktion $\Phi \in H(O)$, deren Potenzreihe um den Nullpunkt eine vorgegebene Lückenstruktur hat. Dieselben Autoren [LMM02] zeigten 2002 speziell für die Einheitskreisscheibe, dass die T-universelle Funktion weiteren Forderungen genügen kann. Die T-universelle Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$ weist dann außer einer vorgegebenen Lückenstruktur auch ein vorgegebenes Randverhalten auf.

### 1.2.2 O-universelle Funktionen (universelle Taylor- und Laurentreihen)

#### Universelle Taylorreihen

Bereits 1915 zeigte Fekete ([Lor53], S. 46), dass es eine universelle reelle Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ gibt, so dass zu jeder auf $[-1, 1]$ stetigen Funktion $f$ mit $f(0) = a_0$ eine Teilfolge $\{n_k\}_k$ existiert, so dass $\left\{ \sum\limits_{\nu=0}^{n_k} a_\nu x^\nu \right\}_k$ auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen

$f(x)$ konvergiert. Luh [Luh76] bewies 1976 elementar die Existenz einer reellen Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so dass für jedes Intervall $[a,b]$, welches die Null nicht enthält und jede auf $[a,b]$ stetige Funktion $f$ eine Teilfolge $\{n_k\}_k$ existiert, so dass $\left\{\sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu x^\nu\right\}_k$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.
Luh [Luh70] bewies 1970 das erste Ergebnis über eine universelle Taylorreihe mit Approximationseigenschaften im Komplexen:

**Satz 1.2.8** *Die Matrix $A = (\alpha_{n\nu}; n, \nu \in \mathbb{N}_0)$ erfülle die Zeilensummen- und Spaltenbedingung, d.h.*

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} = 1, \quad \lim_{i\to\infty} \alpha_{ij} = 0 \textit{ für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

*Dann existiert eine Potenzreihe $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius Eins, die folgende Eigenschaft besitzt:*
*Für jedes beschränkte einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \overline{\mathbb{D}}^c$ und jede Funktion $f \in H(G)$ findet sich eine streng monoton wachsende Folge $\{n_k\}_k$ natürlicher Zahlen derart, dass*

$$\sigma_{n_k}^A(\Phi, z) = \sum_{\nu=0}^{n_k} \alpha_{n_k\nu} \cdot s_\nu(\Phi, z)\,, \quad \textit{wobei } s_\nu(\Phi, z) = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu z^\mu \textit{ ist,}$$

*auf $G$ kompakt gegen $f(z)$ konvergiert.*

Die Potenzreihe der Funktion $\Phi$ aus dem letztgenannten Satz besitzt eine spezielle Überkonvergenzeigenschaft (overconvergence). Daher werden Funktionen mit dieser Eigenschaft *O-universelle Funktionen* genannt.
Chui und Parnes [CP71] ersetzten in der Aussage dieses Satzes die Menge $H(G)$ durch $A(K)$ für $K \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{D}}^c\right)$. Wie bereits oben erwähnt (siehe [Luh86a], Lemma 3) sind die beiden letztgenannten Ergebnisse äquivalent. Luh [Luh86b] zeigte 1986 eine Verallgemeinerung seines Ergebnisses von 1970 (und damit auch eine Verallgemeinerung des Resultates von Chui und Parnes von 1971):

**Satz 1.2.9** *Es sei $O \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Für eine Funktion $\Phi \in H(O)$ und einen Punkt $\zeta \in O$ sei $S_n(\Phi,\zeta)(z)$ die $n$-te Teilsumme der Taylorreihe von $\Phi$ mit Entwicklungsmittelpunkt $\zeta$.*
*Dann existiert eine Funktion $\Phi \in H(O)$ und eine Folge natürlicher Zahlen $\{p_n\}_n$, so dass folgende Eigenschaften gelten:*

*(1)* $\{S_{p_n}(\Phi,\zeta)(z)\}_n$ *konvergiert auf* $O$ *kompakt gegen* $\Phi(z)$ *für jedes* $\zeta \in O$.

*(2) Für jedes Kompaktum* $K \in \mathcal{M}(\overline{O}^c)$ *und jede Funktion* $f \in A(K)$ *gibt es eine Teilfolge* $\{p_{n_k}\}_k$ *von* $\{p_n\}_n$*, so dass* $\left\{S_{p_{n_k}}(\Phi,\zeta)(z)\right\}_k$ *auf* $K$ *gleichmäßig gegen* $f(z)$ *konvergiert für jedes* $\zeta \in O$.

Wir bemerken, dass der obige Satz nicht nur eine Universalitätseigenschaft beinhaltet, sondern zusätzlich eine Äquikonvergenz. Denn die beiden im Satz genannten Eigenschaften gelten stets für alle Punkte $\zeta \in O$.
Luh und Trautner [LT76] wiesen 1976 nach, dass spezielle Matrixtransformierte der geometrischen Reihe universelle Approximationseigenschaften besitzen. Nestoridis [Nes96] wies 1996 mit Hilfe der generischen Methode die Existenz einer O-universellen Potenzreihe auf $\mathbb{D}$ nach. Ferner verallgemeinerte er das Ergebnis dahingehend, dass das Kompaktum $K$ aus den beiden letztgenannten Sätzen auch Randpunkte von $\mathbb{D}$ enthalten kann. D.h. „$K \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}^c)$“ wurde ersetzt durch „$K \in \mathcal{M}(\mathbb{D}^c)$“. Gehlen, Luh und Müller [GLM00] zeigten 2000, dass auf einem beschränkten mehrfach zusammenhängenden Gebiet keine O-universelle Funktion existieren kann. Melas [Mel01] leitete 2001 mit der generischen Methode die Existenz einer O-universellen Funktion auf dem Komplement eines Kompaktums $K \in \mathcal{M}$ her. Speziell auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ wurde auch die Existenz einer O-universellen Funktion von Vlachou [Vla02c] bewiesen. Vlachou [Vla02b] zeigte 2002, dass die Resultate über O-universelle Funktionen, die mit der konstruktiven bzw. generischen Methode erhalten wurden, äquivalent sind.

### Universelle Laurentreihen

Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet derart, dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ endlich viele Komponenten $A_0, \ldots, A_k$ besitzt. Nach (eventuell erforderlicher) Umnummerierung können wir $\infty \in A_0$ annehmen. Eine Funktion $\Phi \in H(\Omega)$ hat eine eindeutige Zerlegung der Form $\Phi = \Phi_0 + \ldots + \Phi_k$ mit $\Phi_j \in H(A_j^c)$ $(j = 0, \ldots, k)$. Wir fixieren Punkte $a_j \in A_j$ $(j = 0, \ldots, k)$ und setzen formal für $z \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} M_n(\Phi, a_0, \ldots, a_k)(z) = & \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Phi_0^{(\nu)}(a_0)}{\nu!}(z-a_o)^\nu + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu(\Phi_1, a_1)}{(z-a_1)^\nu} + \ldots + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu(\Phi_k, a_k)}{(z-a_k)^\nu}, \end{aligned}$$

wobei $c_\nu(\Phi_j, a_j)$ die Koeffizienten der Laurentreihe von $\Phi_j$ bezüglich $a_j$ sind für $j = 1, \ldots, k$. Mit diesen Bezeichnungen definieren wir $\mathcal{U}_L(\Omega)$ als Menge aller Funktionen $\Phi \in H(\Omega)$, die folgender Eigenschaft genügen:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(\Omega^c \setminus \{a_1, \ldots, a_k\})$, jede Funktion $f \in A(K)$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $\lambda \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{z \in K} |M_\lambda(\Phi, a_0, \ldots, a_k)(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Die Klasse $\mathcal{U}_L(\Omega)$ heißt *Menge der universellen Laurentreihen auf* $\Omega$. Mit obigen Definitionen gilt folgender Satz, der 2002 von Costakis, Nestoridis und Papadoperakis [CNP02] bewiesen wurde:

**Satz 1.2.10** *Für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, dessen Komplement $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ endlich viele Komponenten besitzt, ist die Klasse $\mathcal{U}_L(\Omega)$ eine in $(H(\Omega), d)$ dichte $G_\delta$-Menge.*

Dabei ist $d$ die im vorigen Abschnitt eingeführte Metrik auf $H(\Omega)$. In [Vla02a] zeigte Vlachou, dass unter gewissen Bedingungen an die Menge $\Omega$ eine auf $\Omega$ universelle Laurentreihe Ostrowski-Lücken besitzen muss.

### Universelle Faberreihen

Es sei $B \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum, dessen Komplement ein in $\hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Wir wählen eine konforme Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}}^c \to B^c$ mit $\varphi(\infty) = \infty$ und der Reihenentwicklung

$$\varphi(z) = d\left(z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \qquad \right)$$

mit $d > 0$. Dann bezeichnen mit $\{p_n\}_n$ die zu $B$ (eigentlich zu $\varphi$) gehörigen Faberpolynome. Dabei ist das Faberpolynom $p_n(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von $(\varphi^{-1}(z))^n$ an Unendlich.
Dodunova [Dod90] zeigte 1990 die Existenz einer universellen Faberreihe mit Hilfe von Summationsmethoden. Genauer gilt:

**Satz 1.2.11** *Es sei $B \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum wie oben und $\{p_n\}_n$ die Folge der Faberpolynome bezüglich $B$. Ferner sei $A = (a_{ij}; i, j \in \mathbb{N}_0)$ eine unendliche untere Dreiecksmatrix mit*

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} = 1, \quad \lim_{i\to\infty} a_{ij} = 0 \textit{ für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

*Außerdem sei $\{K_n\}_n$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{M}$. Dann existiert eine Faberreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z)$ vom Konvergenzradius $r > 1$ mit folgender Eigenschaft:*

*Mit $S_t(z) = \sum_{\nu=0}^{t} a_\nu p_\nu(z)$ existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und jeder Funktion $f \in A(K_N)$ eine Zahlenfolge $\{n_k\}_k$ derart, dass die Folge*

$$\left\{\sum_{i=0}^{k} a_{n_k n_i} S_{n_i}(z)\right\}_k$$

*auf $K_N$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Katsoprinakis, Nestoridis und Papadoperakis [KNP01] führten mittels der Faberrabbildung die Existenz von universellen Faberreihen auf die von universellen Taylorreihen zurück. Es sei $G$ ein Jordangebiet mit analytischem Rand und $p_n$ die Faberpolynome bezüglich $\overline{G}$. Die Menge aller Funktionen $\Phi \in H(G)$ mit Faberreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z)$, die folgender Eigenschaft genügt, heißt *Menge der auf $G$ universellen Faberreihen*:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(G^c)$, jede Funktion $f \in A(K)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $\lambda \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{z\in K} \left| \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_\nu p_\nu(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

**Satz 1.2.12** *Für ein Jordangebiet $G$ mit analytischem Rand ist die Menge der auf $G$ universellen Faberreihen im Raum $(H(G), d)$ eine dichte $G_\delta$-Menge.*

### 1.2.3 Ableitungs- und stammfunktionsuniverselle Funktionen

Zuerst bewies MacLane [Mac52] die Existenz einer ganzen Funktion $\Phi$, deren Folge von Ableitungen $\{\Phi^{(n)}\}_n$ in $(H(\mathbb{C}), d)$ dicht liegt. Eine solche Funktion heißt *ableitungsuniversell*.
Blair und Rubel [BR84] zeigten 1984, dass es eine ganze Funktion $\Phi$ gibt, deren Folge von Stammfunktionen $\{\Phi^{(-n)}\}_n$ in $(H(\mathbb{C}), d)$ dicht ist. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt sich *stammfunktionsuniversell*.

## 1.3 Ergebnisse dieser Arbeit

### 1.3.1 Universelle Laurentreihen

Wir wissen bereits von den Resultaten in [GLM00], dass eine universelle Taylorreihe auf einem beschränkten mehrfach zusammenhängenden Gebiet nicht existieren kann. Eine Laurentreihe scheint sich besser an solche Gebiete „mit Löchern“ anzupassen. In der Tat wurde eine universelle Laurentreihe bereits mit der generischen Methode gewonnen, siehe dazu [CNP02]. Unser Ziel ist es, eine universelle Laurentreihe mit Hilfe der konstruktiven Methode zu erhalten. Wir werden genauer folgenden Satz beweisen, wobei die Bezeichnungen aus 1.2.2 verwendet wurden:

**Satz 1.3.1** *Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, so dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ die Komponenten $A_0, \ldots, A_k$ mit $\infty \in A_0$ hat. Es seien $a_j$ feste Punkte aus $A_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Dann existieren eine Funktion $f \in H(\Omega)$ und eine Folge natürlicher Zahlen $\{t_n\}_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

*(1) Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ gilt*

$$\max_{z\in K} |M_{t_n}(f,\zeta,a_1,\ldots,a_k)(z) - f(z)| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

*für alle $\zeta \in A_0^c$.*

*(2) Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(\Omega^c \setminus \{a_1,\ldots,a_k\})$ und jede Funktion $g \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{t_{n_s}\}_s$ von $\{t_n\}_n$, so dass gilt*

$$\max_{z\in K} |M_{t_{n_s}}(f,\zeta,a_1,\ldots,a_k)(z) - g(z)| \to 0 \qquad (s\to\infty)$$

*für alle $\zeta \in A_0^c$.*

Außerdem werden wir zeigen, dass die Menge aller Funktionen, die über die Eigenschaften der Funktion $f$ aus obigem Satz verfügen, in $(H(\Omega), d)$ dicht ist. Der Beweis dieser Ergebnisse ist in Kapitel 2 ausgeführt.

### 1.3.2 Universelle Faberreihen

Hier ist die Gewinnung einer universellen Faberreihe mit der konstruktiven und der generischen Methode Gegenstand der Untersuchung. Wir erinnern an die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.2.2: Es sei $B \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum, dessen Komplement ein in $\hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Wir wählen eine konforme Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}}^c \to B^c$ mit $\varphi(\infty) = \infty$ und der Reihenentwicklung

$$\varphi(z) = d\left(z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \qquad\right) \text{ mit } d > 0.$$

Es seien $\{p_n\}_n$ die Folge der zu $B$ gehörigen Faberpolynome.
Für die beiden folgenden Sätze sei $R > 1$ fest und $G$ das Innengebiet der Jordankurve $\{\varphi(t); |t| = R\}$. Jede Funktion $f \in H(G)$ besitzt eine eindeutige Darstellung in Form einer Faberreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) p_n(z).$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist auf $G$ kompakt gegen $f(z)$ konvergent. Die Teilsummen einer solchen Faberreihe bezeichnen wir mit

$$F_m(f,z) = \sum_{n=0}^{m} c_n(f) p_n(z).$$

Dann gilt zum einen das folgende, konstruktive Ergebnis:

**Satz 1.3.2** *Es sei $G$ wie oben angegeben. Dann gibt es eine Funktion $f \in H(G)$ und eine Folge natürlicher Zahlen $\{t_n\}_n$, so dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:*

*(1) Die Folge $\{F_{t_n}(f,z)\}_n$ konvergiert auf $G$ kompakt gegen $f(z)$.*

*(2) Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$ und jede Funktion $g \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{t_{n_s}\}_s$ von $\{t_n\}_n$, so dass $\{F_{t_{n_s}}(f,z)\}_s$ auf $K$ gleichmäßig gegen $g(z)$ konvergiert.*

Zum anderen werden wir mit der generischen Methode beweisen:

**Satz 1.3.3** *Es sei $G$ wie oben angegeben. Dann ist die Menge aller Funktionen $f \in H(G)$, die über die Eigenschaften des letztgenannten Satzes verfügen, eine in $(H(G), d)$ dichte $G_\delta$-Menge.*

In Kapitel 3 werden wir auf den Beweis dieser Ergebnisse eingehen.

### 1.3.3 T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen

Die Ergebnisse in Kapitel 4 wurden von den oben in Abschnitt 1.2.1 angegebenen Resultaten von Tenthoff motiviert. Unser Ziel ist zum einen eine weniger rechenintensive Konstruktion einer T-universellen Funktion mit vorgegebenen Approximationswegen. Zum anderen ist unser Vorhaben, solche Funktionen mit der generischen Methode zu gewinnen. In Kapitel 4 werden wir die beiden folgenden Ergebnisse mit der **konstruktiven Methode** beweisen:

**Satz 1.3.4** *Es gibt eine ganze Funktion $\Phi$ mit der folgenden Eigenschaft:
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jeder Funktion $f \in A(K)$ sowie zu jeder Geraden $\Gamma \subset \mathbb{C}$ existiert eine gegen Unendlich konvergente Punktfolge $\{z_n\}_n$ von Punkten auf $\Gamma$ derart, dass $\{\Phi(z + z_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Für die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ setzen wir zur Abkürzung

$$R_\vartheta = \{z : z = re^{i\vartheta}; r \in [0,1)\} \text{ für } \vartheta \in [0, 2\pi).$$

**Satz 1.3.5** *Es existiert eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$, die über folgende Eigenschaft verfügt:
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jeder Funktion $f \in A(K)$ und jedem Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$ gibt es Folgen $\{a_n\}_n$ in $(0, \infty)$ und $\{b_n\}_n$ auf $R_\vartheta$ derart, dass $\{a_n z + b_n\}_n$ für jedes $z \in K$ aus $\mathbb{D}$ heraus gegen $e^{i\vartheta}$ konvergiert und $\{\Phi(a_n z + b_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Mit Hilfe einer Abbildung der Form $\varphi(z) = ze^{i\psi(|z|)}$, wobei $\psi$ stetig ist, verallgemeinern wir das Ergebnis über T-universelle ganze Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen von Geraden auf allgemeinere Kurvenscharen. Außerdem weisen wir nach, dass die Menge solcher Funktionen eine in $(H(\mathbb{C}), d)$ dichte $G_\delta$-Menge ist.

Die **generische Methode** stößt hier an ihre Grenzen. Wir können zwar die Existenz T-universeller Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen nachweisen, jedoch ist das Ergebnis schwächer als mit der konstruktiven Methode. Für höchstens abzählbare Kurvenscharen gilt jedoch folgendes Ergebnis:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $z_0 \in G$ fest, $I, J \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle und die Abbildung $z_\alpha : I \to G$ sei für jedes $\alpha \in J$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\lim\limits_{t \to \inf(I)} z_\alpha(t) = z_0$ gleichmäßig bezüglich $\alpha \in J$,

(2) $\lim\limits_{t \to \sup(I)} z_\alpha(t) \in \partial G$,

(3) aus $z_\alpha(s) = z_\beta(t)$ folge schon $s = t$ und $\alpha = \beta$.

Dann heißt $(z_\alpha)_{\alpha \in J}$ eine *allgemeine Kurvenschar (im Gebiet G).*

Für ein Gebiet $G$ und eine allgemeine Kurvenschar $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ in $G$ heißt eine Funktion $\Phi \in H(G)$ *T-universell bezüglich der Kurvenschar* $\mathcal{C}$ *im Gebiet* $G$, falls Folgendes gilt:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jede Funktion $f \in A(K)$, jeden Parameter $\gamma \in J$ (der eine Kurve $C_\gamma \in \mathcal{C}$ definiert)und jedes $\varepsilon > 0$ finden sich Punkte $a \in (0,1)$ und $b \in C$ mit

$$\max_{z \in K} |\Phi(az + b) - f(z)| < \varepsilon \text{ und } |b - \zeta| < \varepsilon, \qquad \text{wobei } \zeta = \lim_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t) \text{ ist.}$$

Die Menge solcher Funktionen $\Phi$ wird mit $\mathcal{U}_\mathcal{C}(G)$ bezeichnet. Es gilt folgender

**Satz 1.3.6** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $I, J \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle und die Abbildung $z : J \times I \to \mathbb{C}$ sei stetig und so beschaffen, dass $\{z(\alpha, \cdot); \alpha \in J\}$ eine allgemeine Kurvenschar auf $G$ definiert. Ferner sei $K \subset J$ höchstens abzählbar und $\mathcal{C} = \{z(\alpha, I); \alpha \in K\}$ eine (höchstens abzählbare) Kurvenschar.*
*Dann ist $\mathcal{U}_\mathcal{C}(G)$ eine in $(H(G), d)$ dichte $G_\delta$-Menge.*

# Kapitel 2

# Universelle Laurentreihen

## 2.1 Bezeichnungen

Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet der Art, dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ aus endlich vielen Komponenten $A_0, A_1, \ldots, A_k$ mit $k \geq 0$ besteht. Wir nehmen ohne Einschränkung $\infty \in A_0$ an und halten Punkte $a_j \in A_j\,(j = 1, \ldots, k)$ fest. Dann hat jede Funktion $f \in H(\Omega)$ eine eindeutige Zerlegung der Form

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_k$$

mit $f_j \in H(A_j^c)\,(j = 0, \ldots, k)$ und $\lim\limits_{z\to\infty} f_j(z) = 0\,(j = 1, \ldots, k)$. Dies lässt sich analog zu [KNP01], Proposition 2.4, zeigen, wo dies für ein zweifach zusammenhängendes Gebiet bewiesen wurde. Jedes $f_j\,(j = 1, \ldots, k)$ besitzt eine Entwicklung in eine Laurentreihe um $a_j$ der Form

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f_j, a_j)}{(z - a_j)^n}$$

für hinreichend große $|z - a_j|$. Für $f_0$ nehmen wir einfach die Teilsummen der Taylorreihe um $\zeta \in A_0^c$ und definieren damit formal die folgenden Summen:

$$\begin{aligned} M_n(f, \zeta, a_1, \ldots, a_k)(z) = &\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z - \zeta)^\nu + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu(f_1, a_1)}{(z - a_1)^\nu} + \ldots + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu(f_k, a_k)}{(z - a_k)^\nu}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass es durchaus auftreten kann, dass für jedes $z \in \Omega$ eine oder mehrere der Teilsummen auf der rechten Seite für $n \to \infty$ divergieren. Nichtsdestotrotz ist Überkonvergenz, also die Konvergenz aller Teilsummen auf der rechten Seite bei Summation bis zu einem $n_k \in \mathbb{N}$ für $k \to \infty$ möglich und wird bei der folgenden Konstruktion auch erzielt.

## 2.2 Ein vorbereitender Hilfssatz

Zur Vorbereitung zeigen wir eine Variante des Rungeschen Approximationssatzes über rationale Approximation. Es sei $O \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine beliebige offene Menge. Dann gibt es eine Ausschöpfung von $O$ durch eine Folge offener Mengen $\{O_n\}_n$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{O_n} \subset O_{n+1} \subset O$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Zu jedem Kompaktum $K \subset O$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \in O_n$ für alle $n \geq N$.

(3) $\partial O_n$ besteht aus endlich vielen geschlossenen Polygonzügen.

(4) Falls $O$ unbeschränkt ist, kann zusätzlich $\infty \in O_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gefordert werden.

Einen Beweis dazu findet man etwa unter [Rud87], Theorem 13.3.

**Satz 2.2.1** *Es sei $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ eine kompakte Menge mit $\infty \in A$ und beschränktem Komplement $A_0 = \hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Ferner sei $f$ holomorph auf $A$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben.*
*Dann gibt es eine rationale Funktion $R$ mit (einfachen) Polen in $A_0$, so dass gilt:*

$$\sup_{z\in A} |R(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

**Beweis:**
Da $A$ abgeschlossen ist, gibt es eine offene Menge $O \supset A$, auf der $f$ holomorph ist. Wir wählen eine Ausschöpfung $\{O_n\}$ von $O$ mit $\infty \in O_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und obigen Eigenschaften und halten ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A \subset O_N$ fest.
Es sei $z \in A$ fest, aber beliebig. Dann gilt

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial O_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Zur Abkürzung setzen wir $\Gamma = \partial O_N$. Dann ist $\Gamma$ rektifizierbar. Da $\Gamma$ kompakt ist, gibt es zu $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' \in (0, \varepsilon')$, so dass für alle $z_1, z_2 \in \Gamma$ mit $|z_1 - z_2| < \delta'$ folgt: $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon'$.
Anschließend unterteilen wir $\Gamma$ in $m$ paarweise disjunkte Bögen $B_\nu$ mit Endpunkten $\zeta_\nu$ und $\zeta'_\nu$ und einer Länge kleiner als $\delta'$. Ferner setzen wir $d = \operatorname{dist}(\Gamma, A) > 0$ sowie $C = \max\limits_{z\in\Gamma} |f(z)|$.
Dann gilt für alle $z \in A$ und $\zeta \in B_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m)$:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z} \right| = \left| \frac{f(\zeta) - f(\zeta_\nu)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_\nu)(\zeta - \zeta_\nu)}{(\zeta - z)(\zeta_\nu - z)} \right| \leq \frac{d + C}{d^2} \varepsilon'.$$

Definieren wir damit

$$R(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z}(\zeta'_\nu - \zeta_\nu),$$

so hat R einfache Pole auf $\Gamma \subset A_0^o$. Es gilt dann für alle $z \in A$:

$$|2\pi i(f(z) - R(z))| = \left| -\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi i R(z) d\zeta \right| \leq \sum_{\nu=1}^{m} \left| \int\limits_{B_\nu} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z} d\zeta \right| \leq$$
$$\leq \frac{d + C}{d^2} L(\Gamma)\, \varepsilon',$$

wobei $L(\Gamma)$ die Kurvenlänge von $\Gamma$ bezeichnet. Wählt man $\varepsilon'$ klein genug, so wird die rechte Seite kleiner als das vorgegebene $\varepsilon$, und der Satz ist damit bewiesen.

**Bemerkung 2.2.2** Mit der *Methode der Polverschiebung* (siehe etwa [Gai80]) können die Pole der approximierenden Funktion $R$ noch innerhalb der einzelnen Komponenten von $A_0$ verschoben werden. Insbesondere kann erreicht werden, dass $R$ nur einen Pol hat, falls $A_0$ nur aus einer Komponente besteht, also ein Gebiet ist.

## 2.3 Konstruktion einer universellen Laurentreihe

**Satz 2.3.1** *Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, so dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ die Komponenten $A_0, \ldots, A_k$ mit $\infty \in A_0$ hat. Es seien $a_j$ feste Punkte aus $A_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Dann existieren eine Funktion $f$, die in $\Omega$ holomorph ist, und eine Folge natürlicher Zahlen $\{t_n\}_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

*(1) Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ gilt*

$$\max_{z\in K} |M_{t_n}(f, \zeta, a_1, \ldots, a_k)(z) - f(z)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

*für jedes $\zeta \in A_0^c$.*

*(2) Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(\Omega^c \setminus \{a_1, \ldots, a_k\})$ und jede Funktion $g \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{t_{n_s}\}_s$ von $\{t_n\}_n$, so dass gilt*

$$\max_{z\in K} |M_{t_{n_s}}(f, \zeta, a_1, \ldots, a_k)(z) - g(z)| \to 0 \qquad (s \to \infty)$$

*für jedes $\zeta \in A_0^c$.*

**Beweis:**
**1) Vorbereitungen**
Wir wählen für jedes $j \in \{0, \dots, k\}$ eine Ausschöpfung von $A_j^c$ durch eine aufsteigende Folge von abgeschlossenen Mengen $\{L_n^{(j)}\}_n$, wobei jedes $L_n^{(0)}$ kompakt ist. Da $A_j^c$ in $\hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist, können wir $L_n^{(j)} \in \mathcal{M}(A_j^c)$ $(j = 1, \dots, k)$ annehmen.
Weiterhin wählen wir eine Folge von Kompakta $\{K_n^*\}_n$ mit $K_n^* \in \mathcal{M}\left([\Omega \cup \{a_1, \dots, a_k\}]^c\right)$, so dass für jedes $K \in \mathcal{M}\left([\Omega \cup \{a_1, \dots, a_k\}]^c\right)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_N^*$. Es sei $\{p_n^*\}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Wir wählen eine Abzählung $\{(K_n, p_n)\}_n$ der Menge

$$\big\{(K, p) : K \in \{K_n^*; n \in \mathbb{N}\},\, p \in \{p_n^*; n \in \mathbb{N}\}\big\},$$

in der jede Kombination $(K_m^*, p_l^*)$ unendlich oft vorkommt.
Schließlich bezeichnen wir noch $K_n^{(j)} = K_n \cap A_j$ $(j = 0, \dots, k)$.

**2) Konstruktion der universellen Funktion**
Wir konstruieren induktiv $k + 1$ Funktionenfolgen und eine Folge natürlicher Zahlen. Zu Beginn definieren wir

$$\Theta_0^{(0)}(z) = z - a_1, \quad \Theta_0^{(j)}(z) = \frac{1}{z - a_j}\,(j = 1, \dots, k); \quad \lambda_0 = 1.$$

Wir nehmen an, dass $\Theta_0^{(m)}, \dots, \Theta_k^{(m)}$ und $\lambda_m$ für $m = 0, \dots, n - 1$ schon derart definiert worden sind, dass

(i) $\Theta_m^{(0)}$ ein Polynom ist, und

(ii) $\Theta_m^{(j)}$ eine rationale Funktion mit einem Pol in $a_j$ ist für $j = 1, \dots, k$. Damit gilt also $\Theta_m^{(j)} = \dfrac{P_m^{(j)}(z)}{(z - a_j)^{q_m^{(j)}}}$, wobei $P_m^{(j)}$ ein Polynom mit $\deg\left(P_m^{(j)}\right) < q_m^{(j)}$ ist.

Für den Induktionsschritt setzen wir

$$g_{n-1} = \max\left\{\deg\left(\Theta_{n-1}^{(0)}\right); q_n^{(j)}, j = 1, \dots, k\right\}$$

und wählen eine natürliche Zahl $\lambda_n$ mit

$$\lambda_n > (n - 1)(\lambda_{n-1} + g_{n-1}).$$

Nach dem Rungeschen Satz über polynomiale Approximation gibt es ein Polynom $\Theta_n^{(0)}$, das Folgendes leistet:

$$\max_{z\in L_n^{(0)}} |\Theta_n^{(0)}(z)| < \frac{1}{2^n \max\limits_{z\in L_n^{(0)}} |z-a_1|^{\lambda_n}}, \tag{2.1}$$

$$\max_{z\in K_n^{(0)}} \left| \Theta_n^{(0)}(z) - \frac{p_n(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} (z-a_1)^{\lambda_\nu} \Theta_\nu^{(0)}(z)}{(z-a_1)^{\lambda_n}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z\in K_n^{(0)}} |z-a_1|^{\lambda_n}}. \tag{2.2}$$

Für $j = 1, \ldots, k$ existiert nach Satz 2.2.1 eine rationale Funktion $\Theta_n^{(j)}$ mit einem Pol jeweils in $a_j$, die Folgendes erfüllt:

$$\sup_{z\in L_n^{(j)}} |\Theta_n^{(j)}(z)| < \frac{1}{2^n \max\limits_{z\in L_n^{(j)}} \frac{1}{|z-a_j|^{\lambda_n}}}, \tag{2.3}$$

$$\max_{z\in K_n^{(j)}} \left| \Theta_n^{(j)}(z) - \frac{p_n(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(z-a_j)^{\lambda_\nu}} \Theta_\nu^{(j)}(z)}{\frac{1}{(z-a_j)^{\lambda_n}}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z\in K_n^{(0)}} \frac{1}{|z-a_j|^{\lambda_n}}}. \tag{2.4}$$

Man beachte, dass die Menge $K_n^{(j)} \cup L_n^{(j)} = (K_n \cap A_j) \cup L_n^{(j)}$ wegen

$$K_n^c \supset \Omega \cup \{a_1, \ldots, a_k\}, \quad A_j^c \supset \Omega$$

und der Tatsache, dass $\{L_n^{(j)}\}_n$ eine Ausschöpfung von $A_j^c$ ist, zusammenhängendes Komplement besitzt. Daher können wir nach Bemerkung 2.2.2 annehmen, dass alle Pole von $\Theta_n^{(j)}$ von vorneherein in $a_j$ geschoben wurden.
Schließlich setzen wir noch zur Abkürzung

$$Q_m^{(0)}(z) = (z-a_1)^{\lambda_m} \Theta_m^{(0)}(z), \qquad Q_m^{(j)}(z) = \frac{1}{(z-a_j)^{\lambda_m}} \Theta_m^{(j)}(z) \ (j = 1, \ldots, k)$$

und definieren damit

$$f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu^{(0)}(z), \tag{2.5}$$

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu^{(j)}(z) \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{2.6}$$

Die gewünschte Funktion ist dann $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_k$.
Da $L_n^{(j)}$ Ausschöpfungen von $A_j^c$ sind für $j = 0, \ldots, k$ , sichern die Ungleichungen

(2.1) und (2.3) die Holomorphie von $f$ auf $\Omega = \bigcap_{j=0}^{k} A_j^c$.

Es sei $j \in \{1, \ldots, k\}$ fest. Wir betrachten die Potenzen von $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_m^{(j)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ und sehen:

- Der höchste Exponent der Potenzen von $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_m^{(j)}$ ist kleiner oder gleich $\lambda_m + g_m$.
- Der niedrigste Exponent der Potenzen von $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_{m+1}^{(j)}$ ist größer als $\lambda_{m+1}$.

Nach Definition der $\lambda_n$ überlappen sich also die Potenzen von $\frac{1}{z-a_j}$ innerhalb der $Q_m^{(j)}$ nicht und damit ist die Funktionenreihe auf der rechten Seite von (2.6) tatsächlich eine Laurentreihe. Analoge Überlegungen zeigen, dass die rechte Seite von (2.5) tatsächlich eine Taylorreihe ist. Setzen wir also $t_n = \lambda_n + g_n$ und $q_n = \lambda_{n+1}$, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} S_{t_n}(f_0, a_1)(z) &= \sum_{\nu=0}^{t_n} \frac{f_0^{(\nu)}(a_1)}{\nu!}(z-a_1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(0)}(z), \\ \sigma_{t_n}(f_j, a_j)(z) &= \sum_{\nu=1}^{t_n} \frac{c_\nu(f_j, a_j)}{(z-a_j)^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(j)}(z). \end{aligned}$$

Insbesondere hat die Taylorreihe von $f_0$ an $a_1$ reine Ostrowski-Lücken $\{t_n, q_n\}$. Daher konvergiert nach der Bezeichnung in Abschnitt 2.1 die Folge $\{M_{t_n}(f, a_1, a_1, \ldots, a_k)(z)\}_n$ auf $\Omega$ kompakt gegen $f(z)$.

**3) Nachweis der Universalität**

Es seien ein Kompaktum $K \in \mathcal{M}([\Omega \cup \{a_1, \ldots, a_k\}]^c)$ und eine Funktion $g \in A(K)$ gegeben.

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_{n_0}$. Nach dem Satz von Mergelyan und der Definition der Folge $\{(K_n, p_n)\}_n$ können wir eine Folge natürlicher Zahlen $\{n_s\}_s$ wählen mit $n_s \geq s$ und

$$\max_{K \cap A_j} \left| p_{n_s}(z) - \left( g(z) - \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq j}}^{k} f_\mu(z) \right) \right| < \frac{1}{s} \quad (j = 0, \ldots, k;\ s \in \mathbb{N}) \tag{2.7}$$

sowie $K_{n_s} = K_{n_0}$ $(s \in \mathbb{N})$.

Weiterhin gilt nach den Abschätzungen (2.2) und (2.4)

$$\begin{aligned} &\max_{z \in K_{n_s}^{(0)}} |S_{t_{n_s}}(f_0, a_1)(z) - p_{n_s}(z)| < \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{s} && (s \in \mathbb{N}), \\ &\max_{z \in K_{n_s}^{(j)}} |\sigma_{t_{n_s}}(f_j, a_j)(z) - p_{n_s}(z)| < \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{s} && (j = 1, \ldots, k;\ s \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Für $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\max_{z \in K \cap A_0} |M_{t_{n_s}}(f, a_1, a_1, \dots, a_k)(z) - g(z)| \leq$$

$$\leq \max_{z \in K_{n_s}^{(0)}} |S_{t_{n_s}}(f_0, a_1)(z) - p_{n_s}(z)| + \max_{z \in K \cap A_0} \left| p_{n_s}(z) - \left( g(z) - \sum_{\mu=1}^{k} f_\mu(z) \right) \right| +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} \max_{z \in K \cap A_0} |\sigma_{t_{n_s}}(f_\mu, a_\mu)(z) - f_\mu(z)|.$$

Für $s \to \infty$ konvergiert die zweite Zeile dieser Abschätzung nach den obigen Ungleichungen und (2.7) gegen Null. Die letzte Zeile konvergiert gegen Null, da $K \cap A_0$ für jedes $\mu = 1, \dots, k$ eine kompakte Teilmenge von $A_\mu^c$ ist.
In analoger Weise kann man für $j = 1, \dots, k$ und $s \in \mathbb{N}$ die Differenz

$$\max_{z \in K \cap A_j} |M_{t_{n_s}}(f, a_1, a_1, \dots, a_k)(z) - g(z)|$$

abschätzen und erhält dann

$$\max_{z \in K} |M_{t_{n_s}}(f, a_1, a_1, \dots, a_k)(z) - g(z)| \to 0 \quad (s \to \infty).$$

**4) Zusammenfassender Nachweis der Eigenschaften von $f$**
Da ferner die Funktion $f_0$ an $a_1 \in A_0^c$ Ostrowski-Lücken besitzt, gilt nach [Luh86b], Theorem 1 auch für jedes $\zeta \in A_0^c$

$$M_{t_n}(f, \zeta, a_1, \dots, a_k)(z) - M_{t_n}(f, a_1, a_1, \dots, a_k)(z) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Zusammen mit **2)** und **3)** sind beide im Satz formulierte Behauptungen bewiesen.

**Bemerkung 2.3.2** Die Konstruktion in dieser Arbeit weicht in einem wesentlichen Punkt von der Arbeit [MV03] ab: Bei der Konstruktion der universellen Laurentreihe wird zur Sicherstellung der Holomorphie auf dem Gebiet $\Omega$ der Hilfssatz aus dem vorigen Abschnitt verwendet und nicht eine konforme Abbildung. Das Ergebnis ist dasselbe.

Wir werden jetzt zeigen, dass die Menge der universellen Laurentreihen in obigem Sinne nicht etwa eine Ausnahmeerscheinung unter den holomorphen Funktionen auf einem Gebiet ist.

**Satz 2.3.3** *Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet wie in Satz 2.3.1 mit denselben Bezeichnungen, d.h. $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ habe endlich viele Komponenten $A_0, \dots, A_k$ mit $\infty \in A_0$ und festgehaltenen Punkten $a_j \in A_j$ $(j = 1, \dots, k)$. Die Menge der Funktionen mit den beiden Eigenschaften aus Satz 2.3.1 ist dicht im Raum $H(\Omega)$.*

**Beweis:**
Es seien $g \in H(\Omega)$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Unser Ziel ist es, eine universelle Laurentreihe $f$ zu konstruieren, die bezüglich der Metrik $d$ (siehe Gleichung (1.1)) „nahe bei“ $g$ liegt.
Es sei dazu $f_0$ eine Funktion mit den Eigenschaften aus Satz 2.3.1 (eine solche Funktion existiert nach der Aussage dieses Satzes). Da das Funktional $p$ aus (1.1) beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $p(\delta f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Nach dem Satz von Runge über rationale Approximation gibt es eine rationale Funktion $R$ mit Polen in $\{a_1, \ldots, a_k\}$ und $d(R, g) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wir setzen

$$f = \delta f_0 + R$$

**a) f approximiert g**
Es gilt: $d(f, g) = d(\delta f_0 + R, g) \leq p(\delta f_0) + d(R, g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

**b) f ist eine universelle Laurentreihe**
Für alle $N \in \mathbb{N}$, die größer sind als der Betrag des Exponenten jeder in $R$ vorkommenden Potenz, gilt die Gleichung

$$M_N(f, a_1, a_1, \ldots, a_k) = \delta M_N(f_0, a_1, a_1, \ldots, a_k) + R.$$

Nach der ersten Eigenschaft von Satz 2.3.1 gibt es eine Folge $\{t_n\}_n$, so dass $\{M_{t_n}(f_0, a_1, a_1, \ldots, a_k)(z)\}_n$ auf $\Omega$ kompakt gegen $f_0(z)$ konvergiert und damit konvergiert nach der obigen Gleichung $\{M_{t_n}(f, a_1, a_1, \ldots, a_k)(z)\}_n$ auf $\Omega$ kompakt gegen $f(z)$.
Es seien nun $K \in \mathcal{M}(\Omega^c \setminus \{a_1, \ldots, a_k\})$, $h \in A(K)$. Nach der zweiten Aussage von Satz 2.3.1 findet sich eine Teilfolge $\{t_{n_s}\}_s$ von $\{t_n\}_n$, so dass
$\{M_{t_{n_s}}(f_0, a_1, a_1, \ldots, a_k)(z)\}_s$ auf $K$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{\delta}(h(z) - R(z))$ konvergiert. Damit konvergiert die Folge $\{M_{t_{n_s}}(f, a_1, a_1, \ldots, a_k)(z)\}_s$ auf $K$ gleichmäßig gegen $\delta \frac{1}{\delta}(h(z) - R(z)) + R(z) = h(z)$. Also erfüllt $f$ beide geforderten Eigenschaften einer universellen Laurentreihe. Damit ist der Satz bewiesen.

# Kapitel 3

# Universelle Faberreihen

## 3.1 Einleitung

Es sei $B$ eine kompakte Menge, deren Komplement ein einfach zusammenhängendes Gebiet (in $\hat{\mathbb{C}}$) ist. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine konforme Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}}^c \to B^c$ mit $\varphi(\infty) = \infty$ und der Reihenentwicklung

$$\varphi(z) = d\left(z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \qquad\right) \text{ mit } d > 0.$$

Die zur Menge $B$ gehörigen Faberpolynome nennen wir $\{p_n; n \in \mathbb{N}_0\}$. Diese werden etwa definiert durch

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{t^n \varphi'(t)}{\varphi(t) - z}\, dt \quad (r > 1; n \in \mathbb{N})$$

oder als der Hauptteil der Laurentreihe von $(\varphi^{-1}(z))^n$ an Unendlich, also dem Teil mit Potenzen von $z$ mit nichtnegativen Exponenten. Eine Einführung in Faberreihen findet man etwa bei Curtiss [Cur72] oder Smirnov und Lebedev [SL68], chapter 2. Wir bezeichnen mit $B_R$ das Innengebiet der Jordankurve $\{\varphi(t); |t| = R\}$ für $R > 1$. Dann hat jede Funktion $f \in H(B_R)$ eine eindeutige Darstellung in Form einer so genannten Faberreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\, p_n(z),$$

wobei formal $p_0(z) = 1\, (z \in \mathbb{C})$ gesetzt wird und

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=r} \frac{f(\varphi(s))}{s^{n+1}}\, ds, \qquad\qquad r \in (1, R), n \in \mathbb{N}_0$$

die Koeffizienten der Faberreihe von $f$ bezeichnet.
Die Teilsummen der Faberreihe bezeichnen wir mit

$$F_m(f,z) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(f)\, p_\nu(z).$$

Für die folgenden Ausführungen halten wir ein $R > 1$ fest und setzen

$$G = B_R. \tag{3.1}$$

Bevor wir mit der Konstruktion einer Faberreihe mit universellen Approximationseigenschaften beginnen, benötigen wir noch eine Tatsache, die sich später als wichtig erweist.

**Bemerkung 3.1.1** *Jedes Polynom ist seine eigene Faberreihe.*

Denn jedes Faberpolynom $p_n$ hat genau den Grad $n$, und da jede auf $G$ holomorphe Funktion eine Entwicklung in eine Faberreihe besitzt, so gilt das auch für jedes Polynom. Mit dem Identitätssatz für Polynome folgt also unmittelbar, dass für jedes Polynom $P$ vom Grade $n$ gilt:

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(P) p_\nu(z) = F_n(P,z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

## 3.2 Konstruktiver Ansatz

**Satz 3.2.1** *Es sei $G$ wie in* (3.1). *Dann gibt es eine Funktion $f \in H(G)$ und eine Folge natürlicher Zahlen $\{t_n\}_n$, so dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:*

*(1) Die Folge $\{F_{t_n}(f,z)\}_n$ konvergiert auf $G$ kompakt gegen $f(z)$.*

*(2) Für jedes $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$ und jede Funktion $g \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{t_{n_s}\}_s$ von $\{t_n\}_n$, so dass $\{F_{t_{n_s}}(f,z)\}_s$ auf $K$ gleichmäßig gegen $g(z)$ konvergiert.*

**Beweis:**
Zu Beginn legen wir folgende Mengen fest:

(1) $\{H_n\}_n$ sei eine aufsteigende Ausschöpfung von $G$ aus abgeschlossenen Jordangebieten.

(2) $\{r_n\}_n$ sei eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

(3) $\{K_n\}_n$ sei eine Abzählung von Mengen aus $\mathcal{M}(\overline{G}^c)$, so dass für alle Mengen $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_{n_0}$.

Wir wählen eine Folge $\{(K_n^*, r_n^*)\}_n$, in der jede Kombination von $K_n$ und $r_m$ unendlich oft vorkommt. Wir konstruieren induktiv eine Polynomfolge $\{P_n\}_n$ und eine Zahlenfolge $\{\lambda_n\}_n$. Zunächst setzen wir $P_0 = 0$ und $\lambda_0 = 1$.
Es seien für ein $n \in \mathbb{N}$ die Polynome $P_1, \ldots, P_{n-1}$ und die natürlichen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ schon konstruiert. Dann setzen wir

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \max\{\deg(P_\nu); 0 \leq \nu \leq n-1\} + 1.$$

Nach dem Satz von Runge über polynomiale Approximation gibt es ein Polynom $P_n$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\max_{z \in H_n} |P_n(z)| < \frac{1}{n^2 \max\limits_{z \in H_n} |z|^{\lambda_n}}, \tag{3.2}$$

$$\max_{z \in K_n^*} \left| P_n(z) - \frac{r_n^*(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} z^{\lambda_\nu} P_\nu(z)}{z^{\lambda_n}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z \in K_n^*} |z|^{\lambda_n}}. \tag{3.3}$$

Schließlich setzen wir

$$T_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m} z^{\lambda_\nu} P_\nu(z); \qquad f(z) = \lim_{m \longrightarrow \infty} T_m(z).$$

Da $\{H_n\}_n$ eine Ausschöpfung von $G$ ist, ist nach (3.2) die Funktion $f$ holomorph in $G$.
Nach Konstruktion ist der höchste Exponent einer Potenz von $z$ in $z^{\lambda_n} P_n(z)$ gleich $\lambda_n + \deg(P_n)$. Der niedrigste Exponent einer Potenz von $z$ in $z^{\lambda_{n+1}} P_{n+1}(z)$ ist $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n + \deg(P_n) + 1$. Die Potenzen von $z$ überlappen sich also nicht innerhalb der Summanden in der Definition von $T_m$.
Nach Bemerkung 3.1.1 ist jedes Polynom seine eigene Faberreihe. Setzen wir also $t_n = \lambda_n + \deg(P_n)$, so gilt $F_{t_n}(T_n, \cdot) = T_n$; da sich die Potenzen von $z$ wie eben gezeigt nicht überlappen, gilt auch $F_{t_n}(f, \cdot) = T_n$ und nach Definition von $f$ konvergiert damit $\{F_{t_n}(f, z)\}_n$ auf $G$ kompakt gegen $f(z)$. Das zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Zum Beweis der Universalität von $f$ seien ein $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$ und eine Funktion $g \in A(K)$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_{n_0}$. Nach dem Satz von Mergelyan und der Definition der Folge $\{(K_n^*, r_n^*)\}_n$ gibt es eine Folge $\{n_s\}_s$ natürlicher Zahlen mit $n_s \geq s$, so dass

$$\max_{z \in K} |g(z) - r_{n_s}^*(z)| < \frac{1}{s} \tag{3.4}$$

und $K_{n_s} = K_{n_0}$ $(s \in \mathbb{N})$ gleichzeitig erfüllt sind. Mit der Abschätzung (3.3) und der letzten Ungleichung schließen wir für große $s$:

$$\max_{z\in K} |F_{t_{n_s}}(z) - g(z)| \leq$$
$$\max_{z\in K_{n_s}} \left| \sum_{\nu=0}^{n_s} z^{\lambda_\nu} P_\nu(z) - r^*_{n_s}(z) \right| + \max_{z\in K} |r^*_{n_s}(z) - g(z)| < \frac{1}{n_s} + \frac{1}{s} \leq \frac{2}{s}.$$

Damit konvergiert $\{F_{t_{n_s}}(z)\}_s$ auf $K$ gleichmäßig gegen $g(z)$ und da $K$ und $g$ beliebig waren, ist der Satz damit bewiesen.

## 3.3 Generischer Ansatz

Unser Ziel ist es, die Existenz einer universellen Faberreihe zu zeigen, d.h. einer Funktion, die ähnliche Eigenschaften hat wie die Funktion $f$ aus Satz 3.2.1. Daher definieren wir zuerst rein abstrakt eine Klasse von Funktionen, die die von uns gewünschte Eigenschaft besitzen soll.

**Definition 3.3.1** Es sei $G$ ein Gebiet, das (3.1) genügt. Mit $\mathcal{U}_F(G)$ bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen $f \in H(G)$, die die folgende Eigenschaft haben: Für jede Wahl von $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c), g \in A(K)$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\max_{z\in K} |F_n(f,z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Wir nennen $\mathcal{U}_F(G)$ die Menge der *universellen Faberreihen (im Gebiet G).*

**Bemerkung 3.3.2** Die obige Definition einer universellen Faberreihe weicht offensichtlich von den Eigenschaften der Funktion $f$ aus Satz 3.2.1 ab. Nach dem allgemeinen Resultat in [Vla02b], Theorem 2.6, stimmen die beiden Klassen universeller Faberreihen jedoch überein.

**Satz 3.3.3** *Es sei $G$ ein Gebiet, das* (3.1) *genügt. Die Menge der universellen Faberreihen $\mathcal{U}_F(G)$ ist eine in $H(G)$ dichte $G_\delta$-Menge.*

### Beweis von Satz 3.3.3

Zur Vorbereitung definieren wir dieselben Mengen wie im obigen konstruktiven Beweis:

(1) $\{H_n\}_n$ sei eine aufsteigende Ausschöpfung von $G$ aus abgeschlossenen Jordangebieten.

(2) $\{r_n\}_n$ sei eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

(3) $\{K_n\}_n$ sei eine Abzählung von Mengen aus $\mathcal{M}(\overline{G}^c)$, so dass für alle Mengen $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_{n_0}$.

Wir werden jetzt in drei Schritten mit Hilfe des Kategoriesatzes von Baire den Satz 3.3.3 beweisen.

**1)** Wir zeigen zunächst eine Darstellung der betrachteten Klasse mit abzählbarem Durchschnitt und Vereinigungen.
Betrachten wir für $m, j, s \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$O(G, m, j, s, n) = \left\{ f \in H(G) : \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| < \frac{1}{s} \right\},$$

so gilt:

$$\mathcal{U}_F(G) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} O(G, m, j, s, n). \tag{3.5}$$

Es seien zunächst $f \in \mathcal{U}_F(G)$ und Zahlen $m, j, s \in \mathbb{N}$ gegeben. Da $K_m$ in $\mathcal{M}(\overline{G}^c)$ liegt, folgt mit der Definition von $\mathcal{U}_F(G)$ für $\varepsilon = \frac{1}{s}$, dass $f$ ein Element der rechten Seite der behaupteten Gleichung ist.
Seien umgekehrt $f$ eine Funktion aus der rechten Seite der behaupteten Gleichung, eine Menge $K \in \mathcal{M}(\overline{G}^c)$, eine Funktion $g \in A(K)$ sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren Zahlen $m, s \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_m$ und $\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit dem Satz von Mergelyan folgern wir die Existenz eines $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{z \in K_m} |r_j(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach den Eigenschaften der rechten Seite von (3.5) gibt es zu diesen Zahlen $m, j, s$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen erhalten wir

$$\max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - g(z)| < \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

und damit ist $f$ in der linken Seite der behaupteten Gleichung enthalten.

**2)** Dieser Schritt zeigt zusammen mit dem vorhergehenden, dass $\mathcal{U}_F(G)$ tatsächlich eine $G_\delta$-Menge ist:

Die oben definierte Menge $O(G, m, j, s, n)$ ist für alle $m, j, s \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ offen in $H(G)$. (3.6)

Es seien $m, j, s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in O(G, m, j, s, n)$ fest. Wir betrachten für $\delta > 0$ und $C_r = \{\varphi(s); |s| = r\}$, $r \in (1, R)$ die Menge

$$\tilde{U}_\delta(f) = \{g \in H(G) : \max_{z \in C_r} |g(z) - f(z)| < \delta\}$$

und zeigen, dass für geeignete Wahl von $\delta > 0$ jedes $g \in \tilde{U}_\delta(f)$ in $O(G, m, j, s, n)$ liegt. Wir bemerken, dass Dazu halten wir ein $r \in (1, R)$ fest. Zunächst gilt für eine Funktion $g \in \tilde{U}_\delta(f)$ die elementare Abschätzung

$$|c_\nu(f) - c_\nu(g)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=r} \frac{f(\varphi(s)) - g(\varphi(s))}{s^{\nu+1}} \, ds \right| < \frac{\delta}{r^\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0).$$

Setzen wir weiter $M = \max\{|p_\nu(z)|; z \in K_m, 0 \le \nu \le n\}$ und wählen

$$\delta = \frac{1 - r}{\left(\frac{1}{r}\right)^n - r} \frac{1}{M} \left( \frac{1}{s} - \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| \right),$$

so ist $\delta > 0$, und wir haben für alle $g \in \tilde{U}_\delta(f)$:

$$\begin{aligned} \max_{z \in K_m} |F_n(g, z) - F_n(f, z)| &\le \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu(f) - c_\nu(g)||p_\nu(z)| < \delta \, M \, \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = \\ &= \frac{1}{s} - \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)|. \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $g \in \tilde{U}_\delta(f)$:

$$\begin{aligned} &\max_{z \in K_m} |F_n(g, z) - r_j(z)| \le \max |F_n(g, z) - F_n(f, z)| + \max |F_n(f, z) - r_j(z)| < \\ &< \frac{1}{s} - \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| + \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

und daher ist $\tilde{U}_\delta(f) \subset O(G, m, j, s, n)$. Nach Satz 1.1.1 gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) = \{g \in H(G) : d(g, f) < \varepsilon\} \subset \tilde{U}_\delta(f)$, was (3.6) beweist.

**3)** Für jede Wahl von $m, j, s \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} O(G, m, j, s, n) \tag{3.7}$$

in $H(G)$ dicht.

Es seien $f \in H(G)$, ein Kompaktum $K \subset G$, ein $\varepsilon > 0$ und $m, j, s \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $K$ zusammenhängendes Komplement besitzt (sonst könnten wir ein $K \subset B \subset G$ mit dieser Eigenschaft wählen, da $G$ einfach zusammenhängend ist). Da die Kompakta $K$ und $K_m$ disjunkt sind und $K \cup K_m$ zusammenhängendes Komplement besitzt, existiert nach dem Satz von Runge ein Polynom $P$ mit

$$\max_{z \in K} |P(z) - f(z)| < \varepsilon,$$
$$\max_{z \in K_m} |P(z) - r_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Es sei $n$ der Grad von $P$. Nach Bemerkung 3.1.1 ist $P = F_n(P, \cdot)$ und damit folgt direkt mit der letzten Ungleichung:

$$\max_{z \in K_m} |F_n(P, z) - r_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Damit ist also $P \in O(m, j, s, n)$, und da $m, j, s \in \mathbb{N}$, $f \in H(G)$, das Kompaktum $K \subset G$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt, dass die Menge (3.7) in $H(G)$ dicht ist.

Wir fassen zusammen:
Nach (3.5) und (3.6) ist $\mathcal{U}_F(G)$ eine $G_\delta$-Menge in $H(G)$. Da nach (3.7) die Menge

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} O(G, m, j, s, n)$$

für alle $m, j, s \in \mathbb{N}$ dicht in $H(G)$ liegt, folgt mit dem Satz von Baire und nochmaliger Anwendung von (3.6), dass $\mathcal{U}_F(G)$ dicht in $H(G)$ liegt. Damit ist Satz 3.3.3 bewiesen.

## 3.4 Eigenschaften universeller Faberreihen

In diesem Abschnitt werden wir in Analogie zu der Arbeit von Gehlen, Luh und Müller [GLM00] zeigen, dass universelle Faberreihen Lücken besitzen, die man auch hier als Ostrowski-Lücken definieren kann. Dazu werden wir zunächst einige allgemeinere Bezeichnungen einführen, um eine einheitliche Terminologie zu gewährleisten.

### Allgemeine Bezeichnungen

Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum derart, dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Die Abbildung $\varphi_K : \overline{\mathbb{D}}^c \to K^c$ sei eine konforme Abbildung mit $\varphi_K(\infty) = \infty$ und der Reihenentwicklung

$$\varphi_K(z) = d\left(z + a_0^K + \frac{a_1^K}{z} + \frac{a_2^K}{z^2} + \dots \qquad\right), d > 0.$$

Falls klar ist, von welchem Kompaktum $K$ die Rede ist, werden wir auch einfach $\varphi$ schreiben. Das gilt auch für die anderen Bezeichnungen unten. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf $K$ holomorph ist.

(1) Für $r > 1$ setzen wir

$$\begin{aligned} C(\varphi_K, r) &= \{\varphi_K(z) : |z| = r\}, \\ B(\varphi_K, r) &= int(C(\varphi_K, r)), \\ B[\varphi_K, r] &= \overline{int(C(\varphi_K, r))} = B(\varphi_K, r) \cup C(\varphi_K, r). \end{aligned}$$

Dabei meint $int(J)$ das Innengebiet einer Jordankurve $J$. Man beachte, dass die zweite Gleichung in der letzten Zeile auf Grund des Jordanschen Kurvensatzes gilt. Für einen Punkt $\zeta \in \mathbb{C}$ setzen wir, falls $\{z : |z - \zeta| = r\} \subset \overline{\mathbb{D}}^c$ gilt, noch

$$\begin{aligned} C_\zeta(\varphi_K, r) &= \{\varphi_K(z) : |z - \zeta| = r\}, \\ B_\zeta(\varphi_K, r) &= int(C_\zeta(\varphi_K, r)), \\ B_\zeta[\varphi_K, r] &= \overline{int(C_\zeta(\varphi_K, r))} = B_\zeta(\varphi_K, r) \cup C_\zeta(\varphi_K, r). \end{aligned}$$

(2) Wir definieren für die obige Funktion $f$

$$R(\varphi_K, f) = \sup\{r > 1 : f \text{ holomorph auf } B(\varphi_K, r)\}.$$

(3) Die Faberpolynome und die dem entsprechenden Koeffizienten der Faberreihe von $f$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} p_\nu(\varphi_K, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\zeta^n \varphi_K'(\zeta)}{\varphi_K(\zeta) - z}\, d\zeta \qquad (1 < R < R(\varphi_K, f), \nu \in \mathbb{N}), \\ c_\nu(f, \varphi_K) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r_1} \frac{f(\varphi_K(w))}{w^{\nu+1}}\, dw \quad (1 < r_1 < r < R(\varphi_K, f), \nu \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Damit gilt, wenn wir formal $p_0(\varphi_K, z) = 1\, (z \in \mathbb{C})$ setzen, auch für alle $z \in B(\varphi_K, R(\varphi_K, f))$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f, \varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z),$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite kompakt in $B(\varphi_K, R(\varphi_K, f))$ konvergiert.

(4) Schließlich definieren wir noch die Teilsummen der Faberreihe von $f$ aus dem vorigen Punkt:

$$F_m(f, \varphi_K, z) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(f, \varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Man beachte, dass die $p_\nu(\varphi_K, z)$, $c_\nu(f, \varphi_K)$ und damit auch $F_m(f, \varphi_K, z)$ nach dem Cauchyschen Integralsatz unabhängig von der speziellen Wahl von
$r \in (1, R(\varphi_K, f))$ sind.

**Definition 3.4.1** Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum derart, dass $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, und es sei $f \in H(K)$. Mit den obigen Bezeichnungen sagen wir, dass die Faberreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f, \varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z)$$

von $f$ *Ostrowski-Lücken* $\{p_k, q_k\}$ *(bezüglich $K$)* hat, falls $\{p_k\}_k$ und $\{q_k\}_k$ Folgen natürlicher Zahlen sind mit

(1) $p_1 < q_1 \le p_2 < q_2 \le \ldots$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{q_k}{p_k} = \infty$,

(2) für $I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{p_k + 1, \ldots, q_k - 1\}$ ist $\lim\limits_{\substack{\nu\to\infty \\ \nu\in I}} |c_\nu(f, \varphi_K)|^{\frac{1}{\nu}} = 0$.

**Eine Eigenschaft universeller Faberreihen**

Wir gehen analog wie bei [GLM00] vor und beweisen zunächst einen Hilfssatz, der ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von Ostrowski-Lücken liefert.

**Hilfssatz 3.4.2** *Es sei $K \in \mathcal{M}$ ein Kompaktum wie oben, $f \in H(K)$ und*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f, \varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z)$$

*die Faberreihe von $f$ bezüglich $K$, die der folgenden Bedingung genüge:*

> *Es gibt eine Folge natürlicher Zahlen $\{q_k\}_k$ mit $q_{k+1} > kq_k$ sowie ein $N \in \mathbb{N}, N \ge 3$, so dass für alle $k \ge N$ gilt:*
> $\max\limits_{z\in B_{\frac{3}{2}k}[\varphi_K, k]} |F_{q_k}(f, \varphi_K, z)| \le 1.$ (3.8)

*Dann hat* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f, \varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z)$ *Ostrowski-Lücken bezüglich $K$.*

**Beweis:**
**1)** Es sei $k \ge N$. Nach der Bedingung (3.8) und dem Bernstein-Walsh-Lemma (siehe etwa [Gai80], S. 33, §4 C) haben wir

$$\max_{z\in B_{\frac{5}{2}k}[\varphi, \frac{3}{2}k]} |F_{q_k}(f, \varphi, z)| \le \left(\frac{5}{2}\right)^{q_k}$$

und damit
$$\max_{|z|=k} |F_{q_k}(f, \varphi, \varphi(z))| \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{q_k}.$$

Nach der Berechnung der Faberkoeffizienten ergibt sich für festes $r \in (1, R(\varphi, f))$ und $\nu \leq q_k$:

$$\begin{aligned} |c_\nu(f, \varphi_K)| \leq & \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\varphi(\zeta)) - F_{q_k}(f, \varphi, \varphi(\zeta))}{\zeta^{\nu+1}} \, d\zeta \right| + \\ & + \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{F_{q_k}(f, \varphi, \varphi(\zeta))}{\zeta^{\nu+1}} \, d\zeta \right|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

**a)** Setzen wir $M_r = \max\limits_{z \in B[\varphi, r]} |f(z)| < \infty$, so gilt nach [SL68], Chapter 2.1.3, Theorem 2 mit $R = R(\varphi, f)$:

$$\max_{z \in B[\varphi, r]} |f(z) - F_{q_k}(f, \varphi, z)| \leq M_r \left(\frac{r}{R}\right)^{q_k},$$

und daher ist der erste Summand auf der rechten Seite von (3.9) nicht größer als

$$\frac{M_r}{r^\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^{q_k}.$$

**b)** Für den zweiten Summanden der rechten Seite von (3.9) wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an und ändern die Integrationskurve auf $\{\zeta : |\zeta| = k\}$. Dann ist dieser Summand höchstens

$$\frac{1}{k^\nu} \left(\frac{5}{2}\right)^{q_k}.$$

**2)** Insgesamt ist also, wenn wir ohne Einschränkung $M_r \geq 1$ annehmen:

$$|c_\nu(f, \varphi)|^{\frac{1}{\nu}} \leq \sqrt[\nu]{2M_r} \max \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{q_k}{\nu}}, \frac{1}{k} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{q_k}{\nu}} \right\}.$$

Also gilt mit

$$p_k = \left[\frac{q_k}{\ln(k)}\right] + 1 \quad \text{und} \quad \tilde{q}_k = \left[\frac{q_k}{\ln(\ln(k+1))}\right] + 1$$

für alle $p_k \leq \nu \leq \tilde{q}_k$:

$$|c_\nu(f, \varphi)|^{\frac{1}{\nu}} \leq (2M_r)^{\frac{1}{p_k}} \max \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\ln(\ln(k+1))}{1 + \frac{\ln(\ln(k+1))}{q_k}}}, \frac{1}{k^{1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)}} \right\}.$$

Damit erhalten wir mit $I = \bigcup_{k=3}^{\infty} \{p_k + 1, \ldots, \tilde{q}_k - 1\}$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{q}_k}{p_k} = \infty \text{ und } \lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \nu\in I}} |c_\nu(f,\varphi)|^{\frac{1}{\nu}} = 0,$$

was zu beweisen war.

Unter Verwendung des obigen Hilfssatzes erhalten wir leicht folgendes Ergebnis:

**Satz 3.4.3** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Falls $f \in H(G)$ eine universelle Faberreihe bezüglich eines Kompaktums $K \in \mathcal{M}(G)$ mit der Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f,\varphi_K) p_\nu(\varphi_K, z)$$

*hat, so hat die Faberreihe von $f$ auch Ostrowski-Lücken bezüglich $K$.*

**Beweis:**
Da $G$ beschränkt ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}, N \geq 3$, so dass $C_k = B_{\frac{5}{2}}[\varphi_K, \frac{3}{2}k] \subset \overline{G}^c$ für alle $k \geq N$ richtig ist. Die Definition der Universalität einer Faberreihe ergibt die Existenz von Folgen natürlicher Zahlen $\{n_m^{(k)}\}_m$ derart, dass die Teilsumme $\left\{F_{n_m^{(k)}}(f,\varphi_K,z)\right\}_m$ der Faberreihe von $f$ bezüglich $K$ auf $C_k$ gleichmäßig für $k \geq N$ gegen Null konvergiert für $m$ gegen Unendlich. Damit existiert eine Folge $\{q_k\}_k$ natürlicher Zahlen mit $q_{k+1} > kq_k$ und

$$\max_{z\in C_k} |F_{q_k}(f,\varphi_K,z)| \leq 1$$

für alle $k \geq N$. Aus Hilfssatz 3.4.2 ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

# Kapitel 4

# T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen

Wie bereits im vorigen Kapitel wählen wir zwei Zugänge, um eine T-universelle Funktion mit vorgegebenen Approximationswegen zu erhalten. Der eine Ansatz ist konstruktiv und bietet eine vereinfachte Alternative zu dem Beweis von Tenthoff [Ten00]. Die Struktur ist jedoch dieselbe, da der entscheidende Schlüssel zur Konstruktion in der Ausnutzung der gleichmäßigen Stetigkeit von Polynomen auf Kompakta liegt.
Dem gegenüber lässt sich der generische Ansatz mit Hilfe des Baireschen Kategoriensatzes auch auf beschränkte Gebieten und allgemeine Kurvenscharen, wie sie unter 1.3.3 beschrieben wurden, ausweiten. Zudem liefert dieser Ansatz „gratis“ die Mehrfachuniversalität von Funktionen. Denn in bereits veröffentlichen Arbeiten, siehe etwa [Duy84], [Cos00], wurde gezeigt, dass im Einheitskreis $\mathbb{D}$ die Menge der ableitungsuniversellen und stammfunktionsuniversellen Funktionen eine dichte $G_\delta$-Menge im Raum $H(G)$ bilden.

## 4.1 Konstruktiver Ansatz

### 4.1.1 T-universelle ganze Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen

Es sei

$$\{Q_n\}_n \tag{4.1}$$

eine Abzählung der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. In der folgenden Konstruktion werden wir ausnutzen, dass diese Polynome auf Kompakta gleichmäßig stetig sind. Wir definieren zuerst induktiv mehrere Zahlenfolgen. Dabei ist stets

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die Gaußklammer einer reellen Zahl $x$.
Für $n = 0$ setzen wir $\eta_0 = 1, r_0 = 1, a_0 = 1, k_0 = 1, \delta_0 = 1, N_0 = 1$ und $\gamma_0 = 0$.
Es seien für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $\eta_j, r_j, a_j, k_j, \delta_j, N_j$ und $\gamma_j$ für $j = 1, \ldots, n-1$ definiert. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es, da $Q_n$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig stetig ist, ein $\tilde{\eta}_n > 0$, so dass

$$|Q_n(z_1) - Q_n(z_2)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z_1, z_2 \in \{z : |z| \leq r_{n-1}\}, |z_1 - z_2| < \tilde{\eta}_n \tag{4.2}$$

gilt. Sodann setzen wir

$$\eta_n = \min\left\{\eta_{n-1}, \tilde{\eta}_n, \frac{1}{n}\right\} \text{ und } a_n = \ln(n+1).$$

Die oben definierten Zahlen dienen zur Konstruktion einer Reihe von Kreisringsektoren. Unter einem Kreisringsektor verstehen wir dabei eine Menge der Form

$$S = \{z = re^{i\varphi}; r \in [c, d], \varphi \in [\beta, \gamma]\}$$

mit innerem und äußerem Radius $c, d > 0$ und Winkeln $0 \leq \beta < \gamma < 2\pi$. Die obigen Zahlen $a_n$ geben die „Dicke“ der Kreisringsektoren an. Weiter definieren wir

$$k_n = \max\left\{\left[\left(\tfrac{\ln(2a_n) - \ln(\eta_n)}{\ln(2)} + 2\right)\right] + 1, \left[\tfrac{\ln(r_{n-1} + N_{n-1}a_{n-1} + n) - \ln(a_n)}{\ln(2)}\right] + 1\right\},$$

$$r_n = 2^{k_n} \ln(n+1),$$
$$\delta_n = \min\left\{\frac{\eta_n}{3\ln(n+1)}, \frac{1}{n}\right\}.$$

Dabei wird $k_n$ benutzt, um die Kreisringsektoren zu unterteilen. Die Zahl $r_n$ gibt den inneren Radius einer Reihe von Kreisringsektoren an. Mit einer Reihe meinen wir dabei ein System disjunkter Kreisringsektoren mit gleichem inneren und äüßeren Radius. Es werden jetzt diese Reihen von Kreisringsektoren definiert. Dabei ist eine Reihe um einen für $n$ konstanten, aber mit wachsendem $n$ immer kleiner werdenden Winkel gegenüber der vorherigen Reihe versetzt.
Die inneren bzw. äußeren Radien der Sektoren definieren wir als

$$r_{n,p}^{(1)} = r_n + (p-1)a_n, \quad r_{n,p}^{(2)} = r_{n,p}^{(1)} + a_n - 2^{-(n+1)^2} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

Die Anzahl der Sektorenreihen bezeichnen wir mit

$$N_n = \left[\frac{1}{\delta_n}\right] + 2.$$

Den Winkel, um den eine Sektorenreihe gegenüber der vorhergehenden verdreht ist, sei

$$\gamma_n = \delta_n \frac{\pi}{4} \frac{1}{2^{k_n}}.$$

Schließlich setzen wir die Begrenzungen für das Argument des $k$-ten Sektors in der ersten Sektorenreihe:

$$\alpha_{n,k}^{(1)} = \frac{(k-1)\pi}{4\cdot 2^{k_n}} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{8\cdot 2^{k_n}},$$
$$\alpha_{n,k}^{(2)} = \frac{k\pi}{4\cdot 2^{k_n}} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{8\cdot 2^{k_n}}.$$

Damit können wir die gewünschten Mengen als Kreisringsektoren definieren:

$$S_{n,p,k} = \Big\{ z : r_{n-1,p}^{(1)} \le |z| \le r_{n-1,p}^{(2)},$$
$$\alpha_{n-1,k}^{(1)} + (p-1)\gamma_{n-1} \le \arg(z) \le \alpha_{n-1,k}^{(2)} + (p-1)\gamma_{n-1} \Big\}$$

für $p = 1, \ldots, N_{n-1}$ und $k = 1, \ldots, 8\cdot 2^{k_{n-1}}$.
Als „Mittelpunkt“ eines jeden Kreisringsektors setzen wir

$$z_{n,p,k} = \frac{1}{2}(r_{n-1,p}^{(1)} + r_{n-1,p}^{(2)}) e^{\frac{i}{2}\left(\alpha_{n-1,k}^{(1)} + \alpha_{n-1,k}^{(2)} + (2p-2)\gamma_{n-1}\right)}.$$

Zuletzt definieren wir die Mengen, die schließlich für die Konstruktion benötigt werden:

$$H_n^{(1)} = \left\{ z : |z| \le r_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right\}, \quad H_n^{(2)} = \bigcup_{p=1}^{N_{n-1}} \bigcup_{k=1}^{8\cdot 2^{k_{n-1}}} S_{n,p,k}.$$

**Hilfssatz 4.1.1** *Die oben definierten Mengen haben folgende Eigenschaften:*

*(1)* $\left\{ H_n^{(1)} \right\}_n$ *schöpft* $\mathbb{C}$ *aus.*

*(2) Es gilt* $H_n^{(2)} \subset H_{n+1}^{(1)}$ *und* $H_n^{(1)} \cap H_n^{(2)} = \varnothing$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*(3) Für jede Gerade G, die den Nullpunkt enthält, gilt:*
$\vartheta_n = \min\limits_{p,k} \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, G) < \eta_{n-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*(4) Setzen wir* $\Delta_n = \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, \partial S_{n,p,k})$ $(n \in \mathbb{N})$, *so konvergiert* $\{\Delta_n\}_n$ *gegen Unendlich.*

**Beweis:**
Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$\delta_n \frac{r_n}{2^{k_n}} < \frac{\eta_n}{2}, \quad \frac{a_n}{2^{k_n-2}} < \frac{\eta_n}{2} \tag{4.3}$$

Es gilt nämlich $\delta_n \le \frac{\eta_n}{3\ln(n+1)}$ sowie $r_n = 2^{k_n}\ln(n+1)$, und daher folgt

$$\delta_n \frac{r_n}{2^{k_n}} \le \frac{\eta_n}{3\ln(n+1)} \ln(n+1) < \frac{\eta_n}{2}.$$

Außerdem gilt nach Definition von $k_n$

$$k_n > \frac{\ln(2a_n) - \ln(\eta_n)}{\ln(2)} + 2,$$

und das ist äquivalent zum zweiten Teil der Gleichung.

**Zu *(1)*:**
Nach Definition von $k_n$ gilt

$$k_n > \frac{\ln(r_{n-1} + N_{n-1}a_{n-1} + n) - \ln(\ln(n+1))}{\ln(2)},$$

und wegen der Gleichung $r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}} = r_{n-1} + N_{n-1}a_{n-1} - 2^{-n^2}$ folgt $2^{k_n} > \dfrac{r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}} + 2^{-n^2} + n}{\ln(n+1)}$. Also ist $r_n = 2^{k_n}\ln(n+1) > r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}} + n$, und wir erhalten *(1)*.

**Zu *(2)*:**
Nach der Rechnung oben ist $r_n - \frac{n}{2} > r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}} + \frac{n}{2} > r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}}$. Daher ist

$$H_n^{(2)} \subset \left\{z : |z| \le r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}}\right\} \subset \left\{z : |z| \le r_n - \frac{n}{2}\right\} = H_{n+1}^{(1)}.$$

Ferner gilt

$$H_n^{(1)} = \left\{z : |z| \le r_{n-1} - \frac{n-1}{2}\right\},$$

und

$$H_n^{(2)} \subset \{z : |z| \ge r_{n-1}\}$$

und daraus folgt $H_n^{(1)} \cap H_n^{(2)} = \varnothing$.

**Zu *(3)*:**
Da wir die Sektorenreihen für festes $n \in \mathbb{N}$ um den Winkel $\gamma_n$ verdrehen und dies $N_n$-mal durchführen, müssen wir, um eine Abdeckung der Winkel zwischen $\arg(z_{n+1,1,1})$ und $\arg(z_{n+1,1,2})$ zu gewährleisten, den $N_n$-ten Sektor so weit drehen, dass $\arg(z_{n+1,N_n,1}) \ge \arg(z_{n+1,1,2})$ gilt. Das ist äquivalent zu

$$(N_n - 1)\gamma_n \ge \frac{\pi}{4 \cdot 2^{k_n}}$$

und wegen

$$(N_n - 1)\gamma_n = \left(\left[\frac{1}{\delta_n}\right] + 2 - 1\right)\delta_n \frac{\pi}{4 \cdot 2^{k_n}} > \frac{\pi}{4 \cdot 2^{k_n}}$$

folgt, dass alle Winkel zwischen $\arg(z_{n+1,1,1})$ und $\arg(z_{n+1,1,2})$ durch die Verdrehung abgedeckt sind. Eine analoge Überlegung gilt für alle Winkel zwischen $\arg(z_{n+1,1,k})$ und $\arg(z_{n+1,1,k+1})$ für $k > 1$. Daher ist

$$\{\arg(z_{n+1,p,k});\, p = 1, \ldots, N_n,\, k = 1, \ldots 8{\cdot}2^{k_n}\} = \{0, \gamma_n, 2\gamma_n, \ldots, 8{\cdot}2^{k_n} N_n \gamma_n \geq 2\pi\}.$$

Das bedeutet für einen vorgegebenen Winkel $\psi \in [0, 2\pi)$

$$\min_{p,k} \operatorname{dist}(\psi, \arg(z_{n+1,p,k})) \leq \frac{\gamma_n}{2}.$$

Also ist die Größe $\vartheta_{n+1}$ durch den Winkel $\gamma_n$, um den die Sektorenreihen gegeneinander verdreht sind, sowie durch den größten Radius $r^{(2)}_{n,N_n}$ bestimmt. Da $\gamma_n$ ein kleiner Winkel ist ($\gamma_n < 2$ genügt schon), gilt die Abschätzung $\tan\left(\frac{\gamma_n}{2}\right) \leq \gamma_n$. Damit haben wir

$$\vartheta_{n+1} \leq \tan\left(\frac{\gamma_n}{2}\right) r^{(2)}_{n,N_n} \leq \delta_n \frac{\pi}{4} \frac{1}{2^{k_n}} (r_n + N_n a_n) \leq \delta_n \frac{r_n}{2^{k_n}} + \delta_n \frac{N_n a_n}{2^{k_n}}.$$

Nach der obigen Abschätzung (4.3) folgt

$$\vartheta_{n+1} < \frac{\eta_n}{2} + \delta_n \frac{N_n a_n}{2^{k_n}}.$$

Da nach Definition von $N_n$ die Ungleichung $N_n \leq \frac{1}{\delta_n} + 2$ gilt, folgt für den zweiten Summanden:

$$\delta_n \frac{N_n a_n}{2^{k_n}} \leq \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} + 2\right) \frac{a_n}{2^{k_n}} = (1 + 2\delta_n) \frac{a_n}{2^{k_n}} \leq \frac{a_n}{2^{k_n - 2}} < \frac{\eta_n}{2},$$

wobei die letzte Ungleichung wiederum aus (4.3) folgt. Also haben wir $\vartheta_{n+1} < \eta_n$ und das beweist *(3)*.

**Zu *(4)*:**
Zur besseren Veranschaulichung skizzieren wir einen Kreisringsektor $S_{n+1,p,k}$:

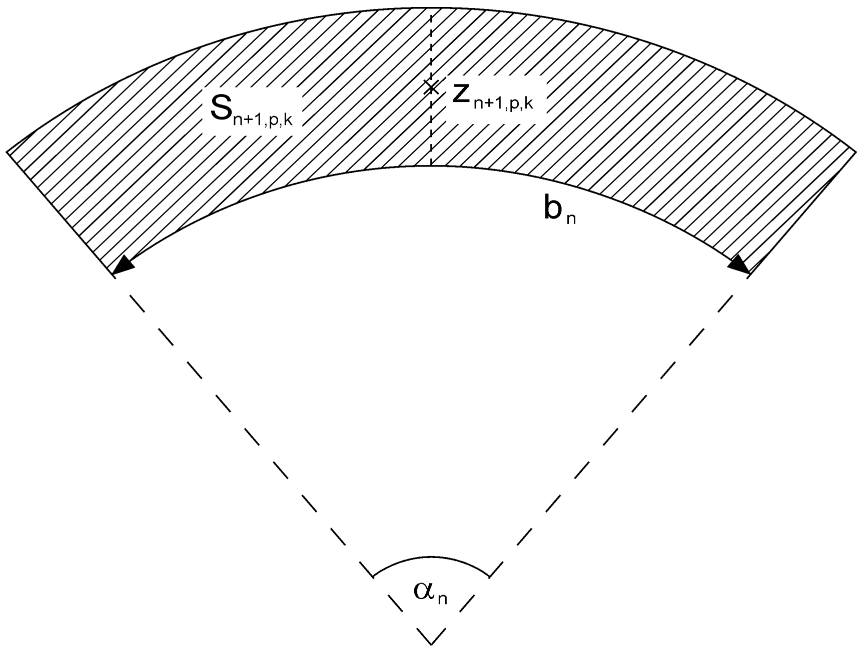


Abbildung 4.1: Ein Kreisringsektor

Nach Definition von $S_{n+1,p,k}$ beträgt die „Dicke" dieses Sektors

$$a_n - 2^{-(n+1)^2} = \ln(n+1) - 2^{-(n+1)^2} \to \infty \ (n \to \infty).$$

Die Länge des inneren Bogens $b_{n+1}$ des Sektors kann nach unten abgeschätzt werden. Da der Innenwinkel des Sektors $\alpha_n$ für große $n$ ein kleiner Winkel ist, haben wir die Abschätzung $\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) \geq \frac{\alpha_n}{4}$ und damit ist unter der Berücksichtigung der Definitionen von $\alpha_{n,k}^{(1)}$ und $\alpha_{n,k}^{(2)}$

$$b_n \geq 2\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) r_{n,1}^{(1)} \geq \frac{1}{8}\frac{1}{2^{k_n}} r_n = \frac{1}{8}\ln(n+1) \to \infty \ (n \to \infty).$$

Daraus folgt *(4)* und der Hilfssatz ist bewiesen.

**Satz 4.1.2** *Es gibt eine ganze Funktion $\Phi$ mit der folgenden Eigenschaft:*
*Für alle $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $f \in A(K)$ sowie für alle Geraden $G$ existiert eine gegen Unendlich konvergente Folge $\{z_n\}_n$ auf $G$, so dass $\{\Phi(z+z_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

**Beweis:**
**1) Konstruktion von $\Phi$**
Es sei $\{Q_n\}_n$ die Polynomfolge aus (4.1). Wir erinnern an die Abschätzung (4.2):

$$|Q_n(z_1) - Q_n(z_2)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z_1, z_2 \in \{z : |z| \leq r_{n-1}\}, |z_1 - z_2| < \tilde{\eta}_n.$$

**a)** Wir definieren rekursiv eine Folge von Polynomen $\{P_n\}_n$:
Dazu setzen wir $P_0 = 0$ und nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Polynome $P_1, \ldots, P_{n-1}$ schon definiert sind. Nach dem Satz von Runge über polynomiale Approximation gibt es ein Polynom $P_n$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\max_{H^{(1)}_{n+1}} |P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \frac{1}{n^2}, \tag{4.4}$$

$$\max_{S_{n+1,p,k}} |P_n(z) - Q_n(z - z_{n+1,p,k})| < \frac{1}{n} \tag{4.5}$$

$$\text{für alle } p = 1, \ldots, N_n;\ k = 1, \ldots, 8 \cdot 2^{k_n}.$$

Damit definieren wir

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - P_{n-1}(z)).$$

Nach Ungleichung (4.4) und Teil (1) von Hilfssatz 4.1.1 ist $\Phi$ eine ganze Funktion.

**b)** Für $n \geq 2$ gilt:

$$\Phi(z) - P_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (P_k(z) - P_{k-1}(z)),$$

und damit folgt

$$\max_{H^{(1)}_{n+2}} |\Phi(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_{H^{(1)}_{k+1}} |P_k(z) - P_{k-1}(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{n}. \tag{4.6}$$

**c)** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{U_{\Delta_n}(z_{n,p,k})} = \overline{\{z : |z - z_{n,p,k}| < \Delta_n\}} \subset S_{n,p,k}$ und daher gilt nach Abschätzung (4.5)

$$\max_{|z - z_{n+1,p,k}| \leq \Delta_{n+1}} |P_n(z) - Q_n(z - z_{n+1,p,k})| < \frac{1}{n} \tag{4.7}$$

**2) Nachweis der Universalität von $\Phi$**
Seien dazu $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $f \in A(K)$ und eine Gerade $G$ gegeben. Wie können ohne Einschränkung annehmen, dass $G$ den Nullpunkt enthält (sonst nehmen wir eine

entsprechende Translation im Argument von $\Phi$ vor).
**a)** Nach dem Satz von Mergelyan gibt es eine streng monoton wachsende Folge $\{m_s\}_s$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$\max_K |Q_{m_s-1} - f(z)| < \frac{1}{s} \qquad (s \in \mathbb{N}), \tag{4.8}$$

$$m_s \geq s, \quad \vartheta_{m_s} < \frac{r_{m_s-2}}{2}, \quad \vartheta_{m_s} < \frac{\Delta_{m_s}}{2} \qquad (s \in \mathbb{N}) \tag{4.9}$$

mit $\vartheta_{m_s}$ und $\Delta_{m_s}$ aus Hilfssatz 4.1.1.
Ferner wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und anschließend ein $s_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \overline{U_{\frac{r_{n_0-2}}{2}}(0)}, \quad K \subset \overline{U_{\frac{\Delta_{m_{s_0}}}{2}}(0)} \subset \overline{U_{\Delta_{m_{s_0}}}(0)} \text{ und } m_{s_0} \geq n_0. \tag{4.10}$$

Weiterhin gibt es nach Hilfssatz 4.1.1, Teil (3) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p_n, l_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{dist}(z_{n,p_n,l_n}, G) = \min_{p,k} \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, G) = \vartheta_n.$$

Zur Abkürzung setzen wir $\tilde{z}_n = z_{n,p_n,l_n}$.

**b)** Zunächst gilt für alle $s \geq s_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - f(z)| \leq \\
\leq &\max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - Q_{m_s-1}(z)| + \max_K |Q_{m_s-1}(z) - f(z)| < \\
< &\max_{|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| + \frac{1}{s} \leq \\
\leq &\max_{|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(w) - P_{m_s-1}(w)| + \\
+ &\max_{|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |P_{m_s-1}(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| + \frac{1}{s} < \\
< &\frac{2}{m_s - 1} + \frac{1}{m_s - 1} + \frac{1}{s} \to 0 \quad (s \to \infty).
\end{aligned}$$

Dabei folgt die dritte Zeile aus den Abschätzungen (4.8) und (4.10) unter Berücksichtigung des streng monotonen Wachstums von $\{m_s\}_s$. Die letzte Zeile ergibt sich daraus, dass $\{w : |w - \tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}\} \subset H^{(2)}_{m_s}$ ist nach Definition von $\Delta_{m_s}$; nach Hilfssatz 4.1.1 Teil (2) ist $H^{(2)}_{m_s} \subset H^{(1)}_{m_s+1}$ und mit Abschätzung (4.6) ergibt sich der erste Summand. Die Abschätzung des zweiten Summanden folgt direkt aus (4.7).

**c)** Mit $z'_n \in G$ bezeichnen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ den Punkt, der

$$|z'_n - \tilde{z}_n| = \operatorname{dist}(\tilde{z}_n, G) = \vartheta_n$$

leistet. Dann gilt für alle $s \geq s_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_K |\Phi(z+\tilde{z}_{m_s}) - \Phi(z+z'_{m_s})| \leq \\
&\leq \max_K |\Phi(z+\tilde{z}_{m_s}) - Q_{m_s-1}(z)| + \max_K |Q_{m_s-1}(z) - Q_{m_s-1}(z+z'_{m_s}-\tilde{z}_{m_s})| + \\
&+ \max_K |Q_{m_s-1}(z+z'_{m_s}-\tilde{z}_{m_s}) - \Phi(z+z'_{m_s})| =: D_1(s) + D_2(s) + D_3(s).
\end{aligned}$$

Die drei letzten Summanden schätzen wir getrennt ab.
**i)** Der Summand $D_1(s)$ wird genauso wie unter **b)** abgeschätzt. Es folgt

$$D_1(s) < \frac{2}{m_s - 1} + \frac{1}{m_s - 1} \to 0 \quad (s \to \infty).$$

**ii)** Nach den Ungleichungen in (4.10) und (4.9) sowie Teil (3) von Hilfssatz 4.1.1 folgt für alle $z \in K$:

$$\begin{aligned}
&K \subset \overline{U_{\frac{r_{n_0-2}}{2}}(0)} \subset \overline{U_{\frac{r_{m_s-2}}{2}}(0)}, \\
&|z + z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}| \leq \frac{r_{m_s-2}}{2} + \vartheta_{m_s} < r_{m_s-2} \qquad\qquad (z \in K) \\
\text{und } &|z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}| \leq \vartheta_{m_s} < \eta_{m_s-1}.
\end{aligned}$$

Das ergibt nach der Definition der Folge $\{\eta_n\}_n$:

$$D_2(s) = \max_K |Q_{m_s-1}(z) - Q_{m_s-1}(z+z'_{m_s}-\tilde{z}_{m_s})| < \frac{1}{m_s-1} \to 0 \quad (s \to \infty).$$

**iii)** In $D_3(s)$ setzen wir $w = z + z'_{m_s}$. Dann gilt für alle $z \in K$ nach den Abschätzungen in (4.10) und (4.9):

$$\begin{aligned}
&|w - z'_{m_s}| \leq \max_{z \in K} |z| \leq \frac{\Delta_{m_s}}{2}, \text{ also} \\
&|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq |w - z'_{m_s}| + |z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}| \leq \frac{\Delta_{m_s}}{2} + \vartheta_{m_s} < \Delta_{m_s}.
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$D_3(s) \leq \max_{|w-\tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| \to 0 \quad (s \to \infty),$$

was genauso wie in **b)** gezeigt wird.
Setzen wir jetzt $z_n = z'_{m_n} \in G$, so folgt nach **b)** und **c)** die Behauptung des Satzes.

### 4.1.2 T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen im Einheitskreis

Analog zum vorigen Abschnitt werden wir zunächst Kreisringsektoren im Einheitskreis konstruieren, die bestimmte gewünschte Eigenschaften besitzen. Auch

hier wird die gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta entscheidend ausgenützt.
Es sei zuerst

$$\{Q_n\}_n \tag{4.11}$$

eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Auch hier werden die Approximationsmengen induktiv konstruiert.
Für $n = 0$ setzen wir $r_0 = \frac{1}{4}$ und $\eta_0 = 1$.
Seien für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $r_1, \ldots, r_{n-1}$ und $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ bereits definiert. Da $Q_n$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\tilde{\eta}_n > 0$ mit

$$|Q_n(z_1) - Q_n(z_2)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z_1, z_2 \text{ mit } |z_1|, |z_2| \leq 2,\ |z_1 - z_2| < \tilde{\eta}_n. \tag{4.12}$$

Damit setzen wir

$$\begin{aligned}
\eta_n &= \min\left\{\tilde{\eta}_n, \eta_{n-1}, \frac{1}{n}\right\},\\
k_n &= \left[\frac{(n+3)\ln(2) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln(\eta_n)}{\ln(2)}\right] + 2,\\
r_n &= 1 - \frac{1}{2^n} \text{ und}\\
\delta_n &= \min\left\{\frac{\eta_n}{16}, \frac{1}{n}\right\}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir dann folgende Zahlen definieren:
Die Anzahl der Sektorenreihen setzen wir

$$N_n = \left[\frac{1}{\delta_n}\right] + 2.$$

Der Winkel, um den eine Sektorenreihe gegenüber der vorherigen versetzt ist, definieren wir als

$$\gamma_n = \delta_n \frac{\pi}{4} \frac{1}{2^{k_n}}.$$

Und schließlich sind die Argument-Begrenzungen des $k$-ten Sektors einer Sektorenreihe

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,k}^{(1)} &= \frac{(k-1)\pi}{4 \cdot 2^{k_n}} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{8 \cdot 2^{k_n}},\\
\alpha_{n,k}^{(2)} &= \frac{k\pi}{4 \cdot 2^{k_n}} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{8 \cdot 2^{k_n}}.
\end{aligned}$$

Wir definieren die Dicke eines Sektors der $n$-ten Sektorenreihe mit

$$a_n = \frac{1}{2^{n+3}} \frac{1}{N_n}.$$

Schließlich setzen wir

$$r_{n,p}^{(1)} = r_n + 2(p-1)a_n \text{ und } r_{n,p}^{(2)} = r_n + (2(p-1)+1)a_n$$
$$\text{für } p = 1, \dots, N_n.$$

Mit diesen Bezeichnungen definieren wir

$$S_{n,p,k} = \big\{ z \in \mathbb{D} : r_{n-1,p}^{(1)} \le |z| \le r_{n-1,p}^{(2)}, \\ \alpha_{n-1,k}^{(1)} + (p-1)\gamma_{n-1} \le \arg(z) \le \alpha_{n-1,k}^{(2)} + (p-1)\gamma_{n-1} \big\}$$

und

$$z_{n,p,k} = \frac{1}{2}\left( r_{n-1,p}^{(1)} + r_{n-1,p}^{(2)} \right) e^{\frac{i}{2}\left( \alpha_{n-1,k}^{(1)} + \alpha_{n-1,k}^{(2)} + 2(p-1)\gamma_{n-1} \right)}$$

für $p = 1, \dots, N_{n-1}$ und $k = 1, \dots, 8 \cdot 2^{k_{n-1}}$, wobei $p$ den Index der Sektorenreihe angibt und $k$ den Index eines Sektors innerhalb der Reihe.
Dabei ist $z_{n,p,k}$ der „Mittelpunkt“ eines jeden Kreisringsektors $S_{n,p,k}$.
Als eigentliche Approximationsmengen setzen wir dann

$$H_n^{(1)} = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z| \le 1 - \frac{9}{2^{n+2}} \right\} \text{ und } H_n^{(2)} = \bigcup_{p=1}^{N_{n-1}} \bigcup_{k=1}^{8 \cdot 2^{k_{n-1}}} S_{n,p,k}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir im Folgenden

$$R_\varphi = \{ z : z = re^{i\varphi}; r \in [0,1) \} \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

**Hilfssatz 4.1.3** *Für die oben definierten Mengen gelten folgende Aussagen:*

*(1) Die Folge $\left\{ H_n^{(1)} \right\}_n$ schöpft den Einheitskreis $\mathbb{D}$ aus.*

*(2) Es gilt $H_n^{(2)} \subset H_{n+1}^{(1)}$ und $H_n^{(1)} \cap H_n^{(2)} = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*(3) Für jeden Radius $R_\varphi$ von $\mathbb{D}$ gilt mit*

$$\vartheta_n = \min_{p,k} \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, R_\varphi)$$

*und $\Delta_n = \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, \partial S_{n,p,k})$ die Beziehung*

$$\frac{n}{n+1} \frac{\vartheta_n}{\Delta_n} < \eta_{n-1}.$$

Die Aussage ***(1)*** ist klar nach Definition der Folge $\left\{H_n^{(1)}\right\}_n$.

**Zu *(2)*:**
Wir beachten, dass $1 - \frac{9}{2^{n+2}} = r_{n-1} - \frac{1}{2^{n+2}}$ ist, und daher ist $|z| < r_{n-1}$ für alle $z \in H_n^{(1)}$. Außerdem ist $|z| \geq r_{n-1}$ für $z \in H_n^{(2)}$ und damit folgt $H_n^{(1)} \cap H_n^{(2)} = \varnothing$. Für alle $z \in H_n^{(2)}$ gilt:

$$|z| \leq r^{(2)}_{n-1,N_{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + (2N_{n-1} - 1)\frac{1}{2^{n+2}N_{n-1}} < 1 - \frac{3}{2^{n+1}} < 1 - \frac{9}{2^{n+3}},$$

und daher ist $H_n^{(2)} \subset H_{n+1}^{(1)}$.

**Zu *(3)*:**
Zur Veranschaulichung geben wir die Skizze eines Kreisringsektors:

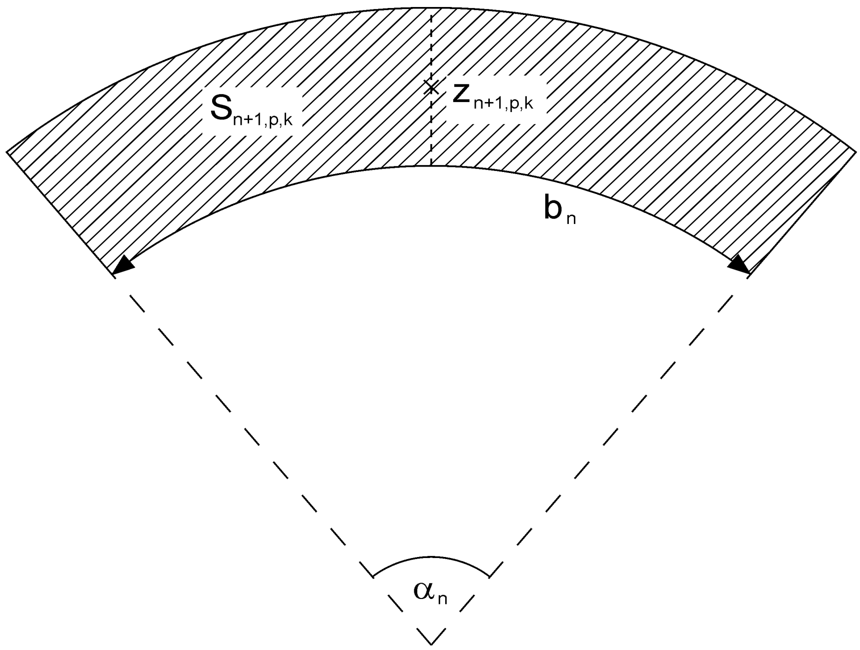


Abbildung 4.2: Ein Kreisringsektor

Nach denselben Argumenten wir in Hilfssatz 4.1.1 hängt $\vartheta_{n+1}$ nur von $\gamma_n$ und $r^{(2)}_{n,N_n}$ ab. Zum einen haben wir wegen $\tan(\frac{\gamma_n}{2}) \leq \gamma_n$:

$$\vartheta_{n+1} \leq \tan\left(\frac{\gamma_n}{2}\right) r^{(2)}_{n,N_n} \leq \delta_n \frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k_n}}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

zum anderen:

$$\Delta_{n+1} \geq \min\left\{\frac{a_n}{2}, \frac{b_n}{2}\right\}.$$

Außerdem gilt:

$$k_n > \frac{(n+3)\ln(2) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln(\eta_n)}{\ln(2)} + 1,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{2^{n+3}\frac{n+2}{n}}{2^{k_n-1}} < \eta_n. \tag{4.13}$$

Nach Definition von $\delta_n$ gilt $8\delta_n < \eta_n$ und $\delta_n \leq \frac{1}{n}$.
Da wir zwei Abschätzungen für $\Delta_{n+1}$ nach unten haben, müssen wir auch für $\frac{\vartheta_{n+1}}{\Delta_{n+1}}$ zwei Abschätzungen durchführen. Eine erste Abschätzung ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta_{n+1}}{\frac{a_n}{2}} &\leq 2\delta_n \frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k_n}}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}2^{n+3}\left(\frac{1}{\delta_n}+2\right) = 2\delta_n \frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k_n}}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}2^{n+3}\frac{1+2\delta_n}{\delta_n} \leq \\ &\leq \frac{2^{n+3}\frac{n+2}{n}}{2^{k_n-1}} < \eta_n,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung nach (4.13) gilt.
Wegen

$$b_n \geq 2\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) r_n \geq \frac{\alpha_n}{2} r_n \geq \frac{\pi}{16\cdot 2^{k_n}}\frac{2^n-1}{2^n}$$

ergibt eine zweite Abschätzung:

$$\frac{\vartheta_{n+1}}{\frac{b_n}{2}} \leq 2\delta_n \frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k_n}}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\frac{1}{b_n} \leq 4\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\delta_n < 8\delta_n < \eta_n.$$

Aus den letzten drei Abschätzungen folgt ***(3)***, und damit sind alle Eigenschaften bewiesen.

**Satz 4.1.4** *Es gibt eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $K \in \mathcal{M}$, $f \in A(K)$ und jedem $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt es Folgen $\{a'_k\}_k$ in $(0,\infty)$ und $\{b'_k\}_k$ auf $R_\varphi$ derart, dass für jedes $z \in K$ $\{a'_n z + b'_n\}$ aus $\mathbb{D}$ heraus gegen $e^{i\varphi}$ konvergiert und $\{\Phi(a'_n z + b'_n)\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

**Beweis:**
**1) Konstruktion der universellen Funktion**
Es sei $\{Q_n\}_n$ die Polynomfolge aus (4.11). Wir erinnern uns, dass

$$|Q_n(z_1) - Q_n(z_2)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z_1, z_2 \text{ mit } |z_1|, |z_2| \leq 2,\ |z_1 - z_2| < \eta_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (siehe (4.12)). Damit und mit Hilfe der obigen Approximationsmengen konstruieren wir induktiv eine Polynomfolge $\{P_n\}_n$.
Für $n = 0$ setzen wir $P_0 = 0$.
Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Polynome $P_1, \ldots, P_{n-1}$ schon definiert sind. Nach dem Satz von Runge über polynomiale Approximation und Hilfssatz 4.1.3 (2) gibt es ein Polynom $P_n$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\max_{H^{(1)}_{n+1}} |P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \frac{1}{n^2}, \tag{4.14}$$

$$\max_{S_{n+1,p,k}} |P_n(z) - Q_n(s_n(z - z_{n+1,p,k}))| < \frac{1}{n} \tag{4.15}$$

$$\text{für } p = 1, \ldots, N_n;\ k = 1, \ldots, 8 \cdot 2^{k_n},$$

$$\text{wobei } s_n = \frac{n}{n+1} \frac{1}{\Delta_n}.$$

Damit definieren wir nun

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - P_{n-1}(z)).$$

Nach Ungleichung (4.14) und Hilfssatz 4.1.3 (1) ist dann $\Phi$ holomorph im Einheitskreis.
Weiterhin gilt für $n \geq 3$ nach (4.14) die folgende Abschätzung:

$$\max_{H^{(1)}_{n+2}} |\Phi(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_{H^{(1)}_{k+1}} |P_k(z) - P_{k-1}(z)| < \frac{2}{n}. \tag{4.16}$$

**2) Nachweis der Universalität von $\Phi$**
**a)** Es seien $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $f \in A(K)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben. Wir wählen ein $R \geq 1$ so, dass $K_R = \frac{1}{R} K \subset \frac{1}{2}\mathbb{D}$ gilt und setzen $f_R(z) = f(Rz)$. Dann ist $f_R \in A(K_R)$.
Nach dem Satz von Mergelyan gibt es eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}_k$ mit

$$\max_{K_R} |Q_{n_k - 1}(z) - f_R(z)| < \frac{1}{k}. \tag{4.17}$$

Dann wählen wir ein $k_0 \geq 3$, so dass für $k \geq k_0$

$$K_R \subset \left\{ z : |z| \leq s_{n_k} \frac{\Delta_{n_k}}{2} = \frac{n_k}{2(n_k + 1)} \right\} \tag{4.18}$$

gilt. Wegen $k_0 \geq 3$ gilt nach Hilfssatz 4.1.1 (3) und der Definition von $\eta_n$ für alle $k \geq k_0$

$$\frac{\vartheta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} < \eta_{n_k - 1} < \frac{1}{n_k - 1} < \frac{1}{2}$$

und damit

$$\vartheta_{n_k} < \frac{\Delta_{n_k}}{2} \qquad \text{für alle } k \geq k_0. \tag{4.19}$$

**b)** Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ finden wir Zahlen $p_n, l_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{dist}(z_{n,p_n,l_n}, R_\varphi) = \min_{p,k} \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, R_\varphi) = \vartheta_n.$$

Zur Abkürzung setzen wir $\tilde{z}_n = z_{n,p_n,l_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_{K_R} \left| \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + \tilde{z}_{n_k}\right) - f_R(z) \right| \leq \\
&\leq \max_{|z| \leq s_{n_k}\Delta_{n_k}} \left| \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + \tilde{z}_{n_k}\right) - Q_{n_k-1}(z) \right| + \max_{K_R} |Q_{n_k-1}(z) - f_R(z)| \leq \\
&\leq \max_{|w-\tilde{z}_{n_k}| \leq \Delta_{n_k}} |\Phi(w) - P_{n_k-1}(w)| + \\
&+ \max_{|w-\tilde{z}_{n_k}| \leq \Delta_{n_k}} |P_{n_k-1}(w) - Q_{n_k-1}(s_{n_k}(w - \tilde{z}_{n_k}))| + \frac{1}{k} < \\
&< \frac{2}{n_k - 1} + \frac{1}{n_k - 1} + \frac{1}{k} =: \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Ungleichung direkt aus (4.17). Die Abschätzung des ersten Summanden der dritten Zeile folgt aus den Inklusionen

$$\{w : |w - \tilde{z}_{n_k}| \leq \Delta_{n_k}\} \subset H^{(2)}_{n_k} \subset H^{(1)}_{n_k+1}$$

(siehe Hilfssatz 4.1.3 (2)) und aus der Abschätzung (4.16). Die Abschätzung des zweiten Summanden folgt direkt aus (4.15).

**c)** Mit $\tilde{a}_k = (R s_{n_k})^{-1}$ und $\tilde{b}_k = \tilde{z}_{n_k}$ gilt wegen den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\Delta_n \leq \max\left\{\frac{a_n}{2}, \frac{b_n}{2}\right\},\ a_n \leq \frac{1}{2^{n+3}} \quad \text{und} \\
b_n \leq 2 \tan\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) r_{n+2} \leq 2 \frac{\pi}{8 \cdot 2^{k_n}} \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2}} \leq \frac{1}{2^{k_n}}
\end{aligned}$$

die Beziehung

$$0 < \tilde{a}_k \to 0, \tilde{b}_k \to e^{i\varphi},$$

und es folgt

$$\max_{K_R} |\Phi(\tilde{a}_k R z + \tilde{b}_k) - f(Rz)| < \varepsilon_k$$

bzw. mit $w = Rz$

$$\max_K |\Phi(\tilde{a}_k w + \tilde{b}_k) - f(w)| < \varepsilon_k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

**d)** Mit $z_n' \in R_\varphi$ werde für $n \in \mathbb{N}$ der Punkt bezeichnet, der

$$|z_n' - \tilde{z}_n| = \operatorname{dist}(\tilde{z}_n, R_\varphi) = \vartheta_n$$

leistet. Dann gilt für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_{K_R} \left| \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + \tilde{z}_{n_k}\right) - \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + z_{n_k}'\right) \right| \leq \\
&\leq \max_{K_R} \left| \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + \tilde{z}_{n_k}\right) - Q_{n_k-1}(z) \right| + \\
&+ \max_{K_R} |Q_{n_k-1}(z) - Q_{n_k-1}(z + s_{n_k}(z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k}))| + \\
&+ \max_{K_R} \left| Q_{n_k-1}(z + s_{n_k}(z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k})) - \Phi\left(\frac{1}{s_{n_k}} z + z_{n_k}'\right) \right| =: D_1(k) + D_2(k) + D_3(k).
\end{aligned}$$

Die drei Summanden auf der rechten Seite schätzen wir nun getrennt ab:

**i)** Nach **b)** ist $D_1(k) < \frac{2}{n_k-1} + \frac{1}{n_k-1} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

**ii)** Für $z \in K_R \subset \mathbb{D}$ gilt:

$$|z + s_{n_k}(z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k})| \leq |z| + s_{n_k}|z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k}| \leq 1 + \frac{n_k}{n_k+1}\frac{\vartheta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} < 1 + \eta_{n_k-1} \leq 2.$$

Ferner ist

$$|z - (z + s_{n_k}(z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k}))| \leq s_{n_k}\vartheta_{n_k} = \frac{n_k}{n_k+1}\frac{\vartheta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} < \eta_{n_k-1},$$

und mit der Definition von $\eta_n$ folgt $D_2(k) < \frac{1}{n_k-1} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

**iii)** Mit $w = \frac{1}{s_{n_k}} z + z_{n_k}'$ gilt: $z = s_{n_k}(w - z_{n_k}')$, also folgt $z + s_{n_k}(z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k}) = s_{n_k}(w - \tilde{z}_{n_k})$. Ferner gilt für alle $z \in K_R$ nach (4.18) und (4.19):

$$|w - \tilde{z}_{n_k}| = \left| \frac{1}{s_{n_k}} z + z_{n_k}' - \tilde{z}_{n_k} \right| \leq \frac{1}{s_{n_k}} s_{n_k} \frac{\Delta_{n_k}}{2} + \vartheta_{n_k} \leq \Delta_{n_k}.$$

Also haben wir

$$D_3(k) \leq \max_{|w - \tilde{z}_{n_k}| \leq \Delta_{n_k}} |\Phi(w) - Q_{n_k-1}(s_{n_k}(w - \tilde{z}_{n_k}))| < \frac{2}{n_k-1} + \frac{1}{n_k-1} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

genauso wie bei $D_1(k)$.
Definieren wir nun $a'_k = (Rs_{n_k})^{-1}$ und setzen $b'_k = z'_{n_k}$, so gilt nach **b)**,**c)** und den obigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned} &0 < a'_k \to 0,\ b'_k \in R_\varphi,\ b'_k \to e^{i\varphi} \text{ und} \\ &\max_K |\Phi(a'_k z + b'_k) - f(z)| \to 0 \quad (k \to \infty), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe einer konformen Abbildung können wir leicht eine universelle Funktion mit vorgegebenen Approximationswegen auf einem Jordangebiet konstruieren. Wir benötigen noch die beiden folgenden Definitionen, um unseren Satz für Jordangebiete zu formulieren.

**Definition 4.1.5** Es sei $G$ ein Jordangebiet und $\varphi : G \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung, die nach dem Satz von Carathéodory zu einem Homöomorphismus $\varphi : \overline{G} \to \overline{\mathbb{D}}$ fortgesetzt sei. Eine Teilmenge $S \subset \overline{G}$ heißt *radialer Strahl (bezüglich $\varphi$)*, falls folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $S$ ist eine Kurve mit parametrisierender Funktion $\vartheta : [0,1] \to \overline{G}$.

(2) Es gibt ein $\zeta \in S$, so dass $S \setminus \{\zeta\}$ in $G$ liegt, ohne Einschränkung sei $\zeta = \vartheta(1)$.

(3) Es existieren $\psi \in [0, 2\pi), t_0 \in [0,1), r_0 \in [0,1)$, so dass

$$\varphi(\vartheta([t_0, 1])) = \{re^{i\psi}; r \in [r_0, 1]\}.$$

**Definition 4.1.6** Es sei $G$ ein Jordangebiet und $\{z_n\}_n$ eine Folge in $G$. Wir sagen, $\{z_n\}_n$ *liegt asymptotisch auf einem radialen Strahl* in $G$, falls es einen radialen Strahl $S$ in $G$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\operatorname{dist}(z_n, S) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

**Satz 4.1.7** *Es sei $G$ ein Jordangebiet. Dann existiert eine auf $G$ holomorphe Funktion $\Psi$ mit folgender Eigenschaft:*
*Für alle $K \in \mathcal{M}(G)$, $f \in A(K)$ sowie für jeden radialen Strahl $S$ in $G$ existiert eine Folge $\{\vartheta_n(w)\}_n$, die asymptotisch auf $S$ liegt, so dass $\{\Psi(\vartheta_n(w))\}_n$ auf $K$ gleichmäßig gegen $f(w)$ konvergiert.*

**Beweis:**
Nach Satz 4.1.4 existiert eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu $K \in \mathcal{M}$, $f \in A(K)$ und $\psi \in [0, 2\pi)$ existieren eine Folge $\{a_n\}_n$ positiver Zahlen und eine Folge $\{b_n\}_n$ auf $R_\psi$ mit $a_n \to 0$, $b_n \to e^{i\psi}$, so dass $\{\Phi(a_n z + b_n)\}_n$

gleichmäßig auf $K$ gegen $f(z)$ konvergiert.
Es sei $\varphi : G \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung, die nach dem Satz von Carathéodory stetig und bijektiv auf $\overline{G}$ fortgesetzt sei. Es seien ferner $K \in \mathcal{M}(G)$, $f \in A(K)$, ein radialer Strahl $S$ in $G$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben.
Die Menge $\varphi(K)$ ist kompakt und hat zusammenhängendes Komplement, ferner ist $f \circ \varphi^{-1} \in A(\varphi(K))$. Nach der Definition eines radialen Strahls in einem Jordangebiet gibt es eine Funktion $\vartheta : [0,1] \to \overline{G}$ und Zahlen $t_0, r_0 \in [0,1), \psi \in [0, 2\pi)$ mit

$$\varphi(\vartheta([t_0, 1])) = \{re^{i\psi}; r \in [r_0, 1]\} =: G_{\psi, r_0}.$$

Nach Satz 4.1.4 gibt es dann Folgen $\{a_n\}_n$ in $(0, \infty)$ und $\{b_n\}_n$ auf $G_{\psi, r_0}$ mit $a_n \to 0$, $b_n \to e^{i\psi}$, so dass

$$\max_{\varphi(K)} |\Phi(a_n z + b_n) - f(\varphi^{-1}(z))| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Setzen wir jetzt $\Psi = \Phi \circ \varphi$, so ist $\Psi$ holomorph auf $G$, und es gilt

$$\max_{\varphi(K)} |\Psi(\varphi^{-1}(a_n z + b_n)) - f(\varphi^{-1}(z))| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Wir setzen $R = \max_{z \in \varphi(K)} |z|$. Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ folgt $|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)| < \varepsilon$.
Da $\{a_n\}_n$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \frac{\delta}{R}$ ist für alle $n \geq N$. Damit ist $|a_n z| < \delta$ für alle $n \geq N$ und alle $z \in \varphi(K)$. Daher folgt für $n \geq N$ und $z \in \varphi(K)$

$$|\varphi^{-1}(a_n z + b_n) - \varphi^{-1}(b_n)| < \varepsilon.$$

Setzen wir also $\vartheta_n(w) = \varphi^{-1}(a_n \varphi(w) + b_n)$, so liegt die Folge $\{\vartheta_n(w)\}_n$ für alle $w \in K$ asymptotisch auf $S$ und es gilt:

$$\max_{w \in K} |\Psi(\vartheta_n(w)) - f(w)| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

was zu beweisen war.

**Bemerkung 4.1.8** In obigem Satz geht leider die T-Universalität verloren, da unter einer konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein beliebiges Jordangebiet das Argument „$a_n z + b_n$“ in „$\vartheta_n(w)$“ übergeht.

### 4.1.3 T-universelle ganze Funktionen bezüglich allgemeiner Kurvenscharen

In den vorigen beiden Abschnitten haben wir jeweils T-universelle Funktionen betrachtet, die bezüglich der vom Nullpunkt ausgehenden Radien T-universell waren. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion einer Funktion, die bezüglich allgemeinerer Kurvenscharen T-universell ist.

Der Aufbau der Konstruktion erfolgt jedoch genauso wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten. Wir definieren also gewisse Hilfsmengen, die wir zur Approximation benötigen.
Zunächst stellt sich jedoch die Frage, wie allgemein eine Kurvenschar, bezüglich der eine Funktion T-universell sein soll, überhaupt sein kann. Nach Tenthoff [Ten00], Beispiel 4.1.2 dürfen sich die Kurven einer solchen Schar zumindest nicht überschneiden. Wir werden die Konstruktion vermittels einer Hilfsfunktion auf den Abschnitt 4.1.1 zurückführen.

Es sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion, die der folgenden Eigenschaft genügt: Es gibt $m, M > 0$, so dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$m|z_1 - z_2| \leq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq M|z_1 - z_2| \tag{4.20}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $\varphi$ stetig und eineindeutig ist. Diese Forderung ist offenkundig sehr stark, da die beiden Konstanten $m$ und $M$ globale Konstanten sind, die lediglich von der Funktion $\varphi$ abhängen.

Zur Abkürzung setzen wir

$$S_\alpha = \{\varphi(G_\alpha); \alpha \in [0, 2\pi)\},$$

wobei $G_\alpha = \{re^{i\alpha}; r \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch den Nullpunkt ist, die mit der reellen Achse den Winkel $\alpha$ bildet.

**Satz 4.1.9** *Es gibt eine ganze Funktion $\Phi$, die über folgende Eigenschaft verfügt: Für alle Kompakta $K \in \mathcal{M}$, alle Funktionen $f \in A(K)$ und jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$ existiert eine Punktfolge $\{z_n\}_n$ auf $S_\alpha$, die*

$$\max_{z \in K} |\Phi(z + z_n) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

*leistet.*

**Beweis:**
**0) Konstruktion und Eigenschaften der Approximationsmengen**
Es sei $\{Q_n\}_n$ eine Abzählung aller Polynome mit rationalem Real- und Imaginärteil der Koeffizienten. Wie in Abschnitt 4.1.1 setzen wir $r_0 = 1$ und $\eta_0 = 1$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $r_0, \ldots, r_{n-1}$ und $r_0, \ldots, r_{n-1}$ schon definiert. Dann gibt es ein $\tilde{\eta}_n > 0$, so dass

$$|Q_n(z_1) - Q_n(z_2)| < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \varphi(\{z : |z| \leq r_{n-1}\}), |z_1 - z_2| < M\tilde{\eta}_n.$$

Dann setzen wir $\eta_n = \min\left\{\tilde{\eta}_n, \frac{1}{n}\right\}$ und definieren $H_n^{(1)}$ und $H_n^{(2)}$ für $n \in \mathbb{N}$ wie in Abschnitt 4.1.1, ebenso $S_{n,p,k}$ und $z_{n,p,k}$ für $n \in \mathbb{N}$; $p = 1, \ldots, N_{n-1}$; $k = 1, \ldots, 8 \cdot 2^{k_{n-1}}$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{n,p,k} &= \varphi(z_{n,p,k}) \qquad && (n \in \mathbb{N};\ p = 1, \ldots, N_{n-1};\ k = 1, \ldots, 8 \cdot 2^{k_{n-1}}),\\
\tilde{S}_{n,p,k} &= \varphi(S_{n,p,k}) && (n \in \mathbb{N};\ p = 1, \ldots, N_{n-1};\ k = 1, \ldots, 8 \cdot 2^{k_{n-1}}),\\
\hat{H}_n^{(1)} &= \varphi(H_n^{(1)}) && (n \in \mathbb{N}),\\
\tilde{H}_n^{(2)} &= \varphi(H_n^{(2)}) && (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Wegen $H_n^{(1)} \subset (H_{n+1}^{(1)})^o$ ist auch $\hat{H}_n^{(1)} \subset (\hat{H}_{n+1}^{(1)})^o$, da $\varphi$ stetig und eineindeutig ist. Damit ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n^{(1)}$ offen. Um dies zu beweisen, sei ein $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n^{(1)}$ gegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z \in \hat{H}_n^{(1)} \subset (\hat{H}_{n+1}^{(1)})^o$. Daher existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset \hat{H}_{n+1}^{(1)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n^{(1)}$. Setzen wir also

$$T = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n^{(1)},$$

so ist $T$ abgeschlossen und für $T_n = T \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$. Damit setzen wir

$$\tilde{H}_n^{(1)} = \hat{H}_n^{(1)} \cup T_n.$$

Die so definierten Mengen erfüllen die von uns gewünschten Eigenschaften:

(1) $\{\tilde{H}_n^{(1)}\}$ schöpft $\mathbb{C}$ aus.

(2) Es ist $\tilde{H}_n^{(1)} \cap \tilde{H}_n^{(2)} = \varnothing$ und $\tilde{H}_n^{(2)} \subset \tilde{H}_{n+1}^{(1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Für jede Gerade $G$, die durch den Nullpunkt geht, gilt:

$$\vartheta_n = \min_{p,k} \operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p,k}, \varphi(G)) < M\eta_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(4) Es gilt $\Delta_n = \operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p,k}, \partial\tilde{S}_{n,p,k}) \to \infty \quad (n \to \infty)$.

Eigenschaft (1) gilt nach Definition von $\tilde{H}_n^{(1)}$. Eigenschaft (2) folgt aus Hilfssatz 4.1.1, der Definition von $T$ und der Tatsache, dass $\varphi$ eineindeutig ist. Die Eigenschaften (3) und (4) folgen aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\vartheta_n &= \min_{p,k} \operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p,k}, \varphi(G)) \leq M \min_{p,k} \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, G) < M\eta_{n-1},\\
\Delta_n &= \operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p,k}, \partial\tilde{S}_{n,p,k}) \geq m \operatorname{dist}(z_{n,p,k}, \partial S_{n,p,k}) \to \infty \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

wobei die jeweils letzten beiden Abschätzungen wiederum aus Hilfssatz 4.1.1 folgen.

**1) Konstruktion der universellen Funktion**
Wir definieren induktiv eine Folge von Polynomen $\{P_n\}$. Es sei $P_0 = 0$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien die Polynome $P_0, \dots, P_{n-1}$ schon definiert. Nach dem Satz von Runge über polynomiale Approximation existiert ein Polynom $P_n$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\max_{\tilde{H}^{(1)}_{n+1}} |P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \frac{1}{n^2}, \tag{4.21}$$

$$\max_{\tilde{S}_{n+1,p,k}} |P_n(z) - Q_n(z - \tilde{z}_{n+1,p,k}| \tag{4.22}$$

$$\text{für alle } p = 1, \dots, N_n;\ k = 1, \dots, 8 \cdot 2^{k_n}.$$

Man beachte, dass $\varphi$ stetig und eineindeutig ist und daher die Menge

$$\tilde{H}^{(1)}_{n+1} \cup \bigcup_{p=1}^{N_n} \bigcup_{k=1}^{8 \cdot 2^{k_n}} \tilde{S}_{n+1,p,k}$$

kompakt ist und zusammenhängendes Komplement hat.
Damit setzen wir

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - P_{n-1}(z))$$

Dann gilt für $n \geq 2$:

$$\max_{\tilde{H}^{(1)}_{n+2}} |\Phi(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_{\tilde{H}^{(1)}_{k+1}} |P_k(z) - P_{k-1}(z)| < \frac{2}{n}.$$

Ferner ist $\overline{U_{\Delta_n}(\tilde{z}_{n,p,k})} \subset \tilde{S}_{n,p,k}$, also gilt nach (4.22) für alle zulässigen $n, p, k \in \mathbb{N}$:

$$\max_{|z - \tilde{z}_{n,p,k}| \leq \Delta_n} |P_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z - \tilde{z}_{n,p,k})| < \frac{1}{n-1},$$

wobei $\{\Delta_n\}_n$ die Folge aus **0)** ist.

**2) Nachweis der Universalität von $\Phi$**
Es sei $K$ ein Kompaktum mit zusammenhängendem Komplement, $f \in A(K)$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$.

**a)** Nach dem Satz von Mergelyan können wir eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{m_s\}_s$ wählen mit $m_s \geq s$ und

$$\max_K |Q_{m_s-1} - f(z)| < \frac{1}{s} \qquad (s \in \mathbb{N}). \tag{4.23}$$

Ferner gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \varphi\left(\overline{U_{r_{n_0-2}}}\right)$ und ein $s_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_{s_0} \geq n_0$ und

$$K + \overline{U_{\vartheta_{m_s}}(0)} \subset \varphi\left(\overline{U_{r_{m_s-2}}}\right) \qquad (s \geq s_0),$$

$$K \subset U_{\frac{\Delta_{m_s}}{2}}(0),\ \vartheta_{m_s} < \frac{\Delta_{m_s}}{2} \qquad (s \geq s_0).$$

Dabei sind $\{\Delta_m\}_m$ und $\{\vartheta_m\}_m$ die Folgen aus **0)**. Ferner gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $p_n, l_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p_n,l_n}, S_\alpha) = \min_{p,k} \operatorname{dist}(\tilde{z}_{n,p,k}, S_\alpha) = \vartheta_n.$$

Zur Abkürzung setzen wir $\tilde{z}_n = \tilde{z}_{n,p_n,l_n}$.

**b)** Es gilt für $s \geq s_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - f(z)| \leq \\
&\leq \max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - Q_{m_s-1}(z)| + \max_K |Q_{m_s-1}(z) - f(z)| < \\
&< \max_{|z| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - Q_{m_s-1}(z)| + \frac{1}{s} \leq \\
&\leq \max_{|w-\tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| + \frac{1}{s} \leq \\
&\leq \max_{\tilde{H}^{(2)}_{m_s}} |\Phi(w) - P_{m_s-1}(w)| + \max_{|w-\tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |P_{m_s-1}(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| + \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Jetzt gilt nach **0)** und **1)**:

$$\max_{\tilde{H}^{(2)}_{m_s}} |\Phi(w) - P_{m_s-1}(w)| \leq \max_{\tilde{H}^{(1)}_{m_s+1}} |\Phi(w) - P_{m_s-1}(w)| < \frac{2}{m_s - 1}.$$

Ferner ist nach **1)**:

$$\max_{|w-\tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |P_{m_s-1}(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| < \frac{1}{m_s - 1}.$$

Setzen wir also $\varepsilon_s = \max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - f(z)|$, so konvergiert $\{\varepsilon_s\}_s$ gegen Null.

**c)** Wir bezeichnen mit $z'_n \in S_\alpha$ den Punkt, der

$$|z'_n - \tilde{z}_n| = \operatorname{dist}(\tilde{z}_n, S_\alpha)$$

erfüllt. Dann haben wir für $s \geq s_0$:

$$\begin{aligned}
&\max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - \Phi(z + z'_{m_s})| \leq \\
&\leq \max_K |\Phi(z + \tilde{z}_{m_s}) - Q_{m_s-1}(z)| + \max_K |Q_{m_s-1}(z) - Q_{m_s-1}(z + z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s})| + \\
&+ \max_K |Q_{m_s-1}(z + z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}) - \Phi(z + z'_{m_s})| =: D_1(s) + D_2(s) + D_3(s)
\end{aligned}$$

Diese drei Summanden werden wir getrennt abschätzen.
**i)** Nach **b)** gilt $D_1(s) \to 0 \quad (s \to \infty)$.
**ii)** Wegen

$$K \subset \varphi\left(\overline{U_{r_{n_0-2}}}\right) \subset \varphi\left(\overline{U_{r_{m_s-2}}}\right),$$
$$|z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}| \leq \vartheta_{m_s} < M\eta_{m_s-1}$$

und damit

$$K + z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s} \subset K + \overline{U_{\vartheta_{m_s}}(0)} \subset \varphi\left(\overline{U_{r_{m_s-2}}(0)}\right)$$

haben wir

$$D_2(s) = \max_K |Q_{m_s-1}(z) - Q_{m_s-1}(z + z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s})| < \frac{1}{m_s - 1} \to 0 \quad (s \to \infty).$$

**iii)** In $D_3(s)$ setzen wir $w = z + z'_{m_s}$. Dann gilt für $s \geq s_0$ und alle $z \in K$:

$$|w - z'_{m_s}| \leq \max_{z \in K} |z| \leq \frac{\Delta_{m_s}}{2},$$

also

$$|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq |w - z'_{m_s}| + |z'_{m_s} - \tilde{z}_{m_s}| \leq \frac{\Delta_{m_s}}{2} + \vartheta_{m_s} < \Delta_{m_s}.$$

Daher ist nach **i)**

$$D_3(s) \leq \max_{|w - \tilde{z}_{m_s}| \leq \Delta_{m_s}} |\Phi(w) - Q_{m_s-1}(w - \tilde{z}_{m_s})| \to 0 \quad (s \to \infty).$$

Setzen wir $z_n = z'_{m_n} \in S_\alpha$, so folgt nach **2b-c** die Behauptung des Satzes.

**Bemerkung 4.1.10** Die Forderung (4.20) ist für ganze Funktionen sehr restriktiv. Ist nämlich $\varphi$ ein ganze Funktion, die (4.20) mit den Konstanten $m, M > 0$ genügt, so gilt für die Ableitung $\varphi'$ in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$|\varphi'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \left|\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \left|\frac{M(z - z_0)}{z - z_0}\right| = M.$$

Also ist $\varphi'$ beschränkt und daher nach dem Satz von Liouville eine Konstante. Daher gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$, so dass $\varphi$ die Gestalt $\varphi(z) = az + b$ hat.
Damit $\varphi$ also nicht trivial ist, sollte $\varphi$ keine ganze Funktion sein.

**Bemerkung 4.1.11** Wir können uns bei den Parametern für die Kurvenschar $\{S_\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)\}$ auch auf ein echtes Teilintervall $I \subset [0, 2\pi)$ beschränken. Das folgt aus der Konstruktion der Mengenfolgen $\{\tilde{H}_n^{(1)}\}_n$ und $\{\tilde{H}_n^{(2)}\}_n$.
Daraus folgt auch direkt, dass eine analoge Konstruktion wie in obigem Satz eine T-universelle Funktion mit vorgegebenen Approximationswegen auf einem Sektorgebiet ergeben kann.

**Satz 4.1.12** *Es sei $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$, $z = te^{i\alpha}$ die Funktion*

$$\varphi(z) = \varphi(te^{i\alpha}) = te^{i(\alpha+\psi(t))} = ze^{i\psi(|z|)}.$$

*Dann ist $\varphi$ eine Funktion, die (4.20) genügt.*

**Beweis:**
**1)** Zunächst gilt für $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ und $w = \frac{|w_2|}{|w_1|} w_1 = |w_2| e^{i \arg(w_1)}$ die Ungleichung

$$|w_2 - w_1| \geq |w - w_1| \tag{4.24}$$

Wir zeigen das, indem wir $w_1$ und $w_2$ als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auffassen; das kanonische Skalarprodukt bezeichnen wir mit $(w_1, w_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |w - w_1|^2 = (|w_2| - |w_1|)^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2 - 2|w_1||w_2| \leq \\ \leq |w_1|^2 + |w_2|^2 - 2(w_1, w_2) = |w_1 - w_2|^2 \end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Gleichung nach der Definition von $w$ und die Abschätzung am Ende der ersten Zeile nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

**2)** Wir zeigen schrittweise, dass $\varphi$ die Eigenschaft (4.20) erfüllt.
**a)** Es seien zunächst $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = |z_2|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) - \varphi(z_2) = |z_1| \left(e^{i(\arg(z_1)+\psi(|z_1|))} - e^{i(\arg(z_2)+\psi(|z_2|))}\right) = \\ = |z_1| e^{i\psi(|z_1|)} \left(e^{i\arg(z_1)} - e^{i\arg(z_2)}\right). \end{aligned}$$

Also ist

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = |z_1| \left|e^{i\arg(z_1)} - e^{i\arg(z_2)}\right| = |z_1 - z_2|.$$

Da $\psi$ und damit auch $\varphi$ stetig ist, gibt es nach der letzten Abschätzung Konstanten $\delta, s, S > 0$, so dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$|z_1| < |z_2| < (1+\delta)|z_1|$$

die Funktion $\varphi$ der Abschätzung

$$s|z_1 - z_2| \leq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq S|z_1 - z_2|$$

genügt.

**b)** Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ohne Einschränkung $z_1 \neq z_2$ und $|z_2| > |z_1|$. Ist $z_1 = 0$, so gilt

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = |\varphi(z_2)| = \left||z_2| e^{i(\arg(z_2)+\psi(|z_2|))}\right| = |z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Es sei also $z_1 \neq 0$.
Ist $\frac{|z_2|}{|z_1|} < (1+\delta)$, so gilt nach **a)**

$$s|z_1 - z_2| \leq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq S|z_1 - z_2|.$$

Es sei jetzt $C = \frac{|z_2|}{|z_1|} \geq (1+\delta)$. Dann ist

$$|z_2| - |z_1| = (C-1)|z_1|$$

und

$$|z_2 - z_1| \leq |z_2| + |z_1| \leq (C+1)|z_1|.$$

Damit ist

$$|z_2| - |z_1| \geq \frac{C-1}{C+1}|z_2 - z_1|.$$

Eine kurze Untersuchung der Funktion $g(t) = \frac{t-1}{t+1}$ auf $[1+\delta, \infty)$ ergibt

$$\min\{g(t); t \geq 1+\delta\} = g(1+\delta).$$

Folglich gilt für alle $z_1, z_2$ mit $\frac{|z_2|}{|z_1|} \geq (1+\delta)$:

$$|z_2| - |z_1| \geq \frac{\delta}{2+\delta}|z_2 - z_1|.$$

Damit ist nach **1)**

$$\begin{aligned} |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| &= \left||z_1| e^{i(\arg(z_1)+\psi(|z_1|))} - |z_2| e^{i(\arg(z_2)+\psi(|z_2|))}\right| \geq \\ &\geq \left||z_2| e^{i(\arg(z_1)+\psi(|z_1|))} - |z_1| e^{i(\arg(z_1)+\psi(|z_1|))}\right| = \\ &= ||z_2| - |z_1|| = |z_2| - |z_1| \geq \frac{\delta}{2+\delta}|z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Außerdem ist $|\varphi(z_j)| = |z_j| \quad (j = 1, 2)$, und daher folgt

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \le \frac{2+\delta}{\delta}\left(|\varphi(z_1)| - |\varphi(z_2)|\right) = \frac{2+\delta}{\delta}(|z_2| - |z_1|) = \\ = \frac{2+\delta}{\delta}\,||z_2| - |z_1|| \le \frac{2+\delta}{\delta}|z_2 - z_1|$$

Setzen wir also

$$m = \min\left\{s, \frac{\delta}{2+\delta}\right\}, \quad M = \max\left\{S, \frac{2+\delta}{\delta}\right\},$$

so genügt $\varphi$ der Eigenschaft (4.20).

**Beispiel 4.1.13** Die Funktion $\psi$ aus dem obigen Satz lässt genügend Gestaltungsspielraum für allgemeine Kurvenscharen.

(1) Setzen wir $\psi(t) = t$, so ist $\{S_\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)\}$ eine Schar von Spiralen.

(2) Für $\psi(t) = \sin(t)$ ist $\{S_\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)\}$ eine Schar von Wellenlinien.

Dabei ist $\{S_\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)\}$ die Kurvenschar aus Satz 4.1.9.

### 4.1.4 Die Struktur der T-universellen Funktionen im Raum $H(\mathbb{C})$

Wir können schon alleine aus der Tatsache, dass es eine T-universelle Funktion bezüglich irgendeiner Kurvenschar gibt, schließen, dass die Menge dieser Funktionen eine im Raum $H(\mathbb{C})$ dichte $G_\delta$-Menge ist. Das Beweisverfahren hierzu stammt von Duyos Ruiz [Duy84].

**Satz 4.1.14** *Die Menge aller (etwa nach Satz 4.1.9) T-universellen ganzen Funktionen ist eine dichte $G_\delta$-Menge 2. Kategorie im Raum $(H(\mathbb{C}), d)$.*

**Beweis:**
**1)** Zunächst ist die Menge aller T-universellen Funktionen dicht in $H(\mathbb{C})$. Es sei dazu $\Phi \in H(\mathbb{C})$ T-universell im Sinne von Satz 4.1.9. Dann ist auch $\Phi_\zeta = \Phi(\cdot + \zeta)$ T-universell für beliebiges $\zeta \in \mathbb{C}$. Denn zu $K \in \mathcal{M}$, $f \in A(K)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.1.9 ein $b \in S_\alpha$ mit

$$\max_{w \in K + \{\zeta\}} |\Phi(w + b) - f(w - \zeta)| < \varepsilon.$$

Setzen wir in der letzten Beziehung $z = w - \zeta$, so gilt

$$\max_{z \in K} |\Phi_\zeta(z + b) - f(z)| < \varepsilon,$$

und damit ist auch $\Phi_\zeta$ T-universell im Sinne von Satz 4.1.9, denn $K \in \mathcal{M}$ und $f \in A(K)$ waren beliebig. Also ist nach Definition der T-Universalität die Menge $\{\Phi_\zeta; \zeta \in \mathbb{C}\}$ dicht in $H(\mathbb{C})$.

**2)** Es seien $f \in H(\mathbb{C})$, $R > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir zeigen, dass die Menge

$$M(f, \varepsilon, R) = \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \inf_{\alpha \in [0,2\pi), \zeta \in S_\alpha} \left( \max_{|z| \le R} |g(z+\zeta) - f(z)| \right) \ge \varepsilon \right\}$$

nirgends dicht in $H(\mathbb{C})$ ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe eine Funktion $F \in H(\mathbb{C})$ und ein $\delta > 0$, so dass $M(f, \varepsilon, R)$ dicht in $U_\delta(F) = \{h \in H(\mathbb{C}) : d(h, F) < \delta\}$ ist. Nach **1)** gibt es eine T-universelle Funktion $\Psi \in U_\delta(F)$. Nach unserer Annahme existiert eine Folge von Funktionen $\{\Phi_n\}_n$ aus $M(f, \varepsilon, R)$ mit $d(\Phi_n, \Psi) \to 0$. Andererseits gibt es zu festem $\alpha \in [0, 2\pi)$ ein $\xi \in S_\alpha$ mit

$$\max_{|z| \le R} |\Psi(z+\xi) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{|z| \le |\xi| + R} |\Phi_n(z) - \Psi(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \ge N).$$

Also folgt für alle $n \ge N$:

$$\begin{aligned} &\max_{|z| \le R} |\Phi_n(z+\xi) - f(z)| \le \\ &\max_{|z| \le R} |\Phi_n(z+\xi) - \Psi(z+\xi)| + \max_{|z| \le R} |\Psi(z+\xi) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\Phi_n \notin M(f, \varepsilon, R)$ – ein Widerspruch. Damit ist $M(f, \varepsilon, R)$ nirgends dicht.

**3)** Es sei $\{f_m; m \in \mathbb{N}\}$ dicht in $(H(\mathbb{C}), d)$ (etwa die Menge aller Polynome mit rationalem Real- und Imaginärteil der Koeffizienten). Die Menge der nicht T-universellen Funktionen ist darstellbar als

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} M\left(f_m, \frac{1}{k}, n\right).$$

Das ist nach **2)** eine Menge 1. Kategorie. Da $(H(\mathbb{C}), d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, ist $H(\mathbb{C})$ eine Menge 2. Kategorie und die Menge aller T-universellen Funktionen damit auch.

**4)** Wir zeigen, dass $M(f, \varepsilon, R)^c$ für $f \in H(\mathbb{C})$, $R > 0$ und $\varepsilon > 0$ eine offene

Menge in $(H(\mathbb{C}), d)$ ist. Dazu sei $g \in M(f, \varepsilon, R)^c$ gegeben. Nach Definition des Infimums existiert ein $\delta > 0$ und $\alpha^* \in [0, 2\pi)$, $\zeta^* \in S_{\alpha^*}$ mit

$$\max_{|z| \leq R} |g(z + \zeta^*) - f(z)| < \varepsilon - \delta.$$

Wir setzen

$$\tilde{U}_\delta(g) = \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \max_{|z| \leq R + |\zeta^*|} |h(z) - g(z)| < \delta \right\}.$$

Dann gilt für alle $h \in \tilde{U}_\delta(g)$:

$$\begin{aligned} &\max_{|z| \leq R} |h(z + \zeta^*) - f(z)| \leq \\ &\leq \max_{|z| \leq R} |h(z + \zeta^*) - g(z + \zeta^*)| + \max_{|z| \leq R} |g(z + \zeta^*) - f(z)| \leq \\ &\leq \max_{|z| \leq R + |\zeta^*|} |h(z) - g(z)| + \varepsilon - \delta < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{U}_\delta(g) \subset M(f, \varepsilon, R)^c$, und da nach Satz 1.1.1 ein $\eta > 0$ existiert mit $U_\eta(g) \subset \tilde{U}_\delta(g)$, ist $M(f, \varepsilon, R)^c$ für jede Wahl von $f \in H(\mathbb{C}), \varepsilon > 0, R > 0$ offen in $H(\mathbb{C})$. Daher ist nach **3)** die Menge der T-universellen Funktionen eine dichte $G_\delta$-Menge 2. Kategorie in $H(\mathbb{C})$, und der Satz ist damit bewiesen.

## 4.2 Generischer Ansatz

Zuerst definieren wir, was wir unter einer allgemeinen Kurvenschar in einem beschränkten Gebiet verstehen. Danach führen wir den speziellen Begriff des „r-Abstandes“ zwischen zwei beschränkten Kurven ein. Dieser Begriff dient lediglich zur Vereinfachung der Terminologie bei der anschließenden Beweisführung und ist gesondert nicht von Interesse. Zuletzt definieren wir noch, was wir unter einer „kontinuierlichen“ Kurvenschar verstehen wollen. Auch dieser Begriff ist nicht von eigenständigem Interesse, zumal wir in einem darauf folgenden Satz eine einfache hinreichende Bedingung für die Kontinuität einer Kurvenschar vorstellen.

**Definition 4.2.1** Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $z_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{C}$ für jedes $\alpha \in J$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

(1) $\lim\limits_{t \to \inf(I)} z_\alpha(t) = 0$ gleichmäßig bezüglich $\alpha \in J$,

(2) $\lim\limits_{t \to \sup(I)} z_\alpha(t) = \infty$,

(3) Aus $z_\alpha(s) = z_\beta(t)$ folge schon $s = t$ und $\alpha = \beta$.

Dann nennen wir die Funktionenfamilie $(z_\alpha)_{\alpha\in J}$ zusammen mit den Intervallen $I$ und $J$ eine *allgemeine Kurvenschar (von Null nach Unendlich)*. Als Bezeichnung schreiben wir kurz $\{z_\alpha; I, J\}$.

**Definition 4.2.2** Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $z_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{C}$ für jedes $\alpha \in J$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

(1) $\lim_{t\to\inf(I)} z_\alpha(t) = z_0 \in \mathbb{D}$ gleichmäßig bezüglich $\alpha \in J$,

(2) $\lim_{t\to\sup(I)} z_\alpha(t) \in \partial\mathbb{D}$,

(3) aus $z_\alpha(s) = z_\beta(t)$ folge schon $s = t$ und $\alpha = \beta$.

Dabei ist das $z_0 \in \mathbb{D}$ in (1) für jedes $\alpha \in J$ dasselbe.
Dann nennen wir die Funktionenfamilie $(z_\alpha)_{\alpha\in J}$ zusammen mit den Intervallen $I$ und $J$ eine *allgemeine Kurvenschar (im Einheitskreis $\mathbb{D}$)*. Als Bezeichnung schreiben wir kurz $\{z_\alpha; I, J\}$.

**Bemerkung 4.2.3** Die Bedingung (3) in obiger Definition ist notwendig, damit sich die Kurven innerhalb der Kurvenschar nicht überschneiden. Das stellt eine notwendige Bedingung dar, damit überhaupt universelle Funktionen bezüglich einer solchen Kurvenschar existieren können, siehe etwa [Ten00], Beispiel 4.1.2.

**Definition 4.2.4** Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x, y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige beschränkte Funktionen. Wir setzen $C_x = x(I)$ und $C_y = y(I)$ und definieren den *r-Abstand zwischen $C_x$ und $C_y$* als

$$\text{r-dist}(C_x, C_y) = \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|.$$

**Definition 4.2.5** Eine Kurvenschar $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ von Kurven von Null nach Unendlich heißt *kontinuierlich*, falls eine höchstens abzählbare Teilmenge $\tilde{J} \subset J$ existiert, so dass für alle $\delta > 0, \alpha \in J$ und $j \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{\alpha} \in \tilde{J}$ existiert, mit dem gilt:

$$\text{r-dist}(z_\alpha(I) \cap \{z : |z| \leq j\}, z_{\tilde{\alpha}}(I) \cap \{z : |z| \leq j\}) < \delta.$$

**Bemerkung 4.2.6** Es ist klar, dass eine kontinuierliche Kurvenschar von Null nach Unendlich weiterhin kontinuierlich bleibt, falls sie auf ein beschränktes Gebiet eingeschränkt wird.

**Satz 4.2.7** *Es sei $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ eine allgemeine Kurvenschar von Null nach Unendlich derart, dass die Abbildung $(\beta, t) \mapsto z_\beta(t)$ auf $J \times I$ stetig ist. Dann ist $\mathcal{C}$ kontinuierlich.*

**Beweis:**
Wir setzen $\tilde{J} = (J \cap \mathbb{Q}) \cup (\partial J \cap J)$. Dann ist $\tilde{J}$ abzählbar.
Es seien $\delta > 0, \alpha \in J, j \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir setzen ohne Einschränkung voraus, dass $\delta < 1$ ist.
In Abhängigkeit von der Art des Intervalls $I$ setzen wir für ein $M \in \mathbb{N}$:

$$I_M = \begin{cases} \big(\inf(I), \inf(I) + \frac{1}{M}\big) & \text{falls} \inf(I) \in (-\infty, \infty), I \text{ links offen} \\ (-\infty, -M) & \text{falls} \inf(I) = -\infty \\ \big[\inf(I), \inf(I) + \frac{1}{M}\big) & \text{falls} \inf(I) = \min(I). \end{cases}$$

Nach Voraussetzung (beachte, dass die Konvergenz gegen Null gleichmäßig bezüglich $J$ ist) können wir $M \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\sup\left\{|z_\beta(t)|; t \in I_M, |\beta - \alpha| \leq \frac{1}{M}\right\} < \frac{\delta}{2}$$

gilt. Dieses $M$ halten wir fest. Ferner definieren wir

$$t_\alpha = \sup\left\{t \in I : |z_\beta(t)| < 2j \text{ für alle } \beta \text{ mit } |\beta - \alpha| \leq \frac{1}{M}\right\}.$$

Nach Voraussetzung und der Eigenschaft, dass die Kurve $z_\alpha(I)$ von Null nach Unendlich geht, ist $t_\alpha \in (\sup(I_M), \sup(I))$. Mit dieser Zahl setzen wir $I_\alpha = [\sup(I_M), t_\alpha]$.
Da wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $\alpha \notin \partial J$ ist (sonst könnten wir einfach $\tilde{\alpha} = \alpha$ wählen und wären fertig), gibt es ein $\eta \in \big(0, \frac{1}{M}\big)$ mit $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset J$.
Nun ist $(\beta, t) \mapsto z_\beta(t)$ nach Voraussetzung stetig und daher auf dem Kompaktum $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \times I_\alpha$ gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\varepsilon \in \big(0, \frac{1}{M}\big)$, so dass $|z_\beta(s) - z_\gamma(t)| < \frac{2\delta}{3}$ für alle $\beta, \gamma \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta],\ s, t \in I_\alpha$ mit $|\beta - \gamma| < \varepsilon$ und $|s - t| < \varepsilon$ gilt. Insbesondere gilt

$$|z_\alpha(t) - z_\beta(t)| < \frac{2\delta}{3} \text{ für alle } \beta \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), t \in I_\alpha.$$

Wählen wir also ein $\tilde{\alpha} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, so ist $\tilde{\alpha} \in \tilde{J}$ und es gilt

$$\max_{t \in I_\alpha} |z_\alpha(t) - z_{\tilde{\alpha}}(t)| \leq \frac{2\delta}{3} < \delta$$

sowie nach der Definition von $I_M$

$$\max_{t \in I_M} |z_\alpha(t) - z_{\tilde{\alpha}}(t)| \leq \max_{t \in I_M} |z_\alpha(t)| + \max_{t \in I_M} |z_{\tilde{\alpha}}(t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ferner gilt nach der Definition von $I_\alpha$ und $I_M$:

$$\tilde{I} = z_\alpha^{-1}(\{z : |z| \leq j\}) \cup z_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\{z : |z| \leq j\}) \subset I_M \cup I_\alpha.$$

Das bedeutet also nach den letzten beiden Abschätzungen

$$\max_{t \in \tilde{I}} |z_\alpha(t) - z_{\tilde{\alpha}}(t)| < \delta,$$

und das heißt gerade

$$\text{r-dist}(z_\alpha(I) \cap \{z : |z| \le j\}, z_{\tilde{\alpha}}(I) \cap \{z : |z| \le j\}) < \delta,$$

was zu beweisen war.

### 4.2.1 T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen im Einheitskreis

Für die folgende Beweisführung legen wir noch einige abkürzende Bezeichnungen fest. Es sei zunächst $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ eine kontinuierliche Kurvenschar im Einheitskreis $\mathbb{D}$.
Nun können wir die Klasse von Funktionen definieren, von der wir beweisen werden, dass sie nichtleer ist und darüber hinaus eine dichte $G_\delta$-Menge im Raum der auf dem Einheitskreis holomorphen Funktionen bildet.

**Definition 4.2.8** Die Menge aller Funktionen $f \in H(\mathbb{D})$ mit der folgenden Eigenschaft heißt *Klasse der T-universellen Funktionen bezüglich der Kurvenschar* $\mathcal{C}$ in $\mathbb{D}$ und wird mit $\mathcal{U}_\mathcal{C}(\mathbb{D})$ bezeichnet:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, jede Funktion $g \in A(K)$, jeden Parameter $\gamma \in J$ (der eine Kurve $C_\gamma \in \mathcal{C}$ definiert) und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Familien von Zahlen $(a_\delta)_{\delta \in (0,1)}$ und $(b_\delta)_{\delta \in (0,1)}$ mit $a_\delta \in (0,1)$ und $b_\delta \in U_\delta(C_\gamma)$, so dass für alle $\delta \in (0,1)$

$$\max_{z \in K} |f(a_\delta z + b_\delta) - g(z)| < \varepsilon, \quad |b_\delta - \zeta_0| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Dabei ist $\zeta_0 = \lim\limits_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t)$.

**Satz 4.2.9** *Es sei $\mathcal{C}$ eine kontinuierliche Kurvenschar im Einheitskreis. Dann ist die Menge $\mathcal{U}_\mathcal{C}(\mathbb{D})$ der T-universellen Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen im Einheitskreis eine in $H(\mathbb{D})$ dichte $G_\delta-$Menge.*

**Beweis:**
Zuerst definieren wir einige Mengen zur Abkürzung.

(1) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $L_m = \{z : |z| \le m\}$.

(2) Es sei $\{p_j\}_j$ eine Folge von Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

(3) Da $\mathcal{C}$ kontinuierlich ist, können wir eine Menge $\{C_p; p \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ wählen, so dass für jedes $\gamma \in J$ und jedes $\delta > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\text{r-dist}(C_p, C_\gamma) < \delta.$$

(4) Für $p \in \mathbb{N}$ werde mit $\zeta_p$ der Endpunkt bzw. Grenzpunkt von $C_p$ auf $\partial\mathbb{D}$ bezeichnet.

(5) Für $p \in \mathbb{N}$ sei $\{b_{np}\}_n$ eine in $C_p$ dichte Punktfolge.

(6) Die Folge $\{a_k\}_k$ sei eine Folge positiver Zahlen, die in $(0,1)$ dicht liegt.

Für $m, j, p, s, t, k, n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n) = \Big\{g \in H(\mathbb{D}) : \max_{z \in L_m} |g(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \frac{1}{s};$$
$$|b_{np} - \zeta_p| < \frac{1}{t}\Big\}.$$

**1) Darstellung von $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathbb{D})$**
Es gilt die Gleichung

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathbb{D}) = \bigcap_{m,j,p,s,t=1}^{\infty} \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n). \tag{4.25}$$

Es sei $f$ ein Element der rechten Seite von (4.25) und es seien $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $g \in A(K)$, $\gamma \in J$, $\varepsilon > 0$ und $\delta \in (0,1)$ gegeben. Wir können ohne Einschränkung $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ annehmen. Zuerst setzen wir

$$\zeta_0 = \lim_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t) \text{ und } C = z_\gamma(I).$$

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset L_m$ gilt. Ferner existieren $s, t \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Ferner finden wir nach dem Satz von Mergelyan ein $j \in \mathbb{N}$, das Folgendes erfüllt:

$$\max_K |p_j(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu $\gamma \in J$ können wir ein $p \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$\text{r-dist}(C_p, C_\gamma) < \delta.$$

Nach den Eigenschaften der Menge auf der rechten Seite von (4.25) existieren $n, k \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad |b_{np} - \zeta_p| < \frac{1}{t}.$$

Damit gilt

$$|b_{np} - \zeta_0| \leq |b_{np} - \zeta_p| + |\zeta_p - \zeta_0| < \frac{1}{t} + \delta < \varepsilon$$

und

$$\max_K |f(a_k z + b_{np}) - g(z)| \leq$$

$$\leq \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| + \max_K |p_j(z) - g(z)| < \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ferner ist $b_{np} \in U_\delta(C_\gamma)$, und damit ist $f \in \mathcal{U}_\mathcal{C}(\mathbb{D})$. Damit folgt, dass die Menge auf der rechten Seite von (4.25) Teilmenge der Menge auf der linken Seite ist.

Es sei nun $f$ ein Element der linken Seite von (4.25) und $m, j, p, s, t \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann existieren nach Voraussetzung Folgen $\{a'_h\}_h$ aus $(0, 1)$ und $\{b_h\}_h$ aus $\mathbb{D}$ mit $b_h \in U_{\frac{1}{h}}(C_p)$, so dass

$$\max_{L_m} |f(a'_h z + b_h) - p_j(z)| < \frac{1}{2s}, \; |b_h - \zeta_p| < \frac{1}{2t}.$$

Für $h \in \mathbb{N}$ setzen wir $d_h = \operatorname{dist}(a'_h L_m + b_h, \partial\mathbb{D}) > 0$ und

$$K_{m,h} = \overline{U_{\frac{d_h}{2}}(a'_h L_m + b_h)},$$

so ist $K_{m,h}$ für alle $h \in \mathbb{N}$ ein Kompaktum in $\mathbb{D}$. Da $f$ auf diesem Kompaktum gleichmäßig stetig ist, existiert für alle $h \in \mathbb{N}$ ein $\delta_h \in (0, \frac{d_h}{2})$, so dass $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{1}{2s}$ für alle $z_1, z_2 \in K_{m,h}$, $|z_1 - z_2| < \delta_h$.
Da $\{a_k\}_k$ in $(0, 1)$ dicht ist und $\{b_{np}\}_n$ auf $C_p$ dicht ist, gibt es für ein genügend großes festes $H \in \mathbb{N}$ Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a'_H| < \frac{\delta_H}{2m}$ und $|b_{np} - b_H| < \min\left\{\frac{\delta_H}{2}, \frac{1}{2t}\right\}$. Damit ist dann für alle $z \in L_m$:
$|a_k z + b_{np} - (a'_H z + b_H)| < \delta_H$, also auch $a_k L_m + b_{np} \subset K_{m,H}$, und daher gilt:

$$\max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| \leq$$

$$\leq \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - f(a'_H z + b_H)| + \max_{L_m} |f(a'_H z + b_H) - p_j(z)| < \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{s}$$

Schließlich ist $|b_{np} - \zeta_p| \leq |b_{np} - b_H| + |b_H - \zeta_p| < \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{t}$ und damit ist die Menge auf der linken Seite von (4.25) Teilmenge der Menge auf der rechten Seite. Also gilt die Beziehung (4.25).

**2)**

$$\text{Für alle } m, j, p, s, t \in \mathbb{N} \text{ ist } \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \mathcal{O}_\mathcal{C}(m, j, p, s, t, k, n) \text{ dicht in } H(\mathbb{D}). \qquad (4.26)$$

Es seien $m, j, p, s, t \in \mathbb{N}$ fest und $f \in H(\mathbb{D})$, ein Kompaktum $K \subset \mathbb{D}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.
Zunächst existiert ein $B \supset K$ mit $B \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Da $B$ auch eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(\zeta_p) \cap B = \varnothing$. Da $C_p$ eine Kurve ist, die auf der Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ endet und $\{a_k\}_k$ in $(0,1)$ dicht ist, können wir Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $|b_{np} - \zeta_p| < \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{\delta}{2}\right\}$ und $0 < a_k < \frac{\delta}{2m}$ gilt. Die Beziehung $b_{np} \in C_p$ gilt ohnehin.
Also haben wir für alle $z \in L_m$:

$$|a_k z + b_{np} - \zeta_p| \leq a_k|z| + |b_{np} - \zeta_p| < \frac{\delta}{2m}m + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

und damit

$$a_k L_m + b_{np} \subset U_\delta(\zeta_p) \subset B^c.$$

Nach dem Satz von Runge über polynomiale Approximation gibt es daher ein Polynom $p$ mit

$$\max_B |p(z) - f(z)| < \varepsilon,$$
$$\max_{L_m} |p(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Damit ist $p$ „nahe“ an $f$, es ist $p \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(m, j, p, s, t, k, n)$, und das beweist (4.26).

**3)**

$$\text{Für alle } m, j, p, s, t, k, n \in \mathbb{N} \text{ ist } \mathcal{O}_\mathcal{C}(m, j, p, s, t, k, n) \text{ offen in } H(\mathbb{D}). \tag{4.27}$$

Es seien $m, j, p, s, t, k, n \in \mathbb{N}$ fest und $f \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(m, j, p, s, t, k, n)$. Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{s} - \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| > 0$$

und definieren damit

$$\tilde{U}_\delta(f) = \left\{ g \in H(\mathbb{D}) : \max_{L_m} |g(a_k z + b_{np}) - f(a_k z + b_{np})| < \delta \right\}.$$

Es gilt für alle $g \in \tilde{U}_\delta(f)$:

$$\begin{aligned}
&\max_{L_m} |g(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| \leq \\
\leq &\max_{L_m} |g(a_k z + b_{np}) - f(a_k z + b_{np})| + \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \\
< &\frac{1}{s} - \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| + \max_{L_m} |f(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| = \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{U}_\delta(f)$ ganz in $\mathcal{O}_\mathcal{C}(m,j,p,s,t,l,k,n)$ enthalten. Nach Satz 1.1.1 gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) = \{h \in H(\mathbb{D}) : d(h,f) < \varepsilon\} \subset \tilde{U}_\delta(f)$. Da $f$ beliebig war, folgt (4.27).

Zusammenfassend gilt also: Nach (4.25) und (4.27) ist $\mathcal{U}_\mathcal{C}(\mathbb{D})$ eine $G_\delta$-Menge in $H(\mathbb{D})$. Da nach (4.26) die Menge

$$\bigcup_{k,n=1}^{\infty} \mathcal{O}_\mathcal{C}(m,j,p,s,t,k,n)$$

für alle $m,j,p,s,t \in \mathbb{N}$ dicht in $H(\mathbb{D})$ liegt, so folgt mit dem Satz von Baire und nochmaliger Anwendung von (4.27), dass $\mathcal{U}_\mathcal{C}(\mathbb{D})$ dicht in $H(\mathbb{D})$ liegt.

**Bemerkung 4.2.10** Es sei $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ eine höchstens abzählbare Kurvenschar, d.h. die parametrisierende Menge $J$ ist nicht ein Intervall, sondern eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dann kann nach der obigen Beweisführung die Definition einer universellen Funktion noch verschärft werden:
Die Menge aller Funktionen $f \in H(\mathbb{D})$ mit folgender Eigenschaft heißt *Menge der T-universellen Funktionen bezüglich der Kurvenschar $\mathcal{C}$ in $\mathbb{D}$*:
Für alle $K \in \mathcal{M}$, $g \in A(K)$, jeden Parameter $\gamma \in J$ (der eine Kurve $C_\gamma \in \mathcal{C}$ definiert) und jedes $\varepsilon > 0$ existieren Zahlen $a \in (0,1)$ und $b \in C_\gamma$ mit

$$\max_K |f(az+b) - g(z)| < \varepsilon \quad |b - \zeta_0| < \varepsilon,$$
$$\text{wobei } \zeta_0 = \lim_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t) \text{ ist.}$$

Das bedeutet also, dass die Menge dieser Funktionen eine dichte $G_\delta$-Menge in $H(\mathbb{D})$ ist.

Denn im Beweis des vorigen Satzes ist dann $\{C_p; p \in \mathbb{N}\}$ identisch mit der Kurvenschar $\mathcal{C}$ selbst.

### 4.2.2 T-universelle Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen auf beschränkten Gebieten

Wir können die im vorigen Abschnitt angegebenen Ergebnisse auch auf beschränkte Gebiete übertragen. Die Beweisführung bleibt fast wörtlich dieselbe, lediglich bei einem Ergebnis benötigen wir eine leichte Abwandlung.
Zunächst definieren wir analog zum Einheitskreis, was wir unter einer allgemeinen Kurvenschar in einem beschränkten Gebiet verstehen.

**Definition 4.2.11** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $z_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{C}$ für jedes $\alpha \in J$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

(1) $\lim_{t\to\inf(I)} z_\alpha(t) = z_0 \in G$ gleichmäßig bezüglich $\alpha \in J$,

(2) $\lim_{t\to\sup(I)} z_\alpha(t) \in \partial G$,

(3) Aus $z_\alpha(s) = z_\beta(t)$ folge schon $s = t$ und $\alpha = \beta$.

Dabei ist das $z_0 \in G$ in (1) für jedes $\alpha \in J$ dasselbe.
Dann nennen wir die Funktionenfamilie $(z_\alpha)_{\alpha\in J}$ zusammen mit den Intervallen $I$ und $J$ eine *allgemeine Kurvenschar (im Gebiet $G$)*. Als Bezeichnung schreiben wir kurz $\{z_\alpha; I, J\}$.

**Definition 4.2.12** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $\{z_\alpha; I, J\}$ eine allgemeine Kurvenschar in $G$. Die Menge aller Funktionen $f \in H(G)$ mit folgender Eigenschaft heißt *Menge der T-universellen Funktionen bezüglich der Kurvenschar $\mathcal{C}$ in $G$* und wird mit $\mathcal{U}_\mathcal{C}(G)$ bezeichnet:
Zu jedem $K \in \mathcal{M}$, jedem $g \in A(K)$, jedem Parameter $\gamma \in J$ (der eine Kurve $C_\gamma \in \mathcal{C}$ definiert) und beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren Familien von Punkten $(a_\delta)_{\delta\in(0,1)}$ und $(b_\delta)_{\delta\in(0,1)}$ mit

$$\begin{aligned} &a_\delta \in (0,1) \text{ und } b_\delta \in U_\delta(C_\gamma) && (\delta \in (0,1)),\\ &\max_K |f(a_\delta z + b_\delta) - g(z)| < \varepsilon \text{ sowie } |b_\delta - \zeta_0| < \varepsilon && (\delta \in (0,1)). \end{aligned}$$

Dabei ist $\zeta_0 = \lim_{t\to\sup(I)} z_\gamma(t)$.

**Satz 4.2.13** *Es sei $G$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I, J\}$ ein allgemeine kontinuierliche Kurvenschar in $G$.*
*Die Menge $\mathcal{U}_\mathcal{C}(G)$ aller T-universellen Funktionen bezüglich $\mathcal{C}$ in $G$ ist eine dichte $G_\delta$-Menge im Raum $H(G)$ aller auf $G$ holomorphen Funktionen.*

**Beweis:**

Zunächst benötigen wir eine ganze Reihe von Definitionen:

(1) Wir setzen $L_m = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq m\}$ für $m \in \mathbb{N}$.

(2) Es sei $\{p_j\}_j$ eine Abzählung aller Polynome mit rationalem Real- und Imaginärteil der Koeffizienten.

(3) Da $\mathcal{C}$ eine kontinuierliche Kurvenschar ist, können wir eine Menge von Kurven $\{C_p; p \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ wählen mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\gamma \in J$ und jedem $\delta > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\text{r-dist}(C_p, C_\gamma) < \delta.$$

(4) Für $p \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_p$ der Endpunkt bzw. Grenzpunkt von $C_p$ auf $\partial G$.

(5) Für $p \in \mathbb{N}$ sei $\{b_{np}\}_n$ eine in $C_p$ dichte Punktfolge.

(6) Es sei $\{a_k\}_k$ eine Folge reeller Zahlen, die in $(0,1)$ dicht ist.

Ferner definieren wir für $m, j, p, s, t, k, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n) = \Big\{ g \in H(G) : \max_{L_m} |g(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \frac{1}{s}, \\ |b_{np} - \zeta_p| < \frac{1}{t} \Big\}.$$

**1)** Es gilt folgende Beziehung:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G) = \bigcap_{m,j,p,s,t=1}^{\infty} \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n). \tag{4.28}$$

Das wird vollkommen analog zu (4.25) bewiesen.

**2)**

$$\text{Für alle } m,j,p,s,t \in \mathbb{N} \text{ ist } \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n) \text{ dicht in } H(G). \tag{4.29}$$

Es seien Zahlen $m, j, p, s, t \in \mathbb{N}$, eine Funktion $f \in H(G)$, ein Kompaktum $K \subset G$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben.
Da $K$ kompakt ist, können wir ein $\delta > 0$ wählen mit $U_\delta(\zeta_p) \cap K = \varnothing$. Wir wählen dann $k, n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|b_{np} - \zeta_p| < \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{\delta}{2}\right\}, \quad 0 < a_k < \frac{\delta}{2m}.$$

Dann haben wir für alle $z \in L_m$:

$$|a_k z + b_{np} - \zeta_p| \le |a_k||z| + |b_{np} - \zeta_p| < \frac{\delta}{2m} m + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Also ist $a_k L_m + b_{np} \subset U_\delta(\zeta_p) \subset K^c$.
Nach dem Satz von Runge über rationale Approximation existiert eine rationale Funktion $R$ mit Polen höchstens in $\partial G$, die Folgendes leistet:

$$\max_K |R(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

$$\max_{L_m} |R(a_k z + b_{np}) - p_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Da insbesondere $R \in H(G)$ gilt, folgt $R \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n)$, und (4.29) ist bewiesen.

**3)**

$$\text{Für alle } m,j,p,s,t,k,n \in \mathbb{N} \text{ ist } \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(m,j,p,s,t,k,n) \text{ offen in } H(G). \tag{4.30}$$

Auch der Beweis hierzu verläuft genauso wie der Beweis von (4.27).

Mit Hilfe von **1) - 3)** und des Kategoriesatzes von Baire folgt die Behauptung von Satz 4.2.13.

**Bemerkung 4.2.14** Auch hier kann in Analogie zum vorigen Abschnitt der Satz 4.2.13 verschärft werden, wenn eine höchstens abzählbare Kurvenschar $\mathcal{C}$ vorliegt. D.h. die Menge aller Funktionen $f \in H(G)$ mit folgender Eigenschaft ist eine dichte $G_\delta$-Menge im Raum $H(G)$:
Für jedes Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jede Funktion $g \in A(K)$, jeden Parameter $\gamma \in J$ (der eine Kurve $C_\gamma \in \mathcal{C}$ definiert) und jedes $\varepsilon > 0$ können wir Punkte $a \in (0,1)$ und $b \in C_\gamma$ wählen mit

$$\max_K |f(az+b) - g(z)| < \varepsilon \text{ und } |b - \zeta_0| < \varepsilon.$$

Dabei ist $\zeta_0 = \lim_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t)$.

**Satz 4.2.15** *Jede Funktion $f \in H(G)$ kann als Summe zweier Funktionen aus $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ geschrieben werden.*

Der folgende **Beweis** stammt von J.-P. Kahane [Kah83].
Es sei eine Funktion $f \in H(G)$ gegeben. Die Abbildung

$$T_f(g) : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),\ T_f(g) = g + f \quad (g \in H(\mathbb{C}))$$

ist ein Homöomorphismus.
Da die Menge $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ eine dichte $G_\delta$-Menge in $H(G)$ ist, gilt dasselbe für

$$T_f(\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)) = \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G) + f.$$

Nach dem Baireschen Kategoriesatz haben wir also

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G) \cap (\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G) + f) \neq \varnothing.$$

Also existieren $g, h \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ mit $f = g - h$. Wegen $-h \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ folgt die Behauptung.

**Bemerkung 4.2.16** Auch hier haben wir es mit zwei verschiedenen Begriffen von Universalität zu tun, der Definition von $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ aus diesem Abschnitt und der Definition, die sich aus der Eigenschaften der Funktionen aus den Sätzen 4.1.2, 4.1.4 und 4.1.9 (konstruktiv bewiesen) ergibt. Bezüglich dieser Sätze erinnern wir daran, dass speziell für den Einheitskreis eine Funktion $\Phi \in H(\mathbb{D})$ T-universell bezüglich einer Kurvenschar $(S_\alpha)_\alpha$ im Einheitskreis ist, falls Folgendes gilt:
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathcal{M}$, jeder Funktion $g \in A(K)$, jedem Index $\alpha \in [0, 2\pi)$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen $a \in (0, \varepsilon)$ und $b \in S_\alpha$ mit

$$|b - \zeta_\alpha| < \varepsilon, \quad \max_{z \in K} |\Phi(az + b) - g(z)| < \varepsilon.$$

Dabei ist $\zeta_\alpha$ der Grenzpunkt von $S_\alpha$ auf $\partial\mathbb{D}$.

Die letztere Definition ist offensichtlich stärker, da bei der Definition im generischen Ansatz lediglich verlangt wurde, dass in $\Phi(az + b)$ der Punkt $b$ in einer beliebig kleinen **Umgebung** einer Kurve liegt und nicht auf der Kurve.
Gehen wir zu höchstens abzählbaren Kurvenscharen über, so stimmen die Definitionen nach Bemerkung 4.2.14 fast überein. Lediglich bei den nach der konstruktiven Methode bewiesenen Sätzen wurde in „$\Phi(a_n z + b_n)$“ noch verlangt, dass $\{a_n\}_n$ gegen Null konvergiert. Dem gegenüber musste bei der Definition von $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ in „$f(az + b)$“ lediglich $a \in (0, 1)$ gelten. Ist aber in der Definition von $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(G)$ für $K \in \mathcal{M}$ das Innere von $K$ nichtleer, so stimmen auch hier die beiden Definitionen überein, da dann in „$f(az+b)$“ die Zahl $a$ gegen Null streben muss, wenn $b$ gegen einen Randpunkt des betrachteten Gebietes konvergiert.

Um dies zu zeigen, sei $f \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathbb{D})$ für eine Kurvenschar $\mathcal{C} = \{z_\alpha; I; J\}$ im Einheitskreis. Es seien ein Kompaktum $K \in \mathcal{M}$ mit nichtleerem Inneren, eine Funktion $g \in A(K)$ und ein Parameter $\gamma \in J$ gegeben. Wir setzen $\zeta_0 = \lim_{t \to \sup(I)} z_\gamma(t)$ und $C = z_\gamma(I)$. Nach Satz 4.2.9 existieren dann Zahlenfolgen $\{a_n\}_n$ und $\{b_n\}_n$ mit $a_n \in (0, 1)$ und $b_n \in U_{\frac{1}{n}}(C)$ mit $|b_n - \zeta_0| < \frac{1}{n}$ sowie

$$\max_{z \in K} |f(a_n z + b_n) - g(z)| < 1.$$

Wir nehmen an, dass $\{a_n\}_n$ nicht gegen Null konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_k$ und ein $\delta > 0$, so dass $|a_{n_k}| \geq \delta$ ist für $k \in \mathbb{N}$. Wegen $K^o \neq \varnothing$ existieren ein Punkt $z_0 \in K$ und eine Zahl $\eta > 0$ mit $U_\eta(z_0) \subset K$. Nun ist zum einen

$$a_n K + b_n \subset \mathbb{D} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zum anderen ist für $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n_k} U_\eta(z_0) + b_{n_k} \supset U_{\delta\eta}(z_0) + b_{n_k},$$

und da $\{b_{n_k}\}_k$ gegen $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ konvergiert, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_{n_k} U_{\delta\eta}(z_0) + b_{n_k}$$

für $k \geq k_0$ Punkte außerhalb von $\mathbb{D}$ hat, womit auch $a_{n_k}K + b_{n_k}$ Punkte außerhalb von $\mathbb{D}$ hat – ein Widerspruch. Also muss $\{a_n\}_n$ gegen Null konvergieren.
Das zeigt, dass die zwei verschiedenen Begriffe der T-Universalität hier für **abzählbare Kurvenscharen** und zu approximierende Funktionen auf Kompakta mit **nichtleerem** Inneren übereinstimmen.

# Literaturverzeichnis


[Bir29] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème sur les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[BR84] C. Blair and L.A. Rubel, *A Triply Universal Entire Function*, Enseign. Math. **30** (1984), 269–274.

[CNP02] G. Costakis, V. Nestoridis, and I. Papadoperakis, *Universal Laurent Series*, submitted, 2002.

[Cos00] G. Costakis, *Some Remarks on Universal Functions and Taylor Series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000), 157–175.

[CP71] K.C. Chui and M.N. Parnes, *Approximation by Overconvergence of a Power Series*, J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 693–696.

[Cur72] J.H. Curtiss, *Faber Polynomials and the Faber Series*, Amer. Math. Monthly **79/4** (1972), 577–596.

[Dod90] L.K. Dodunova, *A Generalization of the Universality Property of Series in Faber Polynomials*, Izv. VUZ Matematika **34** (1990), no. 12, 31–34.

[Duy83] S.M. Duyos Ruiz, *On the Existence of Universal Functions (Russisch)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), 18–22, Übersetzung in: Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 9-13.

[Duy84] ———, *Universal Functions and the Structure of the Space of Entire Functions (Russisch)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **279** (1984), 792–795, Übersetzung in: Soviet Math. Dokl. **30** (1984), 713-716.

[Gai80] D. Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser Verlag, 1980.

[GE87] K.-G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Seminar Giessen **176** (1987).

[GE99] ______, *Universal Families and Hypercyclic Operators*, Bull. Amer. Math. Soc **36** (1999), 345–381.

[GLM00] W. Gehlen, W. Luh, and J. Müller, *On the Existence of O-universal Functions*, Complex Variables **41** (2000), 81–90.

[Kah83] J.-P. Kahane, *Sur la structure circulaire des ensembles de points limites des sommes partielles d'une série de Taylor*, Acta Sci Math. (Szeged) **45** (1983), no. 1-4, 247–251.

[KNP01] E. Katsoprinakis, V. Nestoridis, and I. Papadoperakis, *Universal Faber Series*, Analysis **21** (2001), 339–363.

[LMM98a] W. Luh, V.A. Martirosian, and J. Müller, *T-universal Functions with Lacunary Power Series*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **64** (1998), 67–79.

[LMM98b] ______, *Universal Entire Functions with Gap Power Series*, Indag. Mathem. **9** (1998), no. 4, 529–539.

[LMM02] ______, *Restricted T-universal Functions*, J. Approx. Theory **114** (2002), 201–213.

[Lor53] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Mathematical Expositions, no. 8, University of Toronto Press, 1953.

[LT76] W. Luh and R. Trautner, *Summierbarkeit der geometrischen Reihe auf vorgeschriebenen Mengen*, manuscripta math. **18** (1976), 317–326.

[Luh70] W. Luh, *Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten*, Mitt. Math. Seminar Gießen **88** (1970).

[Luh76] ______, *On Universal Functions*, Coll. Math. Soc. János Bolyai **19** (1976), 503–511.

[Luh79] ______, *Über Cluster Sets analytischer Funktionen*, Acta Math. Hung. **33** (1979), no. 1-2, 137–142.

[Luh86a] ______, *Approximation by Antiderivatives*, Constr. Approx. **2** (1986), 179–187.

[Luh86b] ______, *Universal Approximation Properties of Overconvergent Power Series on Open Sets*, Analysis **6** (1986), 191–207.

[Luh88] ______, *Holomorphic Monsters*, J. Approx. Theory **53** (1988), 128–144.

[Mac52] G.R. MacLane, *Sequences of Derivatives and Normal Families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72–87.

[Mel01] A.D. Melas, *Universal Functions on Nonsimply Connected Domains*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **51** (2001), no. 6, 1539–1551.

[MV03] D. Mayenberger and V. Vlachou, *Construction of a Universal Laurent Series*, submitted, 2003.

[Nes96] V. Nestoridis, *Universal Taylor Series*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **46** (1996), 1293–1306.

[Rud87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3 ed., McGraw Hill, 1987.

[SL68] V.I. Smirnov and N.A. Lebedev, *Functions of a Complex Variable - Constructive Theory*, M.I.T. Press, 1968.

[SW41] W. Seidel and J.L. Walsh, *On Approximation by Euclidean and Noneucledian Translations of an Analytic Function*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 916–920.

[Ten00] R. Tenthoff, *Universelle holomorphe Funktionen mit vorgegebenen Approximationswegen*, Shaker Verlag, Aachen, 2000.

[Vla02a] V. Vlachou, *Coincidence of Two Classes of Universal Laurent Series*, Complex Variables **47** (2002), no. 11, 1045–1053.

[Vla02b] ———, *On Some Classes of Universal Functions*, Analysis **22** (2002), 149–161.

[Vla02c] ———, *A Universal Taylor Series in the Doubly Connected Domain* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, Complex Variables **47** (2002), no. 2, 123–129.

# Tabellarischer Bildungsgang des Verfassers

| | |
|---|---|
| 1982-1986 | Grundschule Bad Breisig und Niederzissen |
| 1986-1995 | Kurfürst-Salentin-Gymnasium Andernach, Abitur 1995 |
| 1995-1996 | Wehrdienst |
| 1996-1998 | Grundstudium in Wirtschaftsmathematik an der Universität Trier |
| 1998-1999 | Auslandsstudium in Mathematik an der Staatlichen Universität St. Petersburg |
| 1999-2002 | Hauptstudium in Angewandter Mathematik an der Universität Trier, Diplom April 2002 |
| 01.04.2005 | Universität Trier, mündliche Doktorprüfung |