Konstruktion universeller Funktionen mit zusätzlichen Eigenschaften

Markus Nieß

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

im Fachbereich IV der Universität Trier

Trier, im Januar 2006

Für die grundlegenden Anregungen und zahlreichen vielfältigen Hinweise zu dieser Arbeit danke ich dem Betreuer meiner Promotion, Prof. Dr. Wolfgang Luh, sehr herzlich. Ebenso gilt mein Dank Prof. Dr. Wolfgang Gawronski für die freundliche Übernahme des Koreferats. Besonders danke ich beiden für ihre besondere Unterstützung meines Promotionsvorhaben, die stets optimal und vorbildlich war.

Trier, im Februar 2006 Markus Nieß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Das Ziel dieses ersten Kapitels ist es, die Fragestellungen, welche dieser Arbeit zugrunde liegen, zu erörtern und sie in einen Zusammenhang mit bestehenden Ergebnissen zu stellen. Diese Arbeit selbst ist in ihrer Gesamtheit der mathematischen Disziplin *Funktionentheorie* und der dortigen Teildisziplin *Approximationstheorie* zuzuordnen, und wir beschäftigen uns mit der Konstruktion holomorpher Funktionen mit sogenannten *universellen* Eigenschaften.

1.1 Notationen

Bevor wir uns jedoch dem Stand der Forschung auf diesem Gebiet nähern, führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein, die wir sogleich bei der Formulierung der wesentlichen Grundergebnisse vorteilhaft verwenden können.

Definition 1.1. *Wir bezeichnen mit*

$$\mathfrak{M} := \{K \subset \mathbb{C} : K \text{ kompakt}, K^c \text{ zusammenhängend}\}$$

die sogenannte „Mergelian-Familie“*. Jedes Element der Mergelian-Familie nennen wir auch eine* Mergelian-Menge.

Definition 1.2. *Für eine Teilmenge M von $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit M° das Innere von M. Ferner setzen wir:*

$$\begin{aligned} C(M) &:= \{f : f \text{ ist stetig auf } M\}, \\ H(M) &:= \{f : f \text{ ist holomorph auf } M\}, \\ A(M) &:= C(M) \cap H(M^\circ). \end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir auf dem Funktionenraum $A(M)$ für eine beliebige Menge M die Metrik der *gleichmäßigen Konvergenz*:

Definition 1.3. *Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige nichtleere Menge. Im Funktionenraum $A(M)$ setzen wir*

$$\delta(f,g) := \min\left(\sup_{z\in M}|f(z)-g(z)|, 1\right), \qquad f,g \in A(M),$$

sowie für ein $f \in A(M)$ kurz

$$\|f\| := \|f\|_M := \delta(f,0).$$

Wie man leicht sieht, ist $(A(M),\delta)$ ein metrischer Raum.

Die drei wichtigsten Ergebnisse der komplexen Approximationstheorie, die auch mehrfach in dieser Arbeit Anwendung finden werden, lauten mittels obiger Bezeichnungen wie folgt:

Satz 1.4 (Runge, polynomial [24] (1885))**.** *Es seien $K \in \mathfrak{M}, f \in H(K)$, sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein Polynom P mit $\|f - P\|_K < \varepsilon$.*

Satz 1.5 (Mergelian [20] (1952))**.** *Es seien $K \in \mathfrak{M}, f \in A(K)$, sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein Polynom P mit $\|f - P\|_K < \varepsilon$.*

Satz 1.6 (Arakelian [1] (1968))**.** *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet und $G^\star = G \cup \{\infty\}$ die* Ein-Punkt-Kompaktifizierung *von G. Des Weiteren sei F eine abgeschlossene Teilmenge von G, sodass $G^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend ist. Ferner seien $f \in A(F)$, sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion g mit $\|f - g\|_F < \varepsilon$.*

Eine abgeschlossene Teilmenge F eines beliebigen Gebietes G, für welche $G^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend ist, wird des Öfteren auch als *Arakelian-Menge in G* bezeichnet. Nähere Erläuterungen zu diesen beiden topologischen Bedingungen findet man etwa in [7] oder [21]. Weiter weisen wir an dieser Stelle darauf hin, dass der Satz von Mergelian bezüglich der polynomialen und der Satz von Arakelian bezüglich der holomorphen Approximation bestmöglich sind.

1.2 Der metrische Raum $H(G)$

In diesem Abschnitt sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$, insbesondere ist hierbei auch $G = \mathbb{C}$ möglich.
Ein Anliegen dieser Arbeit wird es sein, auch Aussagen über die Größe der Mengen der „universellen“ Funktionen im Raum $H(G)$ zu treffen. Dazu bedarf es zunächst einmal einer für diese Zwecke besser geeigneten „natürlichen“

Metrik auf diesem Raum, als dies die bereits definierte Metrik der gleichmäßigen Konvergenz wäre.
Beweise und detailliertere Darstellungen der folgenden Resultate findet man etwa in Conway [5, Kapitel VII]. Das folgende Lemma über die „Ausschöpfung“ offener Mengen durch Kompakta benötigen wir in diesem Abschnitt zunächst nur mit einer Teilaussage. Die Gesamtaussage brauchen wir jedoch später.

Lemma 1.7. *Es sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine Folge $\{K_n\}$ kompakter Teilmengen von G mit*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Darüber hinaus können die K_n so gewählt werden, dass zusätzlich gilt:

1. *$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Zu jedem Kompaktum $K \subset G$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_N$.*
3. *Jede Komponente von $\mathbb{C}^{\star}\backslash K_n$ enthält eine Komponente von $\mathbb{C}^{\star}\backslash K$ (für alle $n \in \mathbb{N}$).*

Für eine offene Menge G in $\mathbb{C}$ mit $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, sowie K_n kompakt und $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$, definieren nun eine weitere Metrik auf $H(G)$.

Definition 1.8. *Es seien $f, g \in H(G)$; wir setzen*

$$\begin{aligned} d_n(f,g) &:= \|f-g\|_{K_n} = \max_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|, \\ d(f,g) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Für eine Funktion $f \in H(G)$ sei $d(f) := d(f,0)$.

Wie man leicht sieht, ist auch $(H(G), d)$ ein metrischer Raum. Ebenfalls klar ist das nächste Ergebnis, welches sich jedoch als überaus nützlich erweisen wird.

Lemma 1.9. *Es seien G eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und d die Metrik aus Definition 1.8.*
Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum $K \subset G$ derart, dass für alle Funktionen f und g in $H(G)$ gilt:

$$\|f-g\|_K < \delta \ \text{ impliziert } \ d(f,g) < \varepsilon.$$

Sind umgekehrt ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum $K \subset G$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon > 0$, dass für alle $f, g \in H(G)$ gilt:

$$d(f,g) < \varepsilon \text{ impliziert } \|f-g\|_K < \delta.$$

Mit diesem Lemma zeigt man sodann, dass der Raum $H(G)$ mit dieser Metrik zu einem Banach-Raum wird.

Satz 1.10. *Es seien G eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und d die Metrik aus Definition 1.8. Dann gilt:*

1. *$(H(G), d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

2. *Für eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(G)$ und eine Funktion $f \in H(G)$ gilt $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert, was wir im Folgenden kurz mit kompakter Konvergenz auf G bezeichnen werden.*

Die Metrik d aus (1.1) ist eine natürliche Metrik auf dem Raum aller in einer vorgegebenen offenen Menge G holomorphen Funktionen. Sie erzeugt in üblicher Weise eine Topologie auf $H(G)$, die in Anbetracht der zweiten Eigenschaft des vorigen Satzes auch als *lokal-gleichmäßige* oder *kompakt-offene* Topologie bezeichnet wird.

1.3 Stand der Forschung

Ausgangspunkt einer Reihe von Ergebnissen zu universellen Funktionen im Komplexen - im Besonderen zu sogenannten *translationsuniversellen* oder kurz *T-universellen* Funktionen - ist der Satz von Birkhoff [3], welcher in einer äquivalenten Fassung lautet:

Satz 1.11 (Birkhoff (1929))**.** *Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge unbeschränkter komplexer Zahlen.*
Dann gibt es eine ganze Funktion φ derart, dass zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert mit

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \quad \text{gleichmäßig auf } K \qquad (k \to \infty).$$

Da es gelegentlich wichtig ist, bezüglich welcher Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diese Funktion φ die obige Eigenschaft besitzt, sprechen wir im Folgenden auch davon, dass die Funktion *T-universell bezüglich* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Explizite Beispiele universeller Funktionen in diesem Sinne sind bislang noch praktisch unbekannt. Die Riemannsche Zeta-Funktion stellt hierbei die „prominente“ Ausnahme einer translationsuniversellen Funktion dar, vgl. Voronin [25]:

Satz 1.12 (Voronin (1975)). *Es sei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion. Dann existiert zu jedem $K_r := K_r(\frac{3}{4}) := \{z : |z - \frac{3}{4}| \leq r\}$ mit $0 < r < \frac{1}{4}$, jeder Funktion $f \in A(K_r)$, die zudem nullstellenfrei in K_r° ist, und jedem $\varepsilon > 0$ ein $t > 0$, sodass gilt*

$$\|\zeta(z + i\,t) - f(z)\|_{K_r} < \varepsilon.$$

Nicht unerwähnt lassen wollen wir hierbei neuere Untersuchungen zu Approximationen mit der Riemannschen Zeta-Funktion, die von Gauthier und Tarkhanov [8] stammen.

Eine zweite Klasse von Funktionen, die häufig auch als *ableitungsuniversell* bezeichnet wird, geht auf MacLane [19] zurück.

Satz 1.13 (MacLane (1952)). *Es existiert eine ganze Funktion φ, sodass zu jeder ganzen Funktion f eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen existiert mit*

$$\varphi^{(n_k)}(z) \to f(z) \text{ kompakt in } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

In Resultaten wie dem Satz von Birkhoff, dem Satz von MacLane und zahlreichen anderen Ergebnissen wird die Existenz dieser universellen Funktionen mittels konstruktiver Methoden oder durch die Anwendung des Baireschen Kategoriesatzes gesichert. Wir verwenden im Folgenden die erstere Methode, worunter wir die Konstruktion einer holomorphen Funktion über Polynomreihen unter Verwendung der Sätze von Runge und Mergelian oder die direkte Konstruktion einer holomorphen Funktion mit universellen Eigenschaften mit Hilfe des Satzes von Arakelian verstehen.
Unabhängig davon, welche der genannten Beweisanordnungen gewählt wird, so ist es doch stets von enormer Wichtigkeit, dass der Raum $H(\mathbb{C})$ – versehen mit der lokal-gleichmäßigen Topologie – ein separabeler metrischer Raum ist, da etwa die Menge aller Polynome, bei denen die Real- und Imaginärteile aller Koeffizienten rational sind, eine abzählbare und dichte Teilmenge des $H(\mathbb{C})$ ist. Versieht man den Raum $H(\mathbb{C})$ mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz δ aus Definition 1.3, so gilt dies leider nicht mehr, wie das folgende allgemeinere Resultat zeigt:

Satz 1.14. *Es sei $E \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene und nicht beschränkte Menge. Dann ist der metrische Raum $(A(E), \delta)$ nicht separabel, d. h. es existiert in $A(E)$ keine abzählbare dichte Teilmenge.*

Beweis. Da E nicht beschränkt ist, existiert eine Folge $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\zeta_n \in E \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad |\zeta_\nu - \zeta_\mu| \geq c > 0 \ \ (\nu \neq \mu) \quad \text{und} \quad |\zeta_n| \to \infty \ \ (n \to \infty).$$

Die Vereinigung dieser Punkte heiße $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\zeta_n\}$.
Mit X bezeichnen wir die überabzählbare Menge aller Folgen, die ausschließlich aus -1 und 1 bestehen, also

$$X := \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{-1, 1\}\}.$$

Die Menge $\mathbb{C}^\star \backslash F$ ist zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend. Nach dem Satz von Arakelian existiert somit zu jeder Folge $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ eine ganze Funktion g_x mit

$$|g_x(\zeta_n) - x_n| < \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Alle so erklärten Funktionen g_x sind verschieden und liegen im Funktionenraum $A(E)$, das bedeutet

$$B := \{g_x : x \in X\}$$

ist eine überabzählbare Teilmenge von $A(E)$.
Wenn wir annehmen, $A(E)$ besitze eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset A(E)$, so gäbe es zu jedem $x \in X$ eine Funktion $d_x \in D$ mit $\delta(d_x, g_x) < \frac{1}{2}$.
Es seien zwei verschiedene Folgen $x^{(1)} = \{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x^{(2)} = \{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ gegeben. Dann existiert mindestens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0}^{(1)} \neq x_{n_0}^{(2)}$, also $|x_{n_0}^{(1)} - x_{n_0}^{(2)}| = 2$. Wegen

$$|g_{x^{(i)}}(\zeta_{n_0}) - x_{n_0}^{(i)}| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |d_{x^{(i)}}(\zeta_{n_0}) - g_{x^{(i)}}(\zeta_{n_0})| < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2,$$

folgt $d_{x^{(1)}}(\zeta_{n_0}) \neq d_{x^{(2)}}(\zeta_{n_0})$. Für verschiedenes $x \in X$ sind somit auch die zugehörigen Funktionen $d_x \in D$ verschieden. Da X überabzählbar ist, kann D nicht abzählbar sein. □

Wie der Beweis von Satz 1.14 zeigt, gibt es auch keine abzählbare Menge „einfacherer“, z. B. sogar unstetiger, Funktionen, aus denen heraus jede Funktion $f \in A(E)$ beliebig gut approximierbar ist.
Hieraus ergibt sich nun unmittelbar, dass es keinen „Birkhoff-Satz“ für abgeschlossene anstelle kompakter Mengen der nachstehenden Form gibt.

Folgerung 1.15. *Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge unbeschränkter komplexer Zahlen.*
Dann existiert keine *ganze Funktion φ derart, dass zu jeder abgeschlossenen Arakelian-Menge E in $\mathbb{C}$ und jeder Funktion $f \in A(E)$ eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert mit*

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } E \quad (k \to \infty).$$

Mit der gleichen Argumentation ist es ebenso klar, dass es auch keinen „MacLane-Satz" mit gleichmäßiger anstelle von kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}$ geben kann.

Folgerung 1.16. *Es existiert* keine *ganze Funktion φ, sodass zu jeder ganzen Funktion f eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen existiert mit*

$$\varphi^{(n_k)}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig in } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Nachdem wir hier bereits zwei denkbare Resultate kennengelernt haben, die auf den Sätzen von Birkhoff und MacLane basieren, die aber – wie gezeigt – nicht gelten können, sprechen wir nun über Ziele dieser Arbeit.

Eine unserer Aufgaben ist es, universelle Funktionen im Sinne Birkhoff und MacLanes zu konstruieren, die zusätzlich auf jeder Geraden beschränkt sind, auf jeder Geraden gegen 0 konvergieren oder an bestimmten vorgegebenen Punkten Nullstellen besitzen.

1.4 Hauptergebnisse

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns zunächst mit bekannten Resultaten im Bereich der „Translationsuniversalitäten". Die Konstruktion solcher Funktionen erfolgt mit einer wesentlich vereinfachten alternativen Beweismethode, die als wichtigstes Hilfsmittel den Satz von Arakelian verwendet. Bei allen bisherigen Beweisanordnungen wurde dieses Ergebnis nicht eingesetzt, jedoch scheint diese neu entwickelte Technik zur Konstruktion universeller Funktionen überaus erfolgversprechend zu sein.

Das dritte Kapitel umfasst die Konstruktion ganzer Funktionen, die eine „Translationsuniversalität" besitzen, und überdies *auf jeder Geraden* beschränkt sind. Dies ist schon insofern interessant, da ganze universelle Funktionen stets nach dem Satz von Liouville *in der gesamten komplexen Ebene* unbeschränkt sein müssen.
In einer ersten Konstruktion ist hierzu ein Resultat entstanden, bei dem die

ganze Funktion auf jeder Geraden beschränkt und T-universell bezüglich einer bestimmten, aus der Beweiskonstruktion entstandenen Translationsfolge ist, siehe Satz 3.4. Durch eine gewisse Modifikation erreicht man, dass die konstruierten Funktionen sogar auf jeder Geraden gegen Null konvergieren.

Wie erwähnt ist das Ergebnis längst nicht für jede „Translationsfolge“ $b := \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ richtig. In Satz 3.6 geben wir eine notwendige und hinreichende Charakterisierung aller Folgen b an, mit der T-universelle Funktionen konstruiert werden können. Das besondere an diesen Resultaten ist, dass die Menge aller Funktionen, die bezüglich b universell und auf jeder Geraden beschränkt sind, *keine* residuale Teilmenge des Raumes aller ganzen Funktionen versehen mit der natürlichen Metrik der lokal-gleichmäßigen Topologie bildet. In nahezu allen bislang in der Literatur diskutierten Beispielen „universeller Phänomene“ ist dies nämlich der Fall, vgl. Große-Erdmann [11]. Mit Hilfe einer Beweistechnik, die u. a. bei Bernal-González, Calderón-Moreno und Prado-Bassas [2] Anwendung findet, gelingt der Nachweis, dass es sich bei der Menge dieser „universellen Elemente“ sogar um einen dichten linearen Teilraum handelt, der jedoch – wie erwähnt – *keine* residuale Teilmenge des Raumes aller ganzen Funktionen versehen mit der lokal-gleichmäßigen Topologie bildet.

Im folgenden Kapitel 4 gehen wir der Fragestellung nach, ob es möglich ist, die Konstruktion T-universeller ganzer Funktionen mit Hilfe des Satzes von Arakelian derart zu modifizieren, um damit Aussagen über die Existenz universeller Funktionen mit der zusätzlichen Vorgabe von Nullstellen zu erzielen. Der Satz 4.1' zeigt, dass dies in gewisser Weise möglich ist, allerdings stellen wir fest, dass nur ein Teil der Nullstellen vorgeschrieben werden kann, während ein anderer sich zwangsläufig aus der Konstruktion ergibt.
Weitere Untersuchungen zeigen dann sogar auf, dass das Vorhandensein dieser weiteren Nullstellen absolut notwendig ist. Da allerdings aus der Form der in Satz 4.1' konstruierten universellen Funktion die Lage aller Nullstellen bekannt ist, können wir auch eine T-universelle ganze Funktion mit regelmäßig kontrollierbarer Nullstellenasymptotik konstruieren, siehe Satz 4.8. Dies ist, wie wir meinen, eine recht überraschende Tatsache, da sich nämlich Funktionen mit universellen Eigenschaften zumeist eher durch „Unregelmäßigkeiten“ auszeichnen.

Anschließend untersuchen wir in Kapitel 5 dieselbe Fragestellung für ableitungsuniverselle Funktionen. Im Gegensatz zu T-universellen Funktionen gelang Herzog [12] der Nachweis der Existenz nullstellenfreier ableitungsuniverseller Funktionen. Wir weisen nach, dass ableitungsuniverselle Funktionen existieren, die abzählbar viele vorgeschriebene Nullstellen besitzen. Die Konstruktion einer solchen Funktion erfolgt als Polynomreihe mit Hilfe des Satzes von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation, Lagrange Interpolationspolynomen, sowie grundlegenden Eigenschaften der Weierstraßschen Elementarfunktionen.

Funktionen mit zwei simultan auftretenden universellen Eigenschaften sind das Thema in Kapitel 6. Die dort erzeugten Funktionen sind im Einheitskreis translations- bzw. ableitungsuniversell, und die Partialsummen ihrer Potenzreihenentwicklung besitzen außerhalb des Einheitskreises universelle Verteilungen ihrer Nullstellenhäufungspunkte.

Kapitel 2

Translationsuniverselle Funktionen

Für den Bereich der Translationsuniversalitäten stellt sich der Satz von Arakelian, der bekanntlich in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Satzes von Mergelian ist, als geeignetes Hilfsmittel heraus, holomorphe Funktionen mit diesen universellen Eigenschaften direkt zu erzeugen. In diesem Kapitel geben wir zunächst einige Beispiele bereits existenter Resultate an, deren Beweise sich durch die Anwendung des Arakelianschen Satzes erheblich vereinfachen.
Später werden wir dann in den Kapiteln 3 und 4 sehen, dass sich diese Beweismethode und die dort verwendeten Konstruktionen sogar dazu eignen, „neue“ universelle Funktionen zu erzeugen.

2.1 T-universelle ganze Funktionen

Das einfachste Beispiel einer T-universellen ganzen Funktion ist der bereits genannte Satz von Birkhoff, zu dem ein Beweis der oben erwähnten Art bereits in [21] angegeben ist.
Eine zweite Art von Translationsuniversalität sind die „multiplikativen“ Translationen $\varphi(z_n \cdot z)$ für eine vorgegebene Folge komplexer Zahlen $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und eine ganze Funktion φ. Wir greifen in Satz 2.2 - wenn auch nicht in voller Allgemeingültigkeit - ein Resultat von Luh [16] auf, in welchem beide Arten, d. h. additive wie multiplikative Translationen, verknüpft werden, und beweisen dies auf die angesprochene „neue“ Art.
Wir beginnen mit einem bekannten Lemma, welches wir für den folgenden Satz und auch an vielen anderen Stellen benötigen, und welches der interessanten Frage nachgeht, ob die Ableitungen $\varphi^{(j)} (j \in \mathbb{N}_0)$ einer T-universellen

Funktion φ ihrerseits auch T-universell sein müssen.

Lemma 2.1. *Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Für $j \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir folgende Eigenschaft mit*

(A_j): Die Folge der additiven Translationen $\{\varphi^{(j)}(z + z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist dicht in $A(K)$ für alle $K \in \mathfrak{M}$.

Erfüllt eine ganze Funktion φ die Eigenschaft (A_0), dann erfüllt sie auch (A_j) für alle $j \in \mathbb{N}$.

Der Begriff der Dichtheit bedeutet in der Situation von (A_j), dass zu festem $j \in \mathbb{N}_0$, jedem $\varepsilon > 0$, jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jedem $f \in A(K)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt

$$\max_{z\in K} |\varphi^{(j)}(z + z_{n_0}) - f(z)| < \varepsilon.$$

Beweis. Es seien ein $j \in \mathbb{N}$, ein $\varepsilon > 0$, sowie ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und eine Funktion $f \in A(K)$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelian gibt es ein Polynom P mit

$$\max_{z\in K} |P(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Es sei $P^{(-j)}$ eine Stammfunktion der Ordnung j von P, also

$$\frac{d^j}{dz^j} P^{(-j)}(z) = P(z).$$

Ferner wählen wir ein $R > 0$ mit $K \subset \{z : |z| < R\}$. Wegen (A_0) existiert eine Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sodass die zugehörige Funktionenfolge $\{\varphi(z + z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\{|z| \le R\}$ gleichmäßig und somit auf dem Inneren dieser Menge kompakt gegen $P^{(-j)}(z)$ konvergiert. Da diese kompakte Konvergenz dann auch für alle Ableitungen gilt, existiert im Besonderen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{z\in K} |\varphi^{(j)}(z + z_{n_0}) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus zusammen mit (2.1) die Behauptung folgt. □

Wir beachten bereits jetzt, dass wir in Satz 4.15 eine Funktion konstruieren werden, die beispielhaft belegt, dass die Gültigkeit der Aussage (A_1) i. A. nicht die Gültigkeit von (A_0) impliziert.
Mit diesem Lemma können wir nun folgendes Ergebnis beweisen.

Satz 2.2. *Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jedes feste $j \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge der „additiven Translationen“ $\{\varphi^{(j)}(z + z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $A(K)$ für alle $K \in \mathfrak{M}$.*

2. *Für jedes feste $j \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge der „multiplikativen Translationen“ $\{\varphi^{(j)}(z_n \cdot z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $A(K)$ für alle $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$.*

Beweis. 1. Es sei $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen mit $K_n \in \mathfrak{M}$, $0 \notin K_n$ derart, dass für alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}, 0 \notin K$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_{n_0}$, vgl. Luh [16], S. 90. Weiter sei $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen, deren Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind. Ferner sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Liste aller Paare (K_ν, Q_μ), in der jedes Paar unendlich oft auftaucht, und wir setzen $\mathcal{L} = \{(K_n^\star, Q_n^\star)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Sodann betrachten wir $S := \{z : z = z_n; n \in \mathbb{N}\}$, die Teilmengen

$$\begin{aligned} A &:= \{z : z = a_{n,j}; j = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\} \subset S, \\ B &:= \{z : z = b_n; n \in \mathbb{N}\} \subset S, \end{aligned}$$

und definieren ferner

$$\begin{aligned} A_{n,j} &:= a_{n,j} \cdot K_n^\star \quad (j = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}), \\ B_n &:= \{z : |z - b_n| \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Dabei seien $a_{n,j}, b_n$ so gewählt, dass zum einen gilt

$$n < |a_{n,0}| < |a_{n,1}| < \cdots < |a_{n,n}| < |b_n| < |a_{n+1,0}| < \ldots,$$

und zum anderen, dass Jordangebiete

$$L_{n,j} \supset A_{n,j} \quad (j = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$$

mit rektifizierbarem Rand $\partial L_{n,j}$ und $dist(A_{n,j}, \partial L_{n,j}) \geq 1$ derart existieren, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, n$ alle Mengen $\overline{L_{n,j}}, A_{n,0}$ und B_n paarweise disjunkt sind, vgl. Abbildung 2.1.
Unter der Beachtung, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Kompakta $K_n^\star$ in $\mathfrak{M}$ liegen, also ein zusammenhängendes Komplement haben, $L_{n,j}$ Jordangebiete und B_n Kreisscheiben sind, folgt unmittelbar, dass

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \qquad \text{mit } E_n := \left(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{L_{n,j}}\right) \cup A_{n,0} \cup B_n$$

eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$ ist.

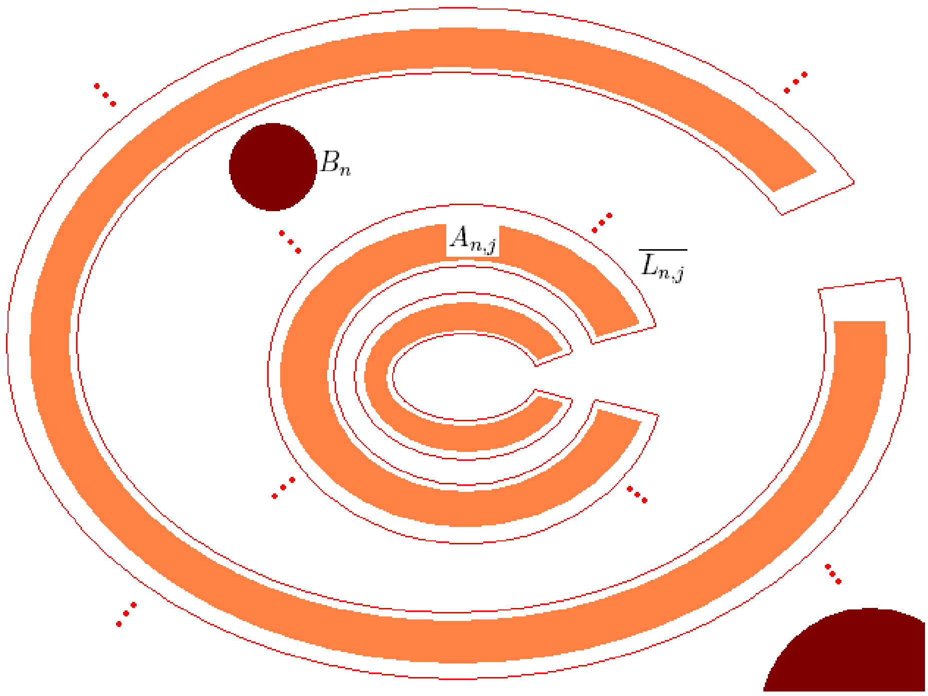

Abbildung 2.1: Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 2.2

2. Wir definieren zunächst die Funktionen $F_{n,j}(z)$ als eine beliebige, aber feste Stammfunktion der Ordnung j zu $Q_n^\star\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right)$, d. h.

$$\frac{d^j}{dz^j}F_{n,j}(z) = Q_n^\star\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right) \quad (n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n),$$

sowie

$$F_{n,0} := Q_n^\star\left(\frac{z}{a_{n,0}}\right),$$

und sodann die folgenden auf E holomorphen Funktionen

$$\delta(z) := \begin{cases} -\ln n & , z \in B_n \\ -\ln n & , z \in A_{n,0} \\ -\ln(j! \cdot n \cdot length(\partial L_{n,j})) & , z \in \overline{L_{n,j}}, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

und

$$q(z) := \begin{cases} Q_n(z - b_n) & , z \in B_n \\ F_{n,0}(z) & , z \in A_{n,0} \\ F_{n,j}(z) & , z \in \overline{L_{n,j}} \end{cases}.$$

Nach dem Satz von Arakelian wählen wir zunächst eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \qquad z \in E \tag{2.2}$$

und dann eine ganze Funktion h mit

$$\left|\frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z)\right| < 1, \qquad z \in E. \tag{2.3}$$

Die ganze Funktion $\varphi(z) := h(z) \cdot e^{g(z)-1}$ erfüllt dann für alle $z \in E$

$$\begin{aligned} |q(z) - \varphi(z)| &< |e^{g(z)-1}| = e^{Re(g(z)-1)} \\ &\leq e^{|g(z)-\delta(z)|-1+\delta(z)} < e^{\delta(z)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Dies bedeutet auf der Menge B_n

$$\max_{|z-b_n|\leq n} |\varphi(z) - Q_n(z - b_n)| < \frac{1}{n},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z|\leq n} |\varphi(z + b_n) - Q_n(z)| < \frac{1}{n}. \tag{2.5}$$

Nach dem Satz von Mergelian existiert zu jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit

$$Q_{n_k}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Weil $K \subset \{z : |z| \leq n_k\}$ für alle hinreichend großen k gilt, folgt aus (2.5)

$$\varphi(z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Wegen $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ und mit Lemma 2.1 folgt dann die erste Aussage.

4. Auf der Menge $A_{n,0}, n \in \mathbb{N}$ folgt aus (2.4)

$$\max_{z\in A_{n,0}} \left|\varphi(z) - Q_n^\star\left(\frac{z}{a_{n,0}}\right)\right| < \frac{1}{n},$$

während wir auf $A_{n,j}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n$ mit der Cauchyschen Integralformel und (2.4)

$$\begin{aligned} \max_{z\in A_{n,j}} \left|\varphi^{(j)}(z) - Q_n^\star\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right)\right| &= \max_{A_{n,j}} \left|\frac{j!}{2\pi i}\int_{\partial L_{n,j}} \frac{\varphi(t) - F_{n,j}(t)}{(t-z)^{j+1}} dt\right| \\ &\leq \frac{j!}{2\pi} \max_{\partial L_{n,j}} |\varphi(t) - F_{n,j}(t)| \cdot length(\partial L_{n,j}) < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

erhalten. Diese beiden Abschätzungen sind äquivalent zu

$$\max_{K_n^\star} |\varphi^{(j)}(z \cdot a_{n,j}) - Q_n^\star(z)| < \frac{1}{n}. \tag{2.6}$$

Es seien nun ein $j \in \mathbb{N}$, ein $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$, sowie ein $f \in A(K)$ beliebig gegeben. Gemäß Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_{n_0}$. Der Satz von Mergelian liefert erneut die Existenz einer Teilfolge $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit

$$Q_{m_k}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Aufgrund der Konstruktion der Liste $\mathcal{L}$ existiert eine streng monoton wachsende Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $(K_{n_k}^\star, Q_{n_k}^\star) = (K_{n_0}, Q_{m_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit (2.6) folgt dann die zweite Aussage.

□

2.2 T-universelle Funktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten

Nach diesen Resultaten zu translationsuniversellen ganzen Funktionen stellt sich nun die Frage, ob es auch T-universelle Funktionen in allgemeinen Gebieten gibt.
Eine zusätzliche Schwierigkeit bereitet dabei die Tatsache, dass man bei der Übertragung des Konzeptes der Translationsuniversalität von $\mathbb{C}$ auf Gebiete G erreichen möchte, dass solche Funktionen bezüglich jedes Randpunktes des Gebietes universell sind. Die genaue Bedeutung dessen kann leicht dem folgenden Satz entnommen werden, der von Luh [14] aus dem Jahr 1979 stammt und welcher das Konzept der T-Universalität auf einfach zusammenhängende Gebiete erweitert, nachdem er es zunächst in [13] für den Sonderfall des Einheitskreises behandelt hatte.

Satz 2.3. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion φ mit der Eigenschaft:*
Zu jedem $\zeta \in \partial G$, jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existieren Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} a_n z + b_n &\in G \quad \text{für alle } z \in K \text{ und alle } n \in \mathbb{N}, \\ a_n z + b_n &\to \zeta \quad \text{für alle } z \in K \text{ und } n \to \infty, \end{aligned}$$

sodass gilt

$$\varphi(a_n z + b_n) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (n \to \infty).$$

Beweis. 1. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert eine konforme Abbildung Φ von G auf den Einheitskreis $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Hiermit setzen wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$G_n := \left\{ z \in G : |\Phi(z)| < 1 - \frac{1}{2n} \right\}.$$

Ferner sei $\{\zeta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\zeta^{(k)} \in \partial G$ für alle $k \in \mathbb{N}$, welche in ∂G dicht liegt. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Folge $\{z_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n^{(k)} \in G \backslash \overline{G_n} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad z_n^{(k)} \to \zeta^{(k)} \quad (n \to \infty).$$

Nun wird in induktiver Weise eine Folge $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruiert. Es sei $n_1 = 1$, und für ein $\nu \geq 1$ sei n_ν bereits bekannt. Wir wählen $n_{\nu+1} > n_\nu$ so groß, dass gilt

$$z_{n_\nu}^{(1)}, z_{n_\nu}^{(2)}, \ldots, z_{n_\nu}^{(n_\nu)} \in G_{n_{\nu+1}} \backslash \overline{G_{n_\nu}}.$$

Des Weiteren sei $\{r_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, wobei $r_\nu \in \left(0, \frac{1}{\nu}\right)$ so klein gewählt wird, dass die Kreisscheiben

$$F_{n_\nu}^{(\mu)} := \{z : |z - z_{n_\nu}^{(\mu)}| \leq r_\nu\} \quad (\mu = 1, \ldots, n_\nu) \tag{2.7}$$

paarweise disjunkt und alle in $G_{n_{\nu+1}} \backslash \overline{G_{n_\nu}}$ enthalten sind.

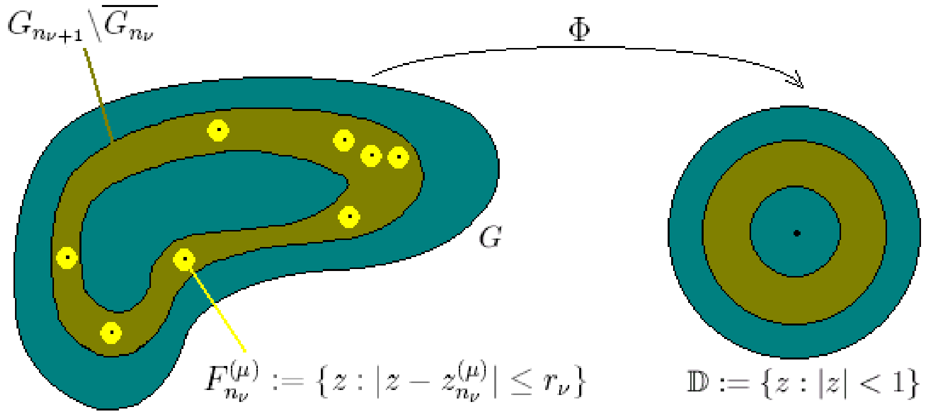

Abbildung 2.2: Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 2.3

Zuletzt definieren wir mit diesen Kreisscheiben folgende in G abgeschlossene Mengen

$$F_{n_\nu} := \bigcup_{\mu=1}^{n_\nu} F_{n_\nu}^{(\mu)}, \qquad F := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_{n_\nu}.$$

Es bezeichne $G^\star$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung des Gebietes G. Aufgrund der Tatsache, dass die Kreisscheiben $F_{n_\nu}^{(\mu)}$ für verschiedenes ν und verschiedenes μ paarweise disjunkt sind, ist $G^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend, was bedeutet, dass F in G die Voraussetzungen des Satzes von Arakelian erfüllt. Den lokalen Zusammenhang an ∞ sieht man z. B. daran, dass jeder Punkt in $G\backslash\overline{G_n}$, der nicht in F liegt, in $G\backslash(\overline{G_n} \cup F)$ mit ∂G durch einen Jordanbogen verbindbar ist.

2. Es bezeichne $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aller Polynome, bei denen die Real- und Imaginärteile aller Koeffizienten rational sind.
Wir definieren nun die folgenden auf den obigen abgeschlossenen Mengen holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \delta(z) &:= -\ln \nu, \qquad z \in F_{n_\nu}, \\ q(z) &:= Q_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu} \cdot (z - z_{n_\nu}^{(\mu)})\right), \qquad z \in F_{n_\nu}^{(\mu)}. \end{aligned}$$

(a) Nach dem Satz von Arakelian existiert zunächst eine in G holomorphe Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \quad z \in F,$$

sowie zur in F holomorphen Funktion $\frac{q(z)}{e^{g(z)-1}}$ eine ebenfalls in G holomorphe Funktion h mit

$$\left|\frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z)\right| < 1, \quad z \in F.$$

Die Funktion $\varphi(z) := h(z)\, e^{g(z)-1}$ ist dann in G holomorph und erfüllt

$$|q(z) - \varphi(z)| < e^{\delta(z)}, \quad z \in F.$$

(b) Dies bedeutet auf den Mengen $F_{n_\nu}^{(\mu)} = \{z : |z - z_{n_\nu}^{(\mu)}| \le r_\nu\}$ mit $\mu = 1, \ldots, n_\nu$; $\nu \in \mathbb{N}$

$$\max_{|z - z_{n_\nu}^{(\mu)}| \le r_\nu} \left|\varphi(z) - Q_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu} \cdot (z - z_{n_\nu}^{(\mu)})\right)\right| < \frac{1}{\nu}.$$

Setzen wir $w := \frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu} \cdot (z - z_{n_\nu}^{(\mu)})$, so erhalten wir für $\mu = 1, \ldots, n_\nu$; $\nu \in \mathbb{N}$

$$\max_{|w| \le \frac{\nu}{\nu+1}} \left|\varphi\left(\frac{\nu+1}{\nu}\, r_\nu\, w + z_{n_\nu}^{(\mu)}\right) - Q_\nu(w)\right| < \frac{1}{\nu}. \tag{2.8}$$

3. Es seien nun ein $\zeta \in \partial G$, ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und eine Funktion $f \in A(K)$ gegeben. Wir bestimmen ein $R \geq 1$ so, dass die Menge
$$K_R := \left\{ w : w = \frac{z}{R}, z \in K \right\} \in \mathfrak{M}$$
in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}} := \{w : |w| < \frac{1}{2}\}$ enthalten ist. Die Funktion f_R mit
$$f_R(w) := f(R\,w), \qquad w \in K_R$$
gehört dann zur Klasse $A(K_R)$. Nach dem Approximationssatz von Mergelian gibt es eine Teilfolge $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und
$$\max_{w\in K_R} |f_R(w) - Q_{\nu_k}(w)| < \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{2.9}$$
Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $K_R \subset \mathbb{D}_{\frac{1}{2}} \subset \{w : |w| \leq \frac{\nu_k}{\nu_k+1}\}$, und es folgt mit (2.8) und (2.9) für $\mu = 1, \ldots, n_{\nu_k}$ und alle $k \in \mathbb{N}$
$$\max_{w\in K_R} \left| \varphi\left(\frac{\nu_k + 1}{\nu_k}\, r_{\nu_k}\, w + z_{n_{\nu_k}}^{(\mu)} \right) - f_R(w) \right| < \frac{1}{\nu_k} + \frac{1}{k}. \tag{2.10}$$
Gemäß ihrer Konstruktion hat die Menge der Punkte
$$z_{n_{\nu_k}}^{(\mu)};\ \mu = 1, \ldots, n_{\nu_k}; k \in \mathbb{N}$$
jeden Randpunkt von G, also insbesondere $\zeta \in \partial G$, als Häufungspunkt. Es existieren daher Folgen $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ und $\{\mu_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ mit
$$1 \leq \mu_s \leq n_{\nu_{k_s}} \ \ (s \in \mathbb{N}) \qquad \text{und} \qquad z_{n_{\nu_{k_s}}}^{(\mu_s)} \to \zeta \quad (s \to \infty).$$
Setzen wir nun
$$a_s := \frac{\nu_{k_s} + 1}{\nu_{k_s}} \cdot r_{\nu_{k_s}} \cdot \frac{1}{R}, \quad b_s := z_{n_{\nu_{k_s}}}^{(\mu_s)},$$
so gilt $a_s \to 0, b_s \to \zeta$ $(s \to \infty)$. Für alle $z \in K$ sowie aufgrund der Wahl von R folgt $|a_s\, z| \leq r_{\nu_{k_s}}$. Wegen (2.7) bedeutet dies für jedes $z \in K$ und jedes $s \in \mathbb{N}$
$$G \ni a_s\, z + b_s \to \zeta \quad (s \to \infty).$$
Aus (2.10) folgt für $s \to \infty$
$$\max_{w\in K_R} |\varphi(a_s\, R\, w + b_s) - f(Rw)| \to 0,$$
und letztlich nach Resubstitution $z = R\,w$ für $s \to \infty$
$$\max_{z\in K} |\varphi(a_s\, z + b_s) - f(z)| \to 0,$$
also die Behauptung.

□

2.3 T-universelle Funktionen in beliebigen Gebieten

Bei Luh, Martirosian und Müller [18] wird das Konzept der T-Universalität sogar auf beliebige Gebiete G erweitert, wobei sich das universelle Translationsverhalten nur auf eine vorgeschriebene Teilmenge $E \subset \partial G$ beschränkt. Die drei Autoren sprechen diesbezüglich von „eingeschränkter Universalität“.
Hierbei wird im Originalbeweis eine Ausschöpfung des Gebietes mit kompakten Mengen gemäß Lemma 1.7 vorgenommen. Die dritte dort geforderte Eigenschaft an die Kompakta, welche anschaulich besagt, dass die Kompakta keine „Löcher“ besitzen außer denen, die durch die Löcher des Gebietes G erzwungen werden, wird hierbei durch die Verwendung des stärkeren Approximationssatzes von Arakelian obsolet.
Zur Abkürzung bezeichnen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Menge der Verdichtungspunkte einer Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kurz mit $V(\{b_n\})$.

Satz 2.4. *Es seien $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge. Ferner seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $V(\{b_n\}) = E$. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion φ mit der folgenden Eigenschaft:*
Für alle $K \in \mathfrak{M}$, für alle $f \in A(K)$ und für alle $\zeta \in E$ existieren Teilfolgen $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit

$$a_{m_k} z + b_{n_k} \in G \text{ für alle } z \in K \text{ und alle } k \in \mathbb{N},$$

$$b_{n_k} \to \zeta \quad (k \to \infty),$$

$$\varphi(a_{m_k} z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. 1. Es sei gemäß Lemma 1.7 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen H_n mit den Eigenschaften:

- $H_n \subset H_{n+1}^\circ \subset G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Zu jeder kompakten Menge $K \subset G$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset H_{n_0}$.

Ferner sei $\{\zeta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in E, die in E dicht liegen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Teilfolge $\{z_\nu^{(k)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{b_n\}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu^{(k)} = \zeta^{(k)}$, sodass für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Punkte $z_\nu^{(1)}, \ldots, z_\nu^{(\nu)}$ paarweise disjunkt sind und so, dass für eine Teilfolge $\{H_{n_\nu}\}$ von $\{H_n\}$ gilt: $z_\nu^{(k)} \in G_{\nu+1}^\circ \backslash G_\nu$ für $k = 1, \ldots, \nu$, wobei $G_\nu := H_{n_\nu}$.

Danach wählen wir mit einer Folge $\{l_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ monoton wachsender natürlicher Zahlen Radien $r_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossenen Kreisscheiben

$$D_{\nu,k} := \{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le r_\nu\}$$

für $k = 1, \dots, \nu$ paarweise disjunkt sind, und so, dass

$$\Omega_\nu := \bigcup_{k=1}^{\nu} D_{\nu,k} \subset G_{\nu+1}^\circ \backslash G_\nu$$

gilt. Zuletzt definieren wir mit diesen Kreisscheiben folgende in G abgeschlossene Menge

$$F := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu.$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Kreisscheiben $D_{\nu,k}$ für verschiedenes ν und verschiedenes k paarweise disjunkt sind, ist $G^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend, was wiederum bedeutet, dass F eine Arakelian-Menge in G ist.

2. Es bezeichne $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erneut eine Folge aller Polynome, bei denen die Real- und Imaginärteile aller Koeffizienten rational sind.
Wir definieren des Weiteren die folgenden auf den obigen abgeschlossenen Mengen holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \delta(z) &:= -\ln \nu, \qquad z \in \Omega_\nu \\ q(z) &:= Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}(z - z_\nu^{(k)})\right), \qquad z \in D_{\nu,k}. \end{aligned}$$

   (a) Der Arakeliansche Satz liefert zunächst die Existenz einer in G holomorphen Funktion g mit

   $$|\delta(z) - g(z)| < 1, \quad z \in F,$$

   sowie zur in F holomorphen Funktion $\frac{q(z)}{e^{g(z)-1}}$ die Existenz einer weiteren in G holomorphen Funktion h mit

   $$\left|\frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z)\right| < 1, \quad z \in F.$$

   Die Funktion $\varphi(z) := h(z)\, e^{g(z)-1}$ ist dann in G holomorph und erfüllt

   $$|q(z) - \varphi(z)| < e^{\delta(z)}, \quad z \in F.$$

(b) Hieraus ergibt sich für alle $k = 1, \dots, \nu; \nu \in \mathbb{N}$

$$\max_{w \in D_{\nu,k}} \left| \varphi(w) - Q_\nu \left(\frac{1}{a_{l_\nu}} \left(w - z_\nu^{(k)} \right) \right) \right| < \frac{1}{\nu},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq \frac{1}{r_\nu}} \left| \varphi(a_{l_\nu}\, z + z_\nu^{(k)}) - Q_\nu(z) \right| < \frac{1}{\nu}. \tag{2.11}$$

3. Im abschließenden Schritt seien ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, eine Funktion $f \in A(K)$ und ein Randpunkt $\zeta \in E$ beliebig gegeben. Wir beachten, dass ζ ein Verdichtungspunkt der Folge $\{\zeta^{(k)}\}$ ist. Nach dem Satz von Mergelian finden wir eine Teilfolge $\{\nu_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodass gilt

$$\max_K |Q_{\nu_s}(z) - f(z)| < \frac{1}{s}. \tag{2.12}$$

Ferner existiert ein $s_0 = s_0(K)$ so, dass für alle $s > s_0$ gilt:

$$K \subset \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{r_{\nu_s}} \right\}.$$

Wegen (2.11) und (2.12) erhalten wir

$$\max_K |\varphi(a_{l_{\nu_s}}\, z + z_{\nu_s}^{(k)}) - f(z)| < \frac{1}{\nu_s} + \frac{1}{s}$$

für alle $s > s_0$ und alle $k = 1, \dots, \nu_s$.
Weil die Menge der Punkte $\{z = z_{\nu_s}^{(k)} : k = 1, \dots, \nu_s; s > s_0\}$ den Punkt ζ als Verdichtungspunkt besitzt, existieren natürliche Zahlen $j_s \in \{1, \dots, \nu_s\}$, sodass gilt $z_{\nu_s}^{(j_s)} \to \zeta$ für $s \to \infty$. Für $s > s_0$ und $z \in K$ gilt

$$|(a_{l_{\nu_s}}\, z + z_{\nu_s}^{(j_s)}) - z_{\nu_s}^{(j_s)}| = |a_{l_{\nu_s}}| \cdot |z| \leq r_{\nu_s}^2 \cdot \frac{1}{r_{\nu_s}} = r_{\nu_s},$$

was bedeutet, $a_{l_{\nu_s}}\, z + z_{\nu_s}^{(j_s)} \in D_{\nu_s, j_s} \subset G$ für alle $s > s_0$. Setzen wir entsprechend

$$a_{m_k} := a_{l_{\nu_{s_0+k}}}, \quad b_{n_k} := z_{\nu_{s_0+k}}^{(j_{s_0+k})} \quad (k \in N),$$

so folgt insgesamt

$$\max_K |\varphi(a_{m_k}\, z + b_{n_k}) - f(z)| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

womit der Satz bewiesen ist.

□

Definition 2.5. *Es seien $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge.*
Wir bezeichnen jede Funktion, welche dieselben Eigenschaften erfüllt wie die Funktion φ aus Satz 2.4 als translationsuniverselle Funktion in G bezüglich der Menge E. *Die Menge aller translationsuniversellen Funktionen in G bezüglich E bezeichnen wir mit $U_E(G)$.*

Wir beachten, dass die in Satz 2.4 konstruierte Funktion φ nur bezüglich jedes Randpunktes, welcher der abgeschlossen Menge $E \subset \partial G$ angehört, T-universell ist. Basierend auf diesem Satz wird in [18, Theorem 3] sogar gezeigt, dass in Gebieten, die von endlich vielen paarweise disjunkten Jordankurven berandet sind, und unter den weiteren Voraussetzungen von Satz 2.4, eine exakt in einem solchen Gebiet holomorphe Funktion φ existiert, die im obigen Sinne T-universell bezüglich E und bezüglich $F := \partial G \backslash E$ nicht T-universell ist.

Bemerkung 2.6. *Ist in der Situation von Satz 2.4 der Punkt ∞ Randpunkt des Gebietes G, so kann die dortige Funktion φ – bei geeigneter Wahl von E – auch als T-universell bezüglich $\{\infty\}$ konstruiert werden. In diesem Fall ist ∞ ein Häufungspunkt von Punkten in ∂G. Die Behauptung folgt dann unter Verwendung eines Diagonalfolgenargumentes.*

Nachdem wir in Satz 2.4 die Existenz einer T-universellen Funktion in einem beliebigen Gebiet G nachgewiesen haben, stellen wir uns abschließend die Frage, wie „groß“ die Teilmenge $U_E(G)$ bestehend aus diesen T-universellen Funktionen des $H(G)$ ist. In Abschnitt 1.2 haben wir bereits eine Metrik auf $H(G)$ eingeführt, die aus $H(G)$ einen vollständigen metrischen Raum macht. Wir zeigen nun zunächst für einfach zusammenhängende Gebiete G, dass $U_E(G)$ für alle abgeschlossenen Mengen $E \subset \partial G$ dicht in $H(G)$ ist.

Satz 2.7. *Es seien $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist die Menge $U_E(G)$ dicht in $H(G)$.*

Beweis. Es seien eine beliebige Funktion $f \in H(G)$ sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass eine Funktion $\varphi \in U_E(G)$ existiert mit $d(f, \varphi) < \varepsilon$.

1. Nach Satz 2.4 wissen wir, dass $U_E(G) \neq \emptyset$ ist. Wir wählen daher eine beliebige Funktion $\varphi_0 \in U_E(G)$. Ein einfaches Argument zeigt, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $d(\delta\varphi_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Nach dem Satz von Runge über die polynomiale Approximation existiert eine Folge von Polynomen, die auf G kompakt gegen f konvergieren, also gibt es ein Polynom P mit $d(P, f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir betrachten die in

G holomorphe Funktion $\varphi(z) := \delta\varphi_0(z) + P(z)$, und stellen fest

$$d(\varphi, f) = d(\delta\varphi_0 + P, f) \leq d(\delta\varphi_0) + d(P, f) < \varepsilon.$$

2. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi \in U_E(G)$ gilt.
   Es seien dazu ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, eine Funktion $g \in A(K)$ und ein $\zeta \in E$ beliebig gegeben. Dann gilt $\frac{1}{\delta}g(z) - \frac{1}{\delta}P(\zeta) \in A(K)$. Wegen $\varphi_0 \in U_E(G)$ existieren Teilfolgen $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen mit

$$\begin{aligned}
&a_{m_j} z + b_{n_j} \in G \quad \text{für alle } z \in K \text{ und alle } j \in \mathbb{N},\\
&a_{m_j} \to 0, \quad (j \to \infty),\\
&b_{n_j} \to \zeta, \quad (j \to \infty),\\
&\varphi(a_{m_j} z + b_{n_j}) \to \frac{1}{\delta}g(z) - \frac{1}{\delta}P(\zeta) \quad \text{gleichmäßig auf } K \quad (j \to \infty).
\end{aligned}$$

   Da P insbesondere in ζ stetig ist, existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon'(k) > 0$, sodass für alle y mit $|y - \zeta| < \varepsilon'(k)$ folgt, dass $|P(y) - P(\zeta)| < \frac{1}{k}$. Entsprechend wählen wir nun ein $j_k > k$ derart, dass gilt

$$|a_{m_{j_k}}| < \frac{\varepsilon'(k)}{2 \max\limits_K |z|}, \quad |b_{n_{j_k}} - \zeta| < \frac{\varepsilon'(k)}{2},$$

   und damit

$$\max_K |P(a_{m_{j_k}} z + b_{n_{j_k}}) - P(\zeta)| < \frac{1}{k},$$

   sowie ferner

$$\max_K |\varphi_0(a_{m_{j_k}} z + b_{n_{j_k}}) - \frac{1}{\delta}g(z) - \frac{1}{\delta}P(\zeta)| < \frac{1}{k}.$$

   Deshalb erhalten wir insgesamt

$$\max_K |\varphi(a_{m_{j_k}} z + b_{n_{j_k}}) - g(z)| < \frac{\delta + 1}{k},$$

   was bedeutet $\varphi \in U_E(G)$.

□

Bemerkung 2.8. *Das obige Ergebnis kann durch die Verwendung des Satzes von Runge über die rationale Approximation im obigen Beweis sofort auf reguläre Gebiete G, das bedeutet solche mit $(\bar{G})^\circ = G$, übertragen werden.*

Kapitel 3

Auf jeder Geraden beschränkte T-universelle ganze Funktionen

In [6, Theorem 5] zeigen Costakis und Sambarino, dass es eine ganze Funktion φ gibt, die auf jeder Geraden, die nicht in Richtung der positiven reellen Achse zeigt, für $z \to \infty$ gegen 0 konvergiert, also insbesondere auf allen Geraden außer jenen der Form $z_0 + \mathbb{R}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$) beschränkt ist, und die hyperzyklisch ist bezüglich des Translationsoperators um 1,

$$T_1 : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad T_1(f(z)) := f(z+1),$$

d. h. ihr Orbit $\{T_1^n \varphi : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist dicht in $H(\mathbb{C})$, oder anders ausgedrückt: φ ist T-universell bezüglich der Folge $b := \{n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

3.1 Der Raum $GB(\mathbb{C})$ aller auf jeder Geraden beschränkten ganzen Funktionen

Im folgenden einfachen Lemma weisen wir nach, dass dieses Resultat bestmöglich ist, d. h. eine bezüglich T_1 hyperzyklische Funktion konvergiert längs einer jeden Geraden der Form $z_0 + \mathbb{R}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$) nicht gegen 0; sie ist dort nicht einmal beschränkt.

Lemma 3.1. *Die Funktion φ sei hyperzyklisch bezüglich T_1, d. h. die Folge der additiven Translationen $\{\varphi(z+n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist dicht in $A(K)$ für alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}$.*
Dann ist φ auf jeder Geraden $z_0 + \mathbb{R}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$) unbeschränkt.

Beweis. Angenommen die Funktion φ wäre für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ auf der Geraden $z_0 + \mathbb{R}$ beschränkt, also

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z_0 + z)| \le c_0. \tag{3.1}$$

Zu $K = \{z_0\}$ und $f(z) \equiv c_0 + 1$ existiert dann gemäß Voraussetzung eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z_0 + n_k) \longrightarrow f(z) \equiv c_0 + 1 \quad (k \to \infty),$$

im Widerspruch zu (3.1). □

Wir werden in Abschnitt 3.2 nachweisen, dass es sehr wohl möglich ist, eine auf *jeder* Geraden beschränkte ganze Funktion zu konstruieren, die translationsuniversell im Sinne Birkhoffs ist. Die Wahl der Translationspunkte kann hierbei, wie das vorige Lemma zeigt, nicht beliebig sein.
Das eben gezeigte Lemma liefert uns allerdings auch noch nähere Informationen zur Menge $GB(\mathbb{C})$, der Menge aller ganzen Funktionen, die auf jeder Geraden beschränkt sind.

Definition 3.2. *Ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen in einem topologischen Raum $(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ heißt G_δ-**Menge** und eine Teilmenge von $\mathcal{T}$, die ihrerseits eine dichte und G_δ-Teilmenge besitzt, bezeichnet man als **residual**.*

Lemma 3.3. *Wir setzen*

$$GB(\mathbb{C}) := \{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \varphi \text{ ist beschränkt auf jeder Geraden}\}.$$

Dann gilt:

1. *$GB(\mathbb{C})$ ist dicht in $(H(\mathbb{C}), d)$.*
2. *$GB(\mathbb{C})$ besitzt keine inneren Punkte.*
3. *$GB(\mathbb{C})$ ist keine residuale Menge in $(H(\mathbb{C}), d)$.*

Beweis. 1. Es seien ein $f \in H(\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir zeigen, dass eine Funktion $\varphi \in GB(\mathbb{C})$ existiert mit $d(\varphi, f) < \varepsilon$. Nach Lemma 1.9 existiert ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit

$$\max_K |\varphi(z) - f(z)| < \delta \ \text{ impliziert } \ d(\varphi, f) < \varepsilon.$$

Sodann wählen wir ein $R > 0$ mit der Eigenschaft $K \subset \{z : |z| \leq R\}$ und betrachten mit der Menge

$$\begin{aligned} S := &\{z : \text{Re } z \leq 0 \text{ oder Im } z \leq 0\} \\ &\cup \left\{z : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0 \text{ und Im } z \geq \frac{1}{\text{Re } z}\right\}, \end{aligned}$$

die folgende in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Menge

$$F := F_1 \cup F_2 := \{z : |z| \le R\} \cup (S \cap \{z : |z| \ge R+1\}).$$

Es ist klar, dass F eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$ ist. Hierauf definieren wir die nachstehenden holomorphen Funktionen auf F

$$\delta(z) := \begin{cases} \ln\delta & , z \in F_1 \\ 0 & , z \in F_2 \end{cases}, \quad q(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in F_1 \\ 0 & , z \in F_2 \end{cases}$$

und wählen mit dem Satz von Arakelian zunächst eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \quad z \in F,$$

und sodann eine ganze Funktion h mit

$$\left| \frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z) \right| < 1, \quad z \in F.$$

Die ganze Funktion $\varphi(z) := h(z) \cdot e^{g(z)-1}$ erfüllt dann

$$|q(z) - \varphi(z)| < e^{\delta(z)}, \quad z \in F,$$

was zum einen bedeutet, dass

$$\max_K |\varphi(z) - f(z)| \le \max_{|z| \le R} |\varphi(z) - f(z)| < \delta$$

ist, also $d(\varphi, f) < \varepsilon$. Zum anderen gilt, dass der Durchschnitt von $(F_2)^c$ mit jeder Geraden leer oder in einem kompakten Geradenstück enthalten ist. Zusammen mit $|\varphi(z)| < 1$ ($z \in F_2$) folgt, dass φ auf jeder Geraden beschränkt ist.

2. Es sei nun eine Funktion $f \in GB(\mathbb{C})$ gegeben. Wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Funktion φ mit $d(f, \varphi) < \varepsilon$ existiert, die nicht auf jeder Geraden beschränkt ist. Erneut bestimmen wir als erstes das Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ und $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\max_K |\varphi(z) - f(z)| < \delta \text{ impliziert } d(\varphi, f) < \varepsilon.$$

Anschließend wählen wir ein $R > 0$ mit der Eigenschaft

$$K \subset \{z : |z| \le R\}$$

und betrachten mit einer beliebigen Geraden Γ die in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Menge

$$F := F_1 \cup F_2 := \{z : |z| \leq R\} \cup (\Gamma \cap \{z : |z| \geq R+1\}).$$

Auf dieser Arakelian-Menge definieren wir die folgenden auf F holomorphen Funktionen

$$\delta(z) := \begin{cases} \ln \delta & , z \in F_1 \\ 0 & , z \in F_2 \end{cases}, \quad q(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in F_1 \\ z & , z \in F_2 \end{cases}.$$

Mit derselben Konstruktion der Funktion φ wie im ersten Schritt erhalten wir eine ganze Funktion φ mit $d(\varphi, f) < \varepsilon$, die wegen

$$\sup_{z \in F_2} |\varphi(z) - z| \leq 1$$

auf der Geraden Γ unbeschränkt ist.

3. Die Menge

$$\mathfrak{T}(\mathbb{C}) := \{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \varphi \text{ ist hyperzyklisch bezüglich } T_1\}$$

ist eine dichte G_δ-Menge in $(H(\mathbb{C}), d)$, siehe etwa Große-Erdmann [11]. Wäre $GB(\mathbb{C})$ eine residuale Menge, so enthielte sie eine dichte und G_δ-Menge. Nach dem Satz von Baire wäre der Schnitt $\mathfrak{T}(\mathbb{C}) \cap GB(\mathbb{C})$ dicht in $(H(\mathbb{C}), d)$, also insbesondere nicht leer. Dies widerspricht der Aussage von Lemma 3.1.

□

3.2 Birkhoff-Funktionen in $GB(\mathbb{C})$

Wir werden zuerst der Frage nachgehen, ob es bei geeigneter Wahl der Translationspunkte möglich ist, eine „Birkhoff-universelle“ ganze Funktion zu konstruieren, die überdies auf *jeder* Geraden beschränkt ist. Darauf geben wir folgende positive Antwort:

Satz 3.4. *Es existieren eine ganze Funktion φ und eine Folge $b := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, sodass gilt:*

1. *Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $\varphi^{(j)}$ beschränkt auf jeder Geraden.*

2. *Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$, jedes Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jede Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi^{(j)}(z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. 1. Wir wählen die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$S := \{z : \text{Re } z > 0, \sqrt{\text{Re } z} < \text{Im } z < 2\sqrt{\text{Re } z}\}^c. \tag{3.2}$$

Ferner betrachten wir mit einem beliebig kleinen, aber fest gewählten $s > 0$ die abgeschlossene Menge

$$\tilde{S} := \{z : \text{es existiert ein } w \in S \text{ mit } |z - w| \leq s\}$$

und wählen sodann eine Folge von Punkten $b_n \in \tilde{S}^c \subset S^c$ mit

$$B_n := \{z : |z - b_n| \leq n\} \subset \tilde{S}^c$$

und $B_n \cap B_m = \emptyset$, falls $n \neq m$ ist. Das Komplement bezüglich $\mathbb{C}^\star$ der abgeschlossenen Menge

$$E := \tilde{S} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

ist zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend; folglich ist E eine Arakelian-Menge.

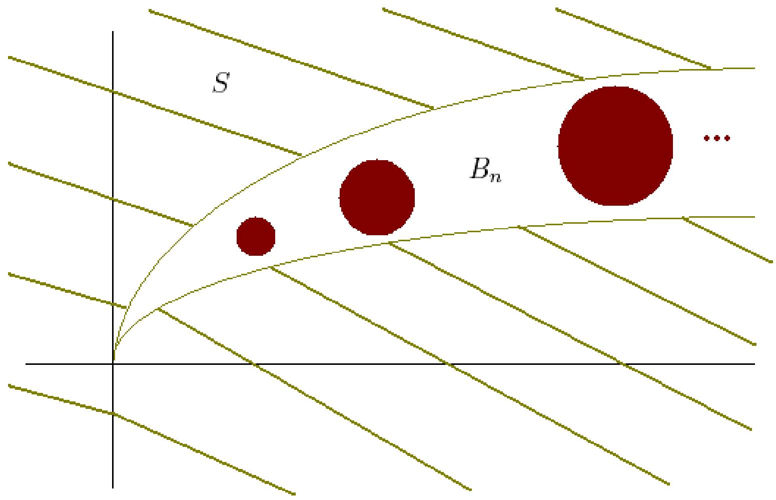

Abbildung 3.1: Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 3.4

2. Es sei $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Die Funktionen

$$\delta(z) := \begin{cases} -\ln n & , z \in B_n \\ 0 & , z \in \tilde{S} \end{cases}, \quad q(z) := \begin{cases} Q_n(z - b_n) & , z \in B_n \\ 0 & , z \in \tilde{S} \end{cases} \tag{3.3}$$

sind holomorph auf E. Nach dem Satz von Arakelian wählen wir zunächst eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \qquad z \in E,$$

und dann eine ganze Funktion h mit

$$\left| \frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z) \right| < 1, \qquad z \in E.$$

Die ganze Funktion $\varphi(z) := h(z) \cdot e^{g(z)-1}$ erfüllt dann für alle $z \in E$

$$\begin{aligned} |q(z) - \varphi(z)| &< e^{Re(g(z)-1)} \\ &\leq e^{|g(z)-\delta(z)|-1+\delta(z)} < e^{\delta(z)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Es folgt für alle $z \in \tilde{S}$

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z) - q(z)| < e^{\delta(z)} = 1,$$

sowie für alle $z \in S$ und alle $j \in \mathbb{N}$ unter Beachtung von

$$\{\zeta : |\zeta - z| \leq s\} \subset \tilde{S}$$

mit der Cauchyschen Ungleichung

$$|\varphi^{(j)}(z)| \leq \frac{j!}{s^j} \max_{|\zeta - z| = s} |\varphi(\zeta)| \leq \frac{j!}{s^j},$$

woraus zunächst folgt, dass alle Funktionen $\varphi^{(j)} (j \in \mathbb{N}_0)$ auf der Menge S beschränkt sind. Dabei ist S so beschaffen, dass für jede Gerade Γ gilt: $\Gamma \cap S^c$ ist leer oder in einem Kompaktum enthalten. Daraus folgt die erste Aussage.

3. Aus der Beziehung (3.4) folgt

$$\max_{|z-b_n| \leq n} |\varphi(z) - Q_n(z - b_n)| = \max_{z \in B_n} |\varphi(z) - q(z)| < \frac{1}{n},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq n} |\varphi(z + b_n) - Q_n(z)| < \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

Es seien nun ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ sowie eine Funktion $f \in A(K)$ beliebig gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit

$$Q_{n_k}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty),$$

und weil $K \subset \{z : |z| \leq n_k\}$ für alle hinreichend großen k gilt, folgt aus (3.5)

$$\varphi(z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Mit Lemma 2.1 folgt dann die zweite Aussage.

□

Wir zeigen nun, dass mittels einer entsprechenden Modifikation eine translationsuniverselle ganze Funktion erzeugt werden kann, die auf jeder Geraden sogar gegen 0 konvergiert.

Bemerkung 3.5. *Wir betrachten das einfach zusammenhängende Gebiet*

$$G := \mathbb{C} \backslash \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 1, \text{Im } z = \frac{3}{2}\sqrt{\text{Re } z} \right\}$$

und definieren einen holomorphen Zweig von $l(z) = \log \frac{1}{2z-2-3i}$ *auf* G. *Ersetzen wir im Beweis zu Satz 3.4 in (3.3)* δ *durch*

$$\delta(z) := \begin{cases} -\ln n & , z \in B_n \\ l(z) & , z \in \tilde{S} \end{cases},$$

so erhalten wir eine ganze Funktion φ *mit derselben Universalitätseigenschaft wie in Satz 3.4, die zusätzlich auf* jeder *Geraden gegen 0 konvergiert, und deren Ableitungen auch auf* jeder *Geraden gegen 0 konvergieren.*

In der Bemerkung 3.7 auf Seite 39 beschäftigen wir uns noch kurz mit Wachstumsaussagen für die in Satz 3.4 konstruierte Funktion. Zuvor gehen wir allerdings erst einmal Fragen zu der Struktur zulässiger Translationsfolgen nach.

3.3 Struktur zulässiger Translationsfolgen

Nachdem wir in Satz 3.4 eine auf jeder Geraden beschränkte und translationsuniverselle ganze Funktion bezüglich einer konkreten, sich aus der Beweisanordnung ergebenen Translationsfolge b konstruiert haben, stellt sich unmittelbar die Frage, unter welchen Voraussetzungen an die Translationsfolge b eine „Birkhoff-translationsuniverselle“ ganze und auf jeder Geraden beschränkte Funktion existiert. Wir werden nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an die Folge $b := \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen herleiten. Hierfür definieren wir

$$B_n^R(b) := \{z : |z - b_n| \leq R\}.$$

Ferner sagen wir, die Folge b *besitzt die Eigenschaft* ***(G)***, wenn eine Teilfolge $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ derart existiert, dass für jedes beliebige $R > 0$ und für alle Geraden Γ in $\mathbb{C}$ gilt:

$$\Gamma \cap B^R_{n_k}(b) \neq \emptyset \quad \text{nur für höchstens endlich viele } k \in \mathbb{N}.$$

Es ist sehr leicht zu sehen, dass die gewünschte Eigenschaft der Teilfolge $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ nicht erfüllt sein kann, falls sie beschränkt ist. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $b_{n_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$ gilt.

Zuletzt bezeichnen wir mit $U_b(\mathbb{C})$ die Menge aller ganzen Funktionen φ, die selbst und deren Ableitungsfunktionen auf jeder Geraden beschränkt sind, sowie überdies „translationsuniversell" bezüglich der Folge b im Sinne Birkhoffs sind, d. h.:

Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^{(j)}(z + b_{n_k}) \to f(z) \;\; \text{gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende Resultat:

Satz 3.6. *Es sei $b := \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.*

1. *Besitzt b die Eigenschaft (G) nicht, so ist $U_b(\mathbb{C})$ leer.*

2. *Besitzt b die Eigenschaft (G), so existiert in $H(\mathbb{C})$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, ein dichter linearer Teilraum $\mathcal{L}$ mit*

$$\mathcal{L}\backslash\{0\} \subset U_b(\mathbb{C}).$$

Allerdings ist $U_b(\mathbb{C})$ nicht *residual in $H(\mathbb{C})$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie aus Abschnitt 1.2.*

Beweis. 1. Die Folge b habe die Eigenschaft (G) nicht, und wir nehmen an, es gäbe eine Funktion $\varphi \in U_b(\mathbb{C})$. Zur Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(z) := z$ existiert dann gemäß Voraussetzung eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z + b_{n_k}) \to f(z) = z \quad \text{kompakt auf } \mathbb{C} \quad (k \to \infty).$$

Da (G) nicht gilt, existiert ein $R > 0$ und eine Gerade Γ, sodass Γ abzählbar viele Kreise $B^R_{n_k}(b)$ schneidet, d. h. es gibt eine Teilfolge $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $(\Gamma \cap B^R_{n_{k_l}}(b)) \neq \emptyset$ $(l \in \mathbb{N})$. Ferner ist $|\varphi(z)|$ auf der Geraden Γ durch eine Konstante c_0 beschränkt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $R \geq c_0 + 1$ gilt. Daher können wir für jedes $l \in \mathbb{N}$ einen Punkt $z_l \in \Gamma \cap \partial B^R_{n_{k_l}}(b)$ wählen und $w_l := z_l - b_{n_{k_l}}$ setzen. Dann gilt einerseits

$$|\varphi(z_l)| \leq \sup_{\Gamma} |\varphi(z)| \leq c_0,$$

aber andererseits unter Beachtung von $|w_l| = R \geq c_0 + 1$

$$|\varphi(z_l) - w_l| \leq \max_{|z| \leq R} |\varphi(z + b_{n_{k_l}}) - z| \to 0 \quad (l \to \infty),$$

was einen Widerspruch darstellt.

2. Die Folge b habe nun die Eigenschaft (G), d. h. es gibt eine Teilfolge $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit oben genannten Eigenschaften.

   (a) Als erstes konstruieren wir eine Menge S, die abzählbar viele der Punkte b_{n_k} enthält, und welche gleichzeitig mit jeder Geraden in $\mathbb{C}$ auf höchstens einer kompakten Menge übereinstimmt. Zur Veranschaulichung befindet sich auf Seite 35 eine Abbildung, welche die Konstruktion von S zeigt. Zunächst machen wir die folgende Vorüberlegung:
   Da sowohl die reelle, wie auch die imaginäre Achse gemäß Voraussetzung nur endlich viele der Punkte b_{n_k} enthalten, liegen in einem der Quadranten abzählbar viele dieser Punkte. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass abzählbar viele Punkte b_{n_k} im ersten Quadranten, also in

   $$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

   enthalten sind. Sodann betrachten wir die Winkelhalbierende

   $$\Gamma_0 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\},$$

   welche ebenfalls nur endlich viele Punkte b_{n_k} enthält. Erneut nehmen wir ohne Einschränkung an, dass abzählbar viele b_{n_k} in der Menge

   $$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$$

   verbleiben. Halbieren wir wieder den Winkel mit

   $$\Gamma_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} z\},$$

   so erhalten wir ohne Einschränkung, dass abzählbar viele b_{n_k} in

   $$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2} \operatorname{Re} z\}$$

liegen, und letztlich befinden sich ohne Einschränkung abzählbar viele b_{n_k} in jeder der Mengen

$$T_n := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \frac{1}{2^n} \text{Re } z\} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wir setzen $S_0 := T_0$ und wählen ein

$$c_0 \in S_0 \cap \{z = b_{n_k}, k \in N\}.$$

Dann betrachten wir die Winkelhalbierende Γ_1 und definieren S_1 als die Teilmenge des ersten Quadranten, die von Γ_0, sowie $i \,\text{Im } c_0 + \Gamma_1$ und der reellen Achse berandet ist. Wegen $T_1 \subset S_1$ können wir ein $c_1 \in (S_1 \cap \{z = b_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \cap \{z : |z| > |c_0|\})$ wählen. Der Zusatz „$|c_1| > |c_0|$“ ist hierbei wegen der Eigenschaft (G) der Folge b möglich, da hieraus sofort die Unbeschränktheit von $\{z = b_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ folgt. Mit

$$\Gamma_j := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = \frac{1}{2^j} \text{Re } z\}$$

definieren wir im j-ten Schritt S_j als die Teilmenge des ersten Quadranten, die von

$$\Gamma_0, \quad i \,\text{Im } c_0 + \Gamma_1, \quad \ldots, \quad i \max\{\text{Im } c_0, \ldots, \text{Im } c_{j-1}\} + \Gamma_j$$

und der reellen Achse berandet ist. Wegen $T_j \subset S_j$ können wir ein

$$c_j \in (S_j \cap \{z = b_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \cap \{z : |z| > \max_{i=0,\ldots,j-1} |c_i|\})$$

wählen. Weiter betrachten wir die Menge $\hat{S} := \cap_j S_j$ und überzeugen uns davon, dass diese die Form

$$\hat{S} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < B(\text{Re } z)\}$$

besitzt, wobei B eine stückweise lineare Funktion ist, deren Steigung für $x \to +\infty$ gegen 0 konvergiert, und B ist monoton wachsend mit $\lim_{x \to +\infty} B(x) = +\infty$. Als nächstes müssen wir noch abzählbar viele Streifen aus $\hat{S}$ entfernen, um S zu erhalten. Hierfür betrachten wir

$$\Sigma_l := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq l\} \quad (l \in \mathbb{N}).$$

In jedem Streifen Σ_l liegen nur endlich viele c_j ($j \in \mathbb{N}_0$), denn andernfalls hätten unendlich viele Kreise $\{z : |z - c_j| \leq l + 1\}$

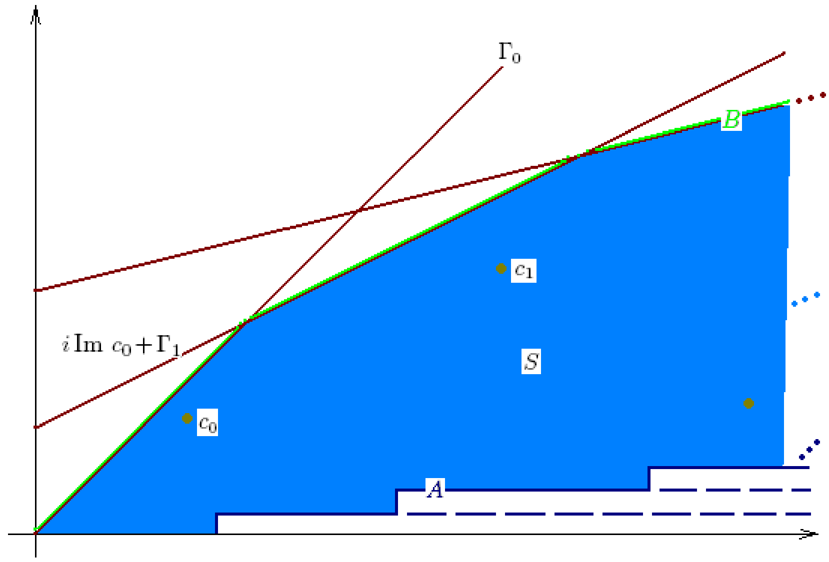

Abbildung 3.2: Erste Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 3.6

einen nichtleeren Durchschnitt mit der reellen Achse. Dies wäre ein Widerspruch zur Eigenschaft (G) der Folge $\{c_j\}$ als Teilfolge von $\{b_{n_k}\}$. Folglich existiert zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $L(l)$ groß genug in $\mathbb{R}_+$, sodass $B(L(l)) > 2l$ gilt und alle Mengen

$$U_l := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > L(l), 0 \leq \mathrm{Im}\ z \leq l\} \quad (l \in \mathbb{N})$$

keinen Punkt c_j $(j \in \mathbb{N}_0)$ enthalten. Damit setzen wir schließlich

$$S := \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} S_j\right) \setminus \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} U_l\right),$$

wobei S von der Form

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0, A(\mathrm{Re}\ z) < \mathrm{Im}\ z < B(\mathrm{Re}\ z)\}$$

ist, mit der oben beschriebenen Funktion B, sowie einer monoton wachsenden Treppenfunktion A und $\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$.
S besitzt offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.

(b) Als nächstes definieren wir

$$\tilde{S} := \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0, \frac{A(\mathrm{Re}\ z)}{2} < \mathrm{Im}\ z < B(\mathrm{Re}\ z) + \sqrt{\mathrm{Re}\ z}\right\}.$$

Wir können nun eine Teilfolge $\{c_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ und eine Folge zugehöriger Radien $\{\rho_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\rho_{j_{k+1}} > 2\rho_{j_k}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ bestimmen, sodass alle Kreise C_{j_k} mit Mittelpunkt c_{j_k} und Radius ρ_{j_k} in $\tilde{S}$ enthalten sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir zur Vereinfachung $j_k = k$ an. Wegen der Eigenschaften von S ist auch der Durchschnitt jeder Geraden mit $\tilde{S}$ entweder leer oder enthalten in einem Kompaktum.

(c) Wie üblich sei $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, und wir betrachten die Folge $\{Q_n^\star\}_{n\in\mathbb{N}}$, in der jedes Polynom Q_n unendlich oft vorkommt. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zugehörigem Kompaktum $K_n := \{z : |z| \le n\}$ mit

$$L_n := \{z : |z| \ge n + 1\}$$

existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$C_k \subset \tilde{S} \cap L_n \quad (k \ge k_n),$$

siehe hierzu auch Abbildung 3.3 auf der nächsten Seite. Setzen wir

$$\begin{aligned} E_n &:= \tilde{S}^c \cap L_n, \\ F_n &:= K_n \cup \bigcup_{k \ge k_n} C_k \cup E_n, \end{aligned}$$

so ist F_n eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$. Nun teilen wir $\mathbb{N}$ in unendlich viele streng monoton wachsende Teilfolgen auf, d. h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\{p(n,k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $p(n,k_1) = p(l,k_2)$ nur für $n = l$ und $k_1 = k_2$. Des Weiteren betrachten wir hiermit die Funktionen

$$\delta_n(z) := \begin{cases} -\ln k & , z \in C_k \ (k \ge k_n) \\ \ 0 & , z \in E_n \\ -\ln n & , z \in K_n \end{cases}$$

und

$$q_n(z) := \begin{cases} Q_k(z - c_{p(n,k)}) & , z \in C_{p(n,k)} \ (p(n,k) \ge k_n) \\ \ 0 & , z \in C_{p(l,k)} \ (l \ne n, p(l,k) \ge k_n) \\ \ 0 & , z \in E_n \\ Q_n^\star(z) & , z \in K_n \end{cases},$$

welche auf F_n holomorph sind. Nach dem Satz von Arakelian existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ zunächst eine ganze Funktion g_n mit

$$|\delta_n(z) - g_n(z)| < 1, \quad z \in F_n,$$

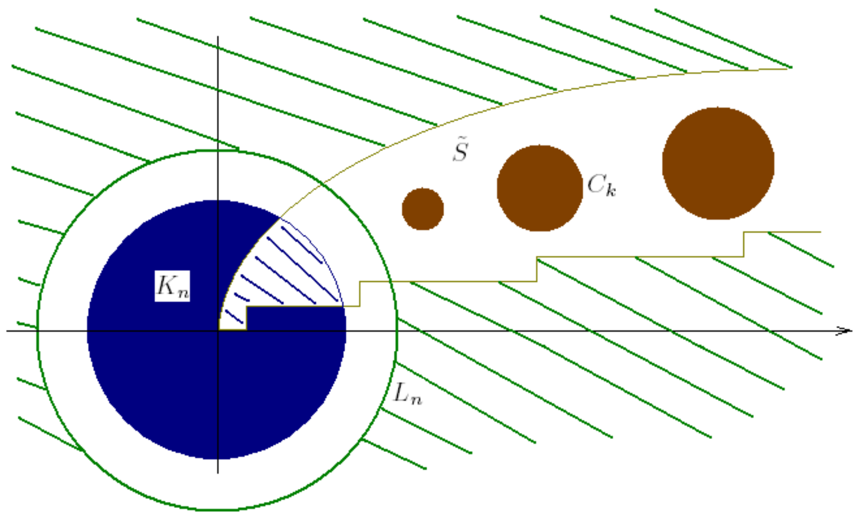

Abbildung 3.3: Zweite Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 3.6

sowie zur in F_n holomorphen Funktion $\frac{q_n(z)}{e^{g_n(z)-1}}$ eine weitere ganze Funktion h_n mit

$$\left|\frac{q_n(z)}{e^{g_n(z)-1}} - h_n(z)\right| < 1, \quad z \in F_n.$$

Die ganze Funktion $\varphi_n(z) := h_n(z)\, e^{g_n(z)-1}$ erfüllt schlussendlich

$$|\varphi_n(z) - q_n(z)| < e^{\delta_n(z)}, \quad z \in F_n. \tag{3.6}$$

(d) Jetzt definieren wir $\mathcal{L}$ als die lineare Hülle

$$\mathcal{L} :=< \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} > .$$

Offensichtlich ist $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum von $H(\mathbb{C})$, und es gilt

$$|\varphi_n(z) - Q_n^\star(z)| < \frac{1}{n}, \quad |z| \leq n.$$

Zu festem $Q_n(z)$ existiert eine Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ mit $Q_{n_j}^\star = Q_n$ ($j \in \mathbb{N}$). Zu jedem Kompaktum K existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \{z : |z| \leq n_j, j \geq j_0\}$, d. h.

$$|\varphi_{n_j}(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{n_j}, \quad z \in K,\ j \geq j_0.$$

Das bedeutet φ_{n_j} konvergiert kompakt in $\mathbb{C}$ gegen Q_n bzw.

$$\overline{\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}} \supset \{Q_n, n \in \mathbb{N}\},$$

also $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ und damit $\mathcal{L}$ sind dicht in $H(\mathbb{C})$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie.

(e) Es sei $t > 0$ beliebig klein gewählt und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Aussage (3.6) bedeutet wie im zweiten Beweisschritt von Satz 3.4, dass φ_n auf E_n und jede Ableitung von φ_n auf

$$\tilde{E}_n := \{z \in E_n : dist(z, \partial E_n) \geq t\} \subset E_n$$

beschränkt ist. Weil die Schnittmenge einer jeden Geraden mit $(\tilde{E}_n)^c$ leer oder in einem Kompaktum enthalten ist, folgt aus der Beschränktheit von φ_n einschließlich aller Ableitungen auf $\tilde{E}_n$ auch die Beschränktheit auf jeder Geraden. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist jede Funktion $\varphi \in \mathcal{L}$ und mit ihr auch alle Ableitungen von φ auf jeder Geraden beschränkt.

(f) Es sei nun $\varphi \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ gegeben, dann existieren ein $N \in \mathbb{N}$ sowie komplexe $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ mit $\lambda_N \neq 0$ und $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_N\varphi_N$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $p(N,k) \geq k_0 := \max\limits_{n=1,\ldots,N} k_n$ gilt dann mit (3.6)

$$\begin{aligned}
&\max_{|z|\leq\rho_{p(N,k)}} |\varphi(z + c_{p(N,k)}) - \lambda_N Q_k(z)| \\
&\quad= \max_{|z-c_{p(N,k)}|\leq\rho_{p(N,k)}} |\varphi(z) - \lambda_N Q_k(z - c_{p(N,k)})| \\
&\quad= \max_{C_{p(N,k)}} \left| \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j\varphi_j(z) + \lambda_N(\varphi_N(z) - Q_k(z - c_{p(N,k)}) \right| \\
&\quad\leq \sum_{j=1}^{N-1} |\lambda_j| \cdot \max_{C_{p(N,k)}} |\varphi_j(z)| \\
&\qquad\quad + |\lambda_N| \cdot \max_{C_{p(N,k)}} |\varphi_N(z) - Q_k(z - c_{p(N,k)})| \\
&\quad\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|\right) \frac{1}{k}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen $\lambda_N \neq 0$ ist $\{\lambda_N Q_k(z), k \in \mathbb{N} \text{ mit } p(N,k) \geq k_0\}$ dicht in $H(\mathbb{C})$ nach dem Satz von Mergelian. Zusammen mit (3.7) und $\rho_{p(N,k)} \to \infty$ $(k \to \infty)$ folgt, dass $\{\varphi(z + c_{p(N,k)})\}$ dicht in $A(K)$ für jedes Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ ist. Mit Lemma 2.1 und dem bereits Gezeigten folgt dann letztlich, dass $\varphi \in U_b(\mathbb{C})$ ist.

(g) Nach der dritten Aussage von Lemma 3.3 ist $GB(\mathbb{C})$ nicht residual in $(H(\mathbb{C}), d)$. Folglich ist auch ihre Teilmenge $U_b(\mathbb{C})$ dort nicht residual.

□

Der Beweis zum obigen Satz macht deutlich: Falls eine Folge b die Eigenschaft (G) besitzt, so ist es möglich, eine geeignete Teilfolge von b auszuwählen, die in einem „Korridor“ ähnlich der Menge S^c aus Satz 3.4 liegt.
Abschließend beschäftigen wir uns kurz mit Wachstumsaussagen für die Funktionen $\varphi \in U_b(\mathbb{C})$.

Bemerkung 3.7. *Eine Funktion f ist* vom Exponentialtyp *genau dann, wenn positive Konstanten α, c existieren, sodass gilt*

$$M(r) := \max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq c \cdot e^{\alpha r}.$$

Da sowohl die in Satz 3.4 konstruierte Funktion φ als auch jede Funktion $\varphi \in U_b(\mathbb{C})$ insbesondere auf der reellen und imaginären Achse beschränkt sind, gelten

$$h(\theta) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |\varphi(r\, e^{i\theta})|}{r} = 0 \qquad \left(\theta = \pm \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi(x) = O(|x|^p),\ x \in \mathbb{R},\ x \to \pm\infty \qquad (p = 0).$$

Wäre φ vom Exponentialtyp, so folgt aus Boas [4, Theorem 6.2.13], dass φ konstant wäre. Dieser Widerspruch liefert somit unmittelbar, dass die besagten Funktionen φ nicht vom Exponentialtyp sein können, was auch bedeutet, dass ihre sogenannte Wachstumsordnung $\rho \geq 1$ sein muss.

3.4 „Birkhoff-ähnliche“ universelle Funktionen in $GB(\mathbb{C})$

Mittels einer anderen Konstruktion, die auch Gegenstand der Arbeit [10] ist, können wir eine in einem ähnlichen Sinne translationsuniverselle ganze Funktion erzeugen.
Dahinter steht die folgende Überlegung. Als *cluster set* einer ganzen Funktion φ wird bekanntlich die Menge

$$S(\varphi) := \{w \in \hat{\mathbb{C}} :\ \text{es existiert eine unbeschränkte Folge } \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \varphi(b_n) \to w\}$$

bezeichnet. Offensichtlich gilt $S(\varphi) \subset \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Besitzt die Funktion φ eine wesentliche Singularität an ∞, so ist das cluster set dieser Funktion φ maximal, also $S(\varphi) = \hat{\mathbb{C}}$. Ersetzen wir $\varphi(b_n)$ durch die „scheinbar“ geringfügige Modifikation $\varphi(a_n\, z + b_n)$ mit einer beliebig vorgegebenen Nullfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so entsteht eine Funktionenfolge, und es stellt sich die Frage, ob es möglich ist (zumindest gewisse) Funktionen durch Translationen der Form $\varphi(a_{n_k}\, z + b_{m_k})$ zu approximieren. Genauer interessieren uns an dieser Stelle Funktionen φ mit maximalen „modifizierten cluster sets“, die wir im folgenden Satz konstruieren.

Satz 3.8. *Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge mit $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann existieren eine ganze Funktion φ und eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, sodass gilt:*

1. *φ ist auf jeder Geraden beschränkt.*

2. *Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$, jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existieren Folgen $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^{(j)}(a_{n_k}\, z + b_{m_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. 1. Wir wählen zunächst wie im Beweis zu Lemma 3.3 die Menge

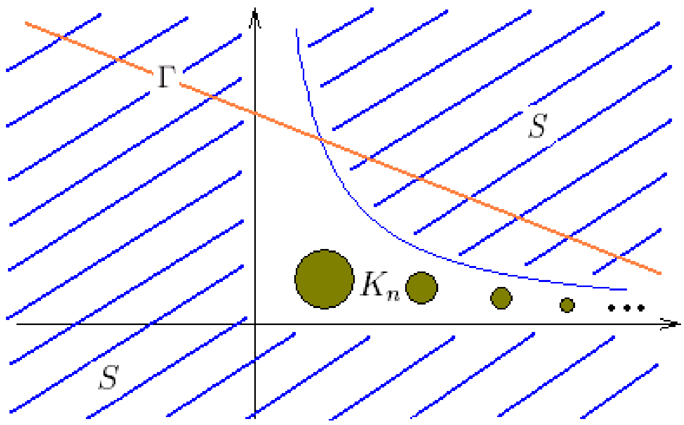

Abbildung 3.4: Konstruktionsskizze zum Beweis von Satz 3.8

$$\begin{aligned} S := &\{z : \text{Re } z \leq 0 \text{ oder Im } z \leq 0\} \\ &\cup \left\{ z : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0 \text{ und Im } z \geq \frac{1}{\text{Re } z} \right\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

und anschließend eine unbeschränkte Folge von Punkten

$$c_{n,j} \in S^c \quad (j = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}),$$

die wir folgendermaßen in eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sortieren:

$$\{b_n\} : c_{0,0}, c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{2,2}, c_{3,0}, \ldots .$$

Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $r_k := (k+1)a_{n_k} \in (0, \frac{1}{k})$ und derart, dass die Mengen

$$K_{n,j} := \{z : |z - c_{n,j}| \leq r_n\} \subset S^c$$

alle paarweise disjunkt sind. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass dies bereits für die Gesamtfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, das heißt $r_n := (n+1)\, a_n \in (0, \frac{1}{n})$.
Das Komplement bezüglich $\mathbb{C}^\star$ der abgeschlossenen Menge

$$F := S \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \qquad \text{mit } K_n := \bigcup_{j=0}^{n} K_{n,j}$$

ist zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend; folglich ist F eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$.
Ferner sei $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen mit $Q_n^{(-j)}(z)$ eine Stammfunktion der Ordnung j von $Q_n(z)$, d. h.

$$\frac{d^j}{dz^j} Q_n^{(-j)}(z) = Q_n(z).$$

2. Die Funktionen

$$\delta(z) := \begin{cases} \ln \frac{a_n^j}{j!(n+1)n} & , z \in K_{n,j} \\ 0 & , z \in S \end{cases}$$

und

$$q(z) := \begin{cases} a_n^j \cdot Q_n^{(-j)} \left(\frac{n+1}{r_n} (z - c_{n,j}) \right) & , z \in K_{n,j} \\ 0 & , z \in S \end{cases}$$

sind holomorph auf F. Nach dem Satz von Arakelian existiert zunächst eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \quad z \in F,$$

und ferner eine ganze Funktion h mit

$$\left| \frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z) \right| < 1, \quad z \in F.$$

Zusammen folgt für die ganze Funktion $\varphi(z) := h(z) \cdot e^{g(z)-1}$

$$|\varphi(z) - q(z)| < e^{\delta(z)}, \quad z \in F,$$

also

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z) - q(z)| < 1, \quad z \in S.$$

Es sei nun Γ eine beliebige Gerade in $\mathbb{C}$, die möglicherweise komplett in S verläuft. Falls dies nicht zutrifft, so ist $\Gamma \cap S^c$ in einem offenen und damit auch in einem abgeschlossenen beschränkten Geradenstück A_Γ enthalten, vgl. Abbildung 3.4. Auf diesem Kompaktum ist φ trivialerweise durch eine Konstante M_Γ beschränkt, sodass gilt

$$|\varphi(z)| \leq \max_{A_\Gamma} |\varphi(z)| + \max_{\Gamma \cap S} |\varphi(z)| \leq M_\Gamma + 1, \quad z \in \Gamma,$$

also φ ist auf jeder Geraden Γ beschränkt, woraus die erste Aussage folgt.
Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\max_{|z-c_{n,j}| \leq r_n} \left| \varphi(z) - a_n^j \cdot Q_n^{(-j)} \left(\frac{n+1}{r_n} (z - c_{n,j}) \right) \right| \\ &= \max_{z \in K_{n,j}} |\varphi(z) - q(z)| < e^{\delta(z)} = \frac{a_n^j}{j!(n+1)n}, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq n+1} \left| \frac{1}{a_n^j} \cdot \varphi(a_n z + c_{n,j}) - Q_n^{(-j)}(z) \right| < \frac{1}{j!(n+1)n}. \tag{3.9}$$

Unter Beachtung von

$$\varphi^{(j)}(a_n z + c_{n,j}) = \frac{d^j}{dz^j} \frac{1}{a_n^j} \varphi(a_n z + c_{n,j})$$

folgt aus (3.9) mit der allgemeinen Cauchyschen Integralformel für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\max_{|z| \leq n} |\varphi^{(j)}(a_n z + c_{n,j}) - Q_n(z)| \\ =&\max_{|z| \leq n} \left| \frac{j!}{2\pi i} \int_{|t|=n+1} \frac{\frac{1}{a_n^j} \varphi(a_n t + c_{n,j}) - Q_n^{(-j)}(t)}{(t-z)^{j+1}} dt \right| \\ \leq& \frac{j!}{2\pi} \max_{|t|=n+1} \left| \frac{1}{a_n^j} \cdot \varphi(a_n t + c_{n,j}) - Q_n^{(-j)}(t) \right| \cdot 2\pi(n+1) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.9) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j = 0, \ldots, n$

$$\max_{|z| \le n} |\varphi^{(j)}(a_n z + c_{n,j}) - Q_n(z)| < \frac{1}{n}. \tag{3.10}$$

3. Es sei $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Nach dem Satz von Mergelian existiert zu einem beliebigen Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und einer beliebigen Funktion $f \in A(K)$ eine Teilfolge $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, sodass gilt

$$Q_{n_k}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty),$$

und, weil K in $\{z : |z| \le n_k\}$ für alle hinreichend großen k enthalten ist, folgt mit (3.10)

$$\varphi^{(j)}(a_{n_k} z + c_{n_k,j}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

□

Wir bezeichnen mit $V(\mathbb{C})$ die Menge aller Funktionen, welche über dieselben Eigenschaften wie die Funktion φ aus Satz 3.8 verfügen. Ebenso wie die Menge $U_b(\mathbb{C})$ aus dem vorigen Abschnitt stellt sich auch $V(\mathbb{C})$, als dicht, aber nicht residual in $H(\mathbb{C})$, versehen mit der lokal-gleichmäßigen Topologie, heraus.

Satz 3.9. *$V(\mathbb{C})$ ist eine dichte, aber nicht residuale Teilmenge des $H(\mathbb{C})$, versehen mit der lokal-gleichmäßigen Topologie.*

Beweis. Es seien eine beliebige ganze Funktion f, sowie ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass eine Funktion $\varphi \in V(\mathbb{C})$ existiert mit $d(f, \varphi) < \varepsilon$.

1. Zunächst gibt es nach Lemma 1.9 ein $\delta > 0$ und ein Kompaktum K_0 mit

$$\max_{z \in K_0} |f(z) - g(z)| < \delta \quad \text{impliziert} \quad d(f, g) < \varepsilon.$$

Ferner sei $R > 0$ so groß gewählt, dass $K_0 \subset \{z : |z| \le R\}$ gilt.

2. Nun konstruieren wir in ähnlicher Form wie in Satz 3.8 eine auf jeder Geraden beschränkte ganze Funktion φ, die „translationsuniversell“ im Sinne des obigen Satzes ist und ferner $d(f, \varphi) < \varepsilon$ erfüllt. Zur Konstruktion betrachten wir zunächst die Menge S aus dem Beweis zu Satz 3.8 in (3.8). Die Punkte $c_{n,j}$ und die Radien r_n wählen wir in S^c so, dass alle Mengen der Form $K_{n,j} := \{z : |z - c_{n,j}| \le r_n\}$ paarweise disjunkt sind und zusätzlich komplett in $S^c \cup \{z : |z| > R\}$ liegen. Die Vereinigung aller dieser Kreise nennen wir F. Die Menge

$$\{z : |z| \le R\} \cup (S \cap \{z : |z| \ge R + 1\}) \cup F$$

ist eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$, und die Funktionen

$$\delta(z) := \begin{cases} \ln \frac{a_n^j}{j!(n+1)n} & , z \in K_{n,j} \\ 0 & , z \in S \cap \{z : |z| \geq R+1\} \\ \ln \delta & , |z| \leq R \end{cases}$$

und

$$q(z) := \begin{cases} a_n^j \cdot Q_n^{(-j)} \left(\frac{n+1}{r_n}(z - c_{n,j})\right) & , z \in K_{n,j} \\ 0 & , z \in S \cap \{z : |z| \geq R+1\} \\ f(z) & , |z| \leq R \end{cases}$$

sind holomorph in F. Wörtlich wie im Beweis von Satz 3.8 erhält man, dass die dort konstruierte Funktion φ Element von $V(\mathbb{C})$ ist und darüber hinaus

$$\max_{K_0} |\varphi(z) - f(z)| < \delta$$

erfüllt.

$V(\mathbb{C})$ ist als Teilmenge der nach Lemma 3.3 nicht residualen Menge $GB(\mathbb{C})$ ihrerseits nicht residual in $(H(\mathbb{C}), d)$. $\square$

Kapitel 4

Über Nullstellen translationsuniverseller Funktionen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine translationsuniverselle ganze Funktion wie im Birkhoff-Satz zu konstruieren, die zusätzlich an vorgeschriebenen Punkten w_n Nullstellen einer vorgegebenen Ordnung ρ_n besitzt. In einem ersten Resultat erhalten wir eine solche Funktion φ, die allerdings noch weitere bekannte Nullstellen ζ_m besitzt, die sich in natürlicher Weise aus der Konstruktion von φ ergeben.
Im Abschnitt 4.2 zeigen dann wir, dass T-universelle Funktionen nicht nullstellenfrei sein können. Ganz im Gegenteil – sie besitzen notwendigerweise sogar sehr viele Nullstellen.

4.1 T-universelle Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen

Satz 4.1. *Es ist möglich, eine translationsuniverselle ganze Funktion φ zu konstruieren, die an abzählbar vielen Punkten w_n Nullstellen einer vorgeschriebenen Ordnung besitzt.*
Dabei sind die Punkte w_n unter Einhaltung einer gewissen Bedingung beliebig wählbar. Alle weiteren Nullstellen von φ ergeben sich aus der Beweiskonstruktion und sind daher bekannt.

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir eine alternative Formulierung desselbigen an, in der alle Details angegeben sind.

Satz 4.1'. *Es seien $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge vorgeschriebener Nullstellenpunkte in $\mathbb{C}$ mit $V(\{w_n\}) = \emptyset$ und $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Ferner existiere eine in $\mathbb{C}$ unbeschränkte Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften:*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Kreisscheiben $F_n := \{z : |z-z_n| \leq n\}$ paarweise disjunkt, und $\tilde{F}_n$ seien paarweise disjunkte offene Kreise mit $\tilde{F}_n \supset F_n$.*
2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $w_n \notin \tilde{F} := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{F}_j$.*

Es sei $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $(H(\mathbb{C}), d)$. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit den Eigenschaften:

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat φ eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.*
2. *Hat die Funktion $Q_n(z - z_n)$ an der Stelle $z = \zeta_m \in \tilde{F}_n$ eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m, so hat φ an ϱ_m ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m.*
3. *Es ist $\varphi(z) \neq 0$, falls $z \neq w_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $z \neq \zeta_m$ $(m \in \mathbb{N})$.*
4. *Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit*

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Um die Aussage von Satz 4.1 nachzuweisen, zeigen wir unter Verwendung der dort eingeführten Bezeichnungen den Satz 4.1'.

1. Vorbereitungen: Auf Grund unserer Annahme erfüllt die abgeschlossene Menge $F := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, die nur aus paarweise disjunkten kompakten Kreisscheiben F_n besteht, dass $\mathbb{C}^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend ist.
   Wegen $V(\{w_n\}) = \emptyset$ und da $Q_n(\cdot - z_n)$ ganze Funktionen sind, besitzt die Menge bestehend aus allen Punkten w_n $(n \in \mathbb{N})$ und ζ_m $(m \in \mathbb{N})$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz existiert eine ganze Funktion P, für die gilt:
   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.
   - Für alle $m \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m an ζ_m.
   - Es ist $P(z) \neq 0$, falls $z \neq w_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $z \neq \zeta_m$ $(m \in \mathbb{N})$.

2. In diesem Schritt wenden wir nun dreimal den Satz von Arakelian über gleichmäßige Approximation an:

   (a) Für die obige Funktion P setzen wir
   $$c_n := \max_{z \in F_n} |P(z)|$$
   und wählen mit dieser Konstanten die folgende auf F holomorphe Funktion
   $$\delta_1(z) := -\ln(2 \cdot n \cdot c_n), \quad z \in F_n.$$

   (b) Nach dem Satz von Arakelian existiert eine ganze Funktion g_1 mit
   $$|\delta_1(z) - g_1(z)| < 1, \quad z \in F.$$
   Hieraus folgt
   $$\operatorname{Re}(g_1(z)) - \delta_1(z) = \operatorname{Re}(g_1(z) - \delta_1(z)) \leq |g_1(z) - \delta_1(z)| < 1, \ \ z \in F.$$

   (c) Die Funktionen
   $$R_n(z) := \frac{Q_n(z - z_n)}{e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)}, \quad z \in \tilde{F}_n$$
   sind gemäß der Wahl von P holomorph und nullstellenfrei in $\tilde{F}_n$. Folglich existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\log R_n(z)$, die ebenfalls in $\tilde{F}_n$ und somit auch in F_n selbst holomorph ist, und welche $e^{\log R_n(z)} = R_n(z)$ erfüllt. Mit diesen Funktionen definieren wir folgende in F holomorphe Funktion
   $$l(z) := \log R_n(z), \quad z \in F_n.$$

   (d) Für die Funktionen R_n setzen wir
   $$d_n := \max\left(\max_{z \in F_n} |R_n(z)| \,;\, 2 \right)$$
   und wählen mit dieser Konstanten eine dritte auf F holomorphe Funktion
   $$\delta_2(z) := -\ln d_n, \quad z \in F_n.$$

   (e) Erneut existiert nach dem Satz von Arakelian eine ganze Funktion g_2 mit
   $$|\delta_2(z) - g_2(z)| < 1, \quad z \in F.$$
   Hieraus folgt wie oben
   $$\operatorname{Re}(g_2(z)) - 1 < \delta_2(z), \quad z \in F.$$

(f) Die Funktion $\frac{l(z)}{e^{g_2(z)-1}}$ ist holomorph in F, und wir bestimmen nach dem Arakelianschen Satz die ganze Funktion h_1 so, dass

$$\left|\frac{l(z)}{e^{g_2(z)-1}} - h_1(z)\right| < 1, \quad z \in F$$

gilt. Insgesamt folgt für die ganze Funktion $h_2(z) := h_1(z) \cdot e^{g_2(z)-1}$

$$\begin{aligned} |l(z) - h_2(z)| &< |e^{g_2(z)-1}| = e^{\mathrm{Re}(g_2(z)-1)} \\ &< e^{\delta_2(z)} = \frac{1}{d_n}, \qquad z \in F_n. \end{aligned}$$

(g) Es folgt für $z \in F_n$ – unter Beachtung, dass $\frac{1}{d_n} \leq \frac{1}{2}$ ist, und für jedes $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ die Abschätzung $e^{\varepsilon} - 1 \leq 2\varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} |e^{l(z)} - e^{h_2(z)}| &= |e^{l(z)}| \cdot |e^{h_2(z)-l(z)} - 1| \\ &= |R_n(z)| \cdot \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(h_2(z) - l(z))^{\nu}}{\nu!}\right| \\ &\leq \max_{F_n} |R_n(z)| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|h_2(z) - l(z)|^{\nu}}{\nu!} \\ &< d_n \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{d_n})^{\nu}}{\nu!} = d_n \cdot (e^{\frac{1}{d_n}} - 1) \\ &\leq d_n \cdot \frac{2}{d_n} = 2. \end{aligned}$$

(h) Wegen

$$\left|\frac{Q_n(z - z_n)}{e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)} - e^{h_2(z)}\right| < 2, \quad z \in F_n$$

folgt für die ganze Funktion $\varphi(z) := e^{h_2(z)} \cdot e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)$ und $z \in F_n = \{z : |z - z_n| \leq n\}$

$$\begin{aligned} |Q_n(z - z_n) - \varphi(z)| &< 2 \cdot |e^{g_1(z)-1}| \cdot |P(z)| \\ &< 2 \cdot e^{\delta_1(z)} \cdot c_n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot n \cdot c_n} \cdot c_n = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq n} |Q_n(z) - \varphi(z + z_n)| < \frac{1}{n}.$$

(i) Offensichtlich besitzt die ganze Funktion φ exakt die gleichen Nullstellen wie die Funktion P. Auf Grund der Wahl von P folgen hieraus die ersten drei im Satz geforderten Eigenschaften an die Funktion φ.

3. Die vierte geforderte Eigenschaft zeigt man wie üblich:
Zu gegebenem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und gegebener Funktion $f \in A(K)$ existiert nach dem Satz von Mergelian eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und
$$\max_K |f(z) - Q_{n_k}(z)| < \frac{1}{k}.$$
Für alle hinreichend großen k ist K enthalten in $\{z : |z| \leq n_k\}$, und folglich gilt für diese k
$$\max_K |\varphi(z + z_{n_k}) - f(z)| \leq \max_{|z|\leq n_k} |\varphi(z + z_{n_k}) - Q_{n_k}(z)| + \max_K |Q_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k},$$
d. h. $\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z)$ gleichmäßig auf K $(k \to \infty)$ wie behauptet.

□

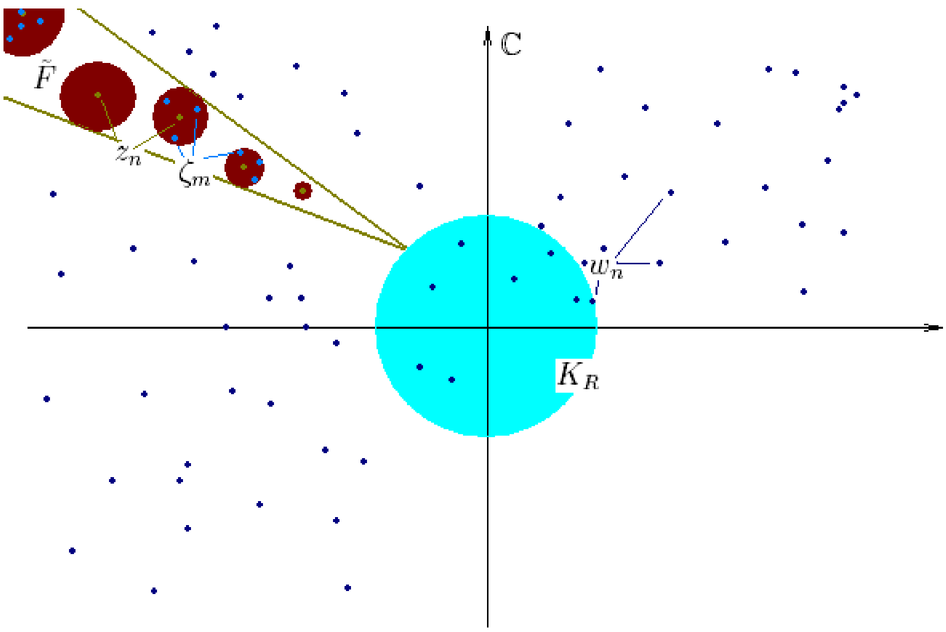

Abbildung 4.1: Beispiel zur Anordnung der Nullstellenpunkte in Satz 4.1'

Beispiel 4.2. *An dieser Stelle möchten wir zunächst beispielhaft erläutern, welche Nullstellenanordnungen gemäß Satz 4.1' für eine translationsuniverselle Funktion möglich sind, siehe hierzu auch Abbildung 4.1 auf der vorigen Seite.*
Dazu wählen wir zunächst ein beliebiges $R > 0$ und betrachten die kompakte Kreisscheibe $K_R := \{z : |z| < R\}$. Von einem beliebigen Randpunkt dieser Menge ausgehend wählen wir sodann zwei Strahlen, die beliebig nahe beieinander liegen können. Lediglich zwischen beiden Strahlen dürfen keine Nullstellenpunkte w_n liegen. Dann ist ebendort die Wahl von Punkten z_n, wie in Satz 4.1' gefordert, möglich.

Bemerkung 4.3. *Anstelle von Nullstellen ist es in analoger Weise möglich, eine translationsuniverselle ganze Funktion φ mit abzählbar vielen vorgeschriebenen w-Stellen ($w \in \mathbb{C}$ beliebig) zu konstruieren.*

Betrachten wir nun „Birkhoff-ähnliche" translationsuniverselle ganze Funktionen φ, d. h. mit Folgen $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ ist die Folge $\{\varphi(a_n z + b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $A(K)$ für alle $K \in \mathfrak{M}$, so können wir für diese vollkommen beliebig Nullstellenpunkte w_n – natürlich ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ – vorschreiben. Es gibt dann stets eine in diesem Sinne universelle ganze Funktion mit diesen und weiteren, nicht vorgeschriebenen, aber bekannten, Nullstellen.

Satz 4.4. *Es seien $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge vorgeschriebener Nullstellenpunkte in $\mathbb{C}$ mit $V(\{w_n\}) = \emptyset$ und $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Ferner sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{C}\backslash\{z = w_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Sodann wählen wir eine Folge von Radien $r_n \in (0, \frac{1}{n})$ sowie offene Kreise $\tilde{F}_n \supset F_n := \{z : |z - b_n| \leq r_n\}$ mit:*

1. *Es ist $\tilde{F}_n \cap \tilde{F}_m = \emptyset$ für $n \neq m$.*
2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $w_n \notin \tilde{F} := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \tilde{F}_j$.*

Es sei $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $(H(\mathbb{C}), d)$. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit den Eigenschaften:

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat φ eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.*
2. *Hat die Funktion $Q_n\left(\frac{n}{r_n}(z - b_n)\right)$ an der Stelle $z = \zeta_m \in \tilde{F}_n$ eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m, so hat φ an ϱ_m ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m.*

3. *Es ist* $\varphi(z) \neq 0$*, falls* $z \neq w_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *und* $z \neq \zeta_m$ $(m \in \mathbb{N})$.

4. *Wir setzen* $a_n := \frac{r_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. *Dann existiert zu jedem Kompaktum* $K \in \mathfrak{M}$ *und jeder Funktion* $f \in A(K)$ *eine Folge* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *mit*
$$\varphi(a_{n_k} z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt im Wesentlichen wörtlich wie der Beweis von Satz 4.1'. Daher geben wir an dieser Stelle lediglich die geringen Unterscheide zu jenem Beweis an; auch benutzen wir dieselben Bezeichnungen.

1. Die abgeschlossene Menge $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ist auch hier eine Arakelian-Menge, und die Menge bestehend aus allen Punkten w_n $(n \in \mathbb{N})$ und $\zeta_m (m \in \mathbb{N})$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Deshalb existiert nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz eine ganze Funktion P, für die gilt:

   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.
   - Für alle $m \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m an ζ_m.
   - Es ist $P(z) \neq 0$, falls $z \neq w_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $z \neq \zeta_m$ $(m \in \mathbb{N})$.

2. Wörtlich wie im zweiten Beweisschritt von Satz 4.1' wenden wir nun dreimal den Satz von Arakelian an, allerdings in (c) auf die Funktion
$$R_n(z) := \frac{Q_n\left(\frac{n}{r_n}(z - b_n)\right)}{e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)}, \quad z \in \tilde{F}_n,$$
welche gemäß der Wahl von P holomorph und nullstellenfrei in $\tilde{F}_n$ ist. Die in Schritt (h) definierte ganze Funktion
$$\varphi(z) := e^{h_2(z)} \cdot e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)$$
erfüllt dann
$$\max_{|z-b_n|\leq r_n} \left| Q_n\left(\frac{n}{r_n}(z - b_n)\right) - \varphi(z)\right| < \frac{1}{n},$$
was äquivalent ist zu
$$\max_{|w|\leq n} |Q_n(w) - \varphi(a_n w + b_n)| < \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

3. Es ist ersichtlich, dass φ die ersten drei Eigenschaften erfüllt. Die vierte folgt aus (4.1), und weil nach dem Satz von Mergelian zu jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jedem $f \in A(K)$ eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert, sodass $Q_{n_k}(z)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig auf K gegen $f(z)$ konvergiert.

□

Weiter fragen wir uns nun, ob diese Konstruktion auch auf Funktionen angewendet werden kann, die in beliebigen Gebieten G translationsuniversell sind. Dies ist möglich und führt uns zu einem Analogon von Satz 2.4, welches auch Aussagen über die Nullstellen einer in einem beliebigen Gebiet G T-universellen Funktion macht.

Satz 4.5. *Es seien $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge. Ferner seien Punkte w_n in G gegeben, die keinen Häufungspunkt in $G \cup E$ haben, und zugehörige natürliche Zahlen ρ_n. Des Weiteren seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $V(\{b_n\}) = E$.*
Dann existiert eine in G holomorphe Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $K \in \mathfrak{M}$, für alle $f \in A(K)$ und für alle $\zeta \in E$ existieren Teilfolgen $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$a_{m_k} z + b_{n_k} \in G \text{ für alle } z \in K \text{ und alle } k \in \mathbb{N},$$
$$b_{n_k} \to \zeta \quad (k \to \infty),$$
$$\varphi(a_{m_k} z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat φ eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.*

3. *φ hat weitere bekannte Nullstellen $\zeta_m \in G$ mit bekannten Vielfachheiten ϱ_m, deren Lage sich aus der Konstruktion im Beweis ergibt.*

4. *φ hat keine weiteren Nullstellen in G.*

Beweis. 1. Es sei $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen mit den Eigenschaften:

- $H_n \subset H_{n+1}^\circ \subset G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Zu jeder kompakten Menge $K \subset G$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset H_{n_0}$.

Ferner sei $\{\zeta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in E, die in E dicht liegen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine jeweils eine Teilfolge $\{z_\nu^{(k)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Es ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu^{(k)} = \zeta^{(k)}$.
- Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ sind die Punkte $z_\nu^{(1)}, \ldots, z_\nu^{(\nu)}$ paarweise disjunkt und so, dass für eine Teilfolge $\{H_{n_\nu}\}$ von $\{H_n\}$ gilt: $z_\nu^{(k)} \in G_{\nu+1}^\circ \backslash G_\nu$ für $k = 1, \ldots, \nu$, wobei $G_\nu := H_{n_\nu}$.
- In der Menge $\{z = z_\nu^{(k)} : \nu \in \mathbb{N}; k = 1, \ldots, \nu\}$ sind keine Punkte w_n enthalten. *Dies ist möglich, da sich die Punkte w_n nicht gegen Punkte aus E häufen.*

Danach wählen wir mit einer Folge $\{l_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ monoton wachsender natürlicher Zahlen Radien $r_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ $(\nu \in \mathbb{N})$ mit den Eigenschaften:

- Die abgeschlossenen Kreisscheiben
$$D_{\nu,k} := \{z : |z - z_\nu^{(k)}| \leq r_\nu\}$$
sind für $k = 1, \ldots, \nu$ paarweise disjunkt.
- Es gilt $\Omega_\nu := \bigcup\limits_{k=1}^{\nu} D_{\nu,k} \subset G_{\nu+1}^\circ \backslash G_\nu$.
- Wir können offene Kreise $\tilde{D}_{\nu,k} \supset D_{\nu,k}$ bestimmen, die ebenfalls in $G_{\nu+1}^\circ \backslash G_\nu$ liegen, keinen Punkt w_n enthalten, und $\tilde{D}_{\nu,k} \cap \tilde{D}_{\nu,l} = \emptyset$ für $k \neq l$ erfüllen.

Schließlich definieren wir mit diesen Kreisscheiben die folgende in G abgeschlossene Menge
$$F := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu.$$
Dies ist eine Arakelian-Menge in G.

2. Es sei $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $(H(\mathbb{C}), d)$. An dieser Stelle können wir nun konkret angeben, welche weiteren Nullstellen ζ_m die noch zu konstruierende Funktion φ haben wird. Und zwar bestimmen wir für alle $\nu \in \mathbb{N}; k = 1, \ldots, \nu$ alle Punkte $\zeta_m \in \tilde{D}_{\nu,k}$, für die $Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}(\zeta_m - z_\nu^{(k)})\right) = 0$ gilt. Dabei sei ϱ_m jeweils die Vielfachheit der Nullstelle ζ_m. Da die Menge bestehend aus den Punkten $w_n \, (n \in \mathbb{N})$ und $\zeta_m \, (m \in \mathbb{N})$ keinen Häufungspunkt in G besitzt, existiert nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz eine in G holomorphe Funktion P, für die gilt:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ρ_n an w_n.
- Für alle $m \in \mathbb{N}$ hat P eine Nullstelle der Ordnung ϱ_m an ζ_m.
- Es ist $P(z) \neq 0$, falls $z \in G$, $z \neq w_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $z \neq \zeta_m$ $(m \in \mathbb{N})$.

3. Der nächste Beweisschritt ist wörtlich nahezu identisch mit dem zweiten Beweisschritt von Satz 4.1'. Der wesentliche Unterschied besteht in der notwendig gewordenen Doppelindizierung. So wählen wir mit ähnlichen Bezeichnungen in den Schritten (a), (c) und (d) die nachfolgenden auf F holomorphen Funktionen:

$$\delta_1(z) := -\ln(2 \cdot \nu \cdot \max_{D_{\nu,k}} |P(z)|), \quad z \in D_{\nu,k},$$

$$R_{\nu,k}(z) := \frac{Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}(z - z_\nu^{(k)})\right)}{e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)}, \quad z \in \tilde{D}_{\nu,k},$$

$$\delta_2(z) := -\ln\left(\max\left(\max_{D_{\nu,k}} |R_{\nu,k}(z)|\,;\,2\right)\right), \quad z \in D_{\nu,k}.$$

Hierbei ist $R_{\nu,k}$ jeweils holomorph und nullstellenfrei in $\tilde{D}_{\nu,k}$. Die nach dem Satz von Arakelian existierenden Funktionen g_1, g_2, h_1, h_2, sowie φ sind hierbei stets in G holomorph und erfüllen noch die gleichen Abschätzungen. Nach Schritt (h) gilt also für alle $k = 1, \dots, \nu; \nu \in \mathbb{N}$

$$\max_{w \in D_{\nu,k}} \left|\varphi(w) - Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}\left(w - z_\nu^{(k)}\right)\right)\right| < \frac{1}{\nu},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq \frac{1}{r_\nu}} \left|\varphi(a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)}) - Q_\nu(z)\right| < \frac{1}{\nu}. \tag{4.2}$$

4. Die Funktion $\varphi = e^{h_2}\, e^{g_1 - 1}\, P$ besitzt offensichtlich die letztgenannten drei Eigenschaften. Der Nachweis der Translationsuniversalität erfolgt mit (4.2) wörtlich wie im dritten Beweisschritt von Satz 2.4.

$\square$

Schließlich fragen wir uns auch noch, ob ein ähnliches Resultat für Funktionen mit universellen „multiplikativen Translationen“ möglich ist. Diese sind uns bereits in Satz 2.2 begegnet; dort allerdings wurde eine ganze Funktion konstruiert, die gleichzeitig auch universelle „additive Translationen“ besitzt.

Satz 4.6. *Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$, für alle $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ und für alle $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi^{(j)}(a_{n_k} z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

2. *Alle Nullstellen von φ sind bekannt. Ein Teil dieser Nullstellen ist unter gewissen Restriktionen wählbar, während ein anderer Teil sich notwendigerweise aus der Beweiskonstruktion ergibt.*

Beweis. 1. Es sei $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $(H(\mathbb{C}), d)$. Ferner sei $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, aber ebenfalls fest gewählte Folge kompakter Mengen mit $K_n \in \mathfrak{M}, 0 \notin K_n$ derart, dass für alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}, 0 \notin K$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_{n_0}$, vgl. Luh [16], S. 90. Darüber hinaus sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Liste aller Paare (K_ν, Q_μ), in der jedes Paar unendlich oft auftaucht. Wir setzen $\mathcal{L} = \{(K_n^\star, Q_n^\star)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren weiter mit $\alpha_{n,j} \in \{z = a_m, m \in \mathbb{N}\}$ $(j = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$ die Mengen

$$A_{n,j} := \alpha_{n,j} \cdot K_n^\star \quad (j = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}).$$

Dabei gelte

$$n \le |\alpha_{n,0}| < |\alpha_{n,1}| < \cdots < |\alpha_{n,n}| < |\alpha_{n+1,0}| < \ldots,$$

und es seien Jordangebiete $L_{n,j} \supset A_{n,j}$ mit rektifizierbarem Rand $\partial L_{n,j}$ gewählt mit:

- Es gilt $dist(A_{n,j}, \partial L_{n,j}) \ge 1$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j = 0, \ldots, n$ seien alle Mengen $\overline{L_{n,j}}$ paarweise disjunkt, d. h. es gibt Jordangebiete $\tilde{L}_{n,j} \supset \overline{L_{n,j}}$, die ebenfalls alle paarweise disjunkt sind.

Die Menge

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \qquad \text{mit } E_n := A_{n,0} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{L_{n,j}}$$

ist dann eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$.

2. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$
$$F_{n,0}(z) := Q_n^\star \left(\frac{z}{\alpha_{n,0}} \right),$$
und definieren weiter für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j = 1, \dots, n$ die Funktionen $F_{n,j}(z)$ als eine zunächst beliebige aber feste Stammfunktion der Ordnung j zu $Q_n^\star \left(\frac{z}{\alpha_{n,j}} \right)$, d. h.
$$\frac{d^j}{dz^j} F_{n,j}(z) = Q_n^\star \left(\frac{z}{\alpha_{n,j}} \right).$$
In Kenntnis der Beweismethodik aus den vorangegangen Sätzen bemerken wir bereits an dieser Stelle, dass die Nullstellen von $F_{n,j}$ auf den Mengen $\tilde{L}_{n,j}$ mittels der nachfolgenden Konstruktion die notwendigen Nullstellen der universellen Funktion φ sein werden. Für $j \neq 0$ können die Funktionen $F_{n,j}$ hierbei wegen der Beschränktheit von $\tilde{L}_{n,j}$ als nullstellenfrei auf dieser Menge angenommen werden. Die Folge $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ bestehe aus allen Punkten w mit $w \in \tilde{L}_{n,j}$ und $F_{n,j}(w) = 0$ für ein Paar (n, j) mit $n \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, n$. Ferner gebe ϱ_m erneut die Ordnung der Nullstelle ζ_m an.
Wir können weitere Nullstellenpunkte w_n mit Ordnungen ρ_n vorgeben, die alle in der Menge
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=0}^{n} \tilde{L}_{n,j}$$
nicht enthalten sein dürfen und $V(\{w_n\}) = \emptyset$ erfüllen müssen. Nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz existiert auch in dieser Situation eine ganze Funktion P, die an den oben genannten Stellen ζ_m und w_n Nullstellen mit der vorgeschriebenen Ordnung ϱ_m bzw. ρ_n hat und sonst weiter keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt.

3. Der nächste Beweisschritt ist wiederum wörtlich nahezu identisch mit dem zweiten Beweisschritt von Satz 4.1'. So wählen wir mit ähnlichen Bezeichnungen in den dortigen Schritten (a), (c) und (d) die nachfolgenden Konstanten und auf E holomorphen Funktionen:
$$c_{n,j} := \begin{cases} \max_{A_{n,0}} |P(z)| & , j = 0 \\ \max_{\overline{L_{n,j}}} |P(z)| & , j \neq 0 \end{cases},$$
$$\delta_1(z) := \begin{cases} -\ln(2\, n\, c_{n,0}) & , z \in A_{n,0} \\ -\ln(2\, n\, j!\, length(\partial L_{n,j})\, c_{n,j}) & , z \in \overline{L_{n,j}}, j = 1, \dots, n \end{cases},$$

$$R_{n,j}(z) := \frac{F_{n,j}(z)}{e^{g_1(z)-1} \cdot P(z)} \text{ ist holomorph und nullstellenfrei in } \tilde{L}_{n,j},$$

$$d_{n,j} := \begin{cases} \max\left(\max_{A_{n,0}} |R_{n,0}(z)|\,;\, 2\right) & , j = 0 \\ \max\left(\max_{\overline{L_{n,j}}} |R_{n,j}(z)|\,;\, 2\right) & , j \neq 0 \end{cases},$$

$$\delta_2(z) := \begin{cases} -\ln d_{n,0} & , z \in A_{n,0} \\ -\ln d_{n,j} & , z \in \overline{L_{n,j}} \end{cases}.$$

Nach dem Satz von Arakelian existieren ganze Funktionen g_1, g_2, h_1, h_2 und φ, die auch die gleichen Abschätzungen wie ebendort erfüllen. Konkret erfüllt die Funktion φ somit die folgenden beiden Abschätzungen

$$\max_{A_{n,0}} \left| \varphi(z) - Q_n^\star\left(\frac{z}{\alpha_{n,0}}\right) \right| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und}$$

$$\max_{\overline{L_{n,j}}} |\varphi(z) - F_{n,j}(z)| < \frac{1}{n \cdot j! \cdot length(\partial L_{n,j})} \quad (n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n),$$

woraus wörtlich wie im vierten Beweisschritt von Satz 2.2 folgt, dass φ die erste geforderte Eigenschaft erfüllt. Da $\varphi = e^{h_2}\, e^{g_1 - 1}\, P$ offensichtlich dieselben Nullstellen wie P besitzt, sind diese alle bekannt und auch bedingt wählbar, wie wir im zweiten Schritt gesehen haben.

□

Bemerkung 4.7. *1. Nach dem Satz von Mergelian ist die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ eine mögliche Wahl für die Folge $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in den Sätzen 4.1', 4.4, 4.5, sowie 4.6.*

2. *Es ist in allen vorangestellten Sätzen stets möglich, keine oder nur endlich viele Nullstellenpunkte w_n vorzuschreiben.*

3. *Mit Lemma 2.1 folgt, dass alle Ableitungen der in Satz 4.1' konstruierten Funktion ebenfalls translationsuniversell sind.*

4. *Kombinieren wir in einer weiteren Konstruktion jene aus den Beweisen der Sätze 4.1' und 4.6, so erhalten wir eine ganze Funktion mit den Universalitätseigenschaften aus Satz 2.2, deren Nullstellen alle bekannt und bedingt wählbar sind.*

Als eine schöne Anwendung des obigen Satzes 4.1' zeigen wir nun, dass es translationsuniverselle Funktionen im Sinne Birkhoffs gibt, die eine regelmäßige Verteilung der Nullstellen besitzen. Hierfür bezeichne $N_\varphi(r)$ die Anzahl der Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) der betrachten Funktion φ auf der Menge $\{z : |z| \leq r\}$.

Satz 4.8. *Es sei* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beliebige Folge von Translationspunkten in* $\mathbb{C}$ *mit* $z_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. *Ferner seien* $c, q \in (0, \infty)$ *vorgeschrieben. Dann existiert eine ganze Funktion* φ *mit den Eigenschaften:*

1. *Es gilt*
$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_\varphi(r)}{r^q} = c. \tag{4.3}$$

2. *Zu jedem Kompaktum* $K \in \mathfrak{M}$ *und jeder Funktion* $f \in A(K)$ *existiert eine Folge* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *natürlicher Zahlen mit*
$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Wie üblich sei $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Für die Translationspunkte z_n sei

$$F_n := \{z : |z - z_n| \le n\};$$

ferner sei $\tilde{F}_n := \{z : |z - z_n| < n + \varepsilon\}$ mit einem $\varepsilon > 0$. Des Weiteren bezeichnen wir für $M \in \mathbb{N}$

$$m_M := 1 + \frac{1}{M^{\frac{q}{2}}}.$$

Indem wir eine geeignete Teilfolge der Translationspunkte bilden, die wir zur Vereinfachung wieder $\{z_n\}$ nennen, und gegebenenfalls Nullstellenpunkte w_n gemäß den Vorgaben von Satz 4.1' wählen, erhalten wir mit eben diesem Satz eine ganze Funktion φ, die T-universell bezüglich der Folge $\{z_n\}$ ist, also die zweite geforderte Eigenschaft erfüllt, und der zusätzlichen Forderung

$$a_M := c \cdot M^q \le N_\varphi(M) \le m_M \cdot c \cdot M^q =: b_M \tag{4.4}$$

für alle $M \in \mathbb{N}$ genügt. Dies ist möglich, da zum einen die Polynome $Q_n(\cdot - z_n)$ bereits eine vorgegebene – und natürlich endliche – Anzahl ρ_n an Nullstellen, die unabhängig von der konkreten Auswahl des Translationspunktes z_n ist, auf der Menge $\tilde{F}_n$ besitzen. Zum anderen konvergiert für $M \to \infty$ die Differenz $\Delta_M := b_M - a_M$ entsprechend der Wahl von m_M gegen ∞. Falls nötig wählen wir also zusätzliche Nullstellenpunkte w_n aus, um stets die linke Ungleichung in (4.4) etwa mit $N_\varphi(M) = [a_M] + 1$ zu realisieren. Gleichzeitig „überspringen" wir soviele z_n bis die „Lücke" zwischen $[a_M] + 1$ und b_M „groß genug" für die zuvor bestimmte Nullstellenanzahl ρ_n ist.
Aufgrund der Wahl von m_M und (4.4) folgt bereits

$$\lim_{M\in\mathbb{N}, M\to\infty} \frac{N_\varphi(M)}{M^q} = c,$$

sowie ferner mit $M_r := [r]$ und

$$\frac{N_\varphi(M_r)}{(M_r)^q}\left(\frac{M_r}{r}\right)^q \le \frac{N_\varphi(r)}{r^q} \le \frac{N_\varphi(M_r+1)}{(M_r+1)^q}\left(\frac{M_r+1}{r}\right)^q$$

die Gültigkeit von (4.3). □

Mit Hilfe eines grundlegenden Resultats über die Zusammenhänge zwischen Nullstellenanzahl und der Wachstumsordnung einer ganzen Funktion, welches auf der Jensenschen Formel beruht, erhalten wir für die Wachstumsordnung ρ einer jeden Funktion φ aus Satz 4.8

$$\rho \ge \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln N_\varphi(r)}{\ln r} \ge q.$$

4.2 Die Picard-Eigenschaft T-universeller Funktionen

In einer ersten und sehr einfachen Bemerkung zeigen wir, dass eine gewisse Beziehung zwischen den Nullstellenpunkten w_n und den Verschiebungspunkten z_n erfüllt sein muss, damit die Existenz einer translationsuniversellen ganzen Funktion überhaupt möglich ist.

Bemerkung 4.9. *Die Nullstellenpunkte w_n und die Verschiebungspunkte z_n seien so gewählt, dass ein Punkt ζ existiert mit der Eigenschaft, dass bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ als Ausnahmen*

$$\zeta + z_n = w_{m_n} \qquad \text{für ein } m_n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dann existiert keine T-universelle ganze Funktion φ im Sinne Birkhoffs.

Beweis. Angenommen es gäbe in dieser Situation eine T-universelle ganze Funktion φ. Dann gilt $\varphi(\zeta + z_n) = \varphi(w_{m_n}) = 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Eine Funktion $f \in A(K)$, die auf einem gegebenen Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ mit $\zeta \in K$ durch eine Folge der Form $\{\varphi(z + z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig gut approximierbar ist, müsste somit $f(\zeta) = 0$ erfüllen. □

Es wird sich herausstellen, dass T-universelle Funktionen in „großem“ Maße Nullstellen besitzen müssen. Zuvor benötigen wir jedoch den Begriff eines Nullstellenhäufungspunktes, zunächst für allgemeine Funktionenfolgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4.10. *Die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ seien holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wir bezeichnen mit*

$$H(\{f_n\}) := \{z_0 \in \bar{G} : \text{zu jeder Umgebung } U \text{ von } z_0 \text{ existieren unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit: } f_n \text{ besitzt eine Nullstelle in } U \cap G\}$$

*die Menge der **Nullstellenhäufungspunkte** von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Unter Verwendung des Satzes von Rouché ist es möglich, die folgende grundlegende Charakterierung eines Nullstellenhäufungspunktes, sowie den Satz von Hurwitz zu beweisen. Hierauf verzichten wir jedoch in dieser Arbeit.

Satz 4.11. *Die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ seien holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und es gelte*

$$f_n(z) \to f(z) \not\equiv 0 \ \text{ kompakt auf } G \quad (n \to \infty).$$

Es sei $z_0 \in G$. Dann ist $z_0 \in H(\{f_n\})$ genau dann, wenn $f(z_0) = 0$ gilt.

Satz 4.12 (Hurwitz)**.** *Es seien alle Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ holomorph und nullstellenfrei im Gebiet G, und es gelte*

$$f_n(z) \to f(z) \ \text{ kompakt auf } G \quad (n \to \infty).$$

Dann gilt entweder $f(z) \equiv 0$ oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

Nach dem Identitätssatz ist sowieso klar, dass eine translationsuniverselle ganze Funktion höchstens abzählbar viele Nullstellen in der komplexen Ebene haben kann, die darüber hinaus keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzen. Sie besitzt aber tatsächlich stets abzählbar viele, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz 4.13. *Es seien $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen und φ eine translationsuniverselle ganze Funktion im Sinne des Birkhoff-Satzes, d. h. zu jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jedem $f \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \ \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Dann gilt:

1. *$H(\{\varphi^{(\nu)}(z + z_n)\}) = \mathbb{C}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$.*

2. *φ nimmt jedes $w \in \mathbb{C}$ an abzählbar vielen Punkten $\zeta_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ als Funktionswert an. Diese Punktmenge besitzt keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Insbesondere besitzt φ somit abzählbar viele Nullstellen.*

3. *Es sei $g(z) \not\equiv 0$ eine beliebige ganze Funktion und die Nullstellen von g in $\{z : |z| \leq m\}$ seien g_i $(1 \leq i \leq p := p(m))$. Ferner wählen wir zu jedem $i \in \{1, \ldots, p\}$ ein beliebig kleines $\varepsilon_i > 0$ und betrachten das Kompaktum*

$$K := \{z : |z| \leq m\} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \{z : |z - g_i| < \varepsilon_i\}.$$

Dann existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit:
$\varphi(z + z_{n_k})$ besitzt keine Nullstelle in K.

Beweis. 1. Es sei $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ beliebig. Ferner wählen wir mit einem beliebigen $r > 0$ die Menge $B := B_r(\zeta) := \{z : |z - \zeta| < r\}$. Das Kompaktum $K := \bar{B}$ ist trivialerweise eine Mergelian-Menge, und $f(z) := (z - \zeta)^{\nu+1}$ erfüllt $f \in A(K)$, da f sogar eine ganze Funktion ist. Gemäß der Voraussetzung an φ existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty),$$

woraus unmittelbar

$$\varphi^{(\nu)}(z + z_{n_k}) \to f^{(\nu)}(z) \text{ kompakt auf } B \quad (k \to \infty)$$

folgt. Da $f^{(\nu)}(\zeta) = 0$ gilt, erhalten wir mit Satz 4.11

$$\zeta \in H(\{\varphi^{(\nu)}(z + z_{n_k})\}) \subset H(\{\varphi^{(\nu)}(z + z_n)\}).$$

Weil ν und ζ beliebig waren, gilt die erste Aussage.

2. Es sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig, so wählen wir $K := \bar{\mathbb{D}} \in \mathfrak{M}$ und als Funktion $f(z) := z + w$. Wegen $f \in A(K)$ und der gemachten Voraussetzung existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to z + w \text{ gleichmäßig auf } \bar{\mathbb{D}} \quad (k \to \infty).$$

Wegen $g(z) \not\equiv 0$ und $g(0) = 0$ existiert nach dem Satz von Hurwitz ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:
$\varphi(z+z_{n_k})-w$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{D}$ für alle $k \geq k_0$, diese heiße ζ_k. (Existiert ein solches k_0 nicht, so würde eine Teilfolge

$$\{\varphi(z + z_{n_{k_\nu}}) - w\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

von in $\mathbb{D}$ nullstellenfreien Funktionen auf $\mathbb{D}$ kompakt gegen $g(z)$ konvergieren. Dies würde wegen den oben genannten Eigenschaften von g

einen Widerspruch zum Satz von Hurwitz bedeuten.)
Wir erhalten

$$\varphi(\zeta_k + z_{n_k}) = w \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei die Menge

$$\{z = \zeta_k + z_{n_k}, k \geq k_0\}$$

wegen der Unbeschränktheit der Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der Beschränktheit der Folge $\{\zeta_k\}_{k\geq k_0}$ abzählbar viele Elemente enthält. Jedes $w \in \mathbb{C}$ wird somit an mindestens abzählbar vielen Stellen als Funktionswert von φ angenommen. Die Menge aller Punkte, an denen die Funktion φ den Wert w annimmt, besitzt nach dem Identitätsatz keine Häufungspunkte.

3. Da φ „Birkhoff-translationsuniversell" und g eine ganze Funktion ist, existiert eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit:

$$\varphi(z + z_{n_k}) \to g(z) \not\equiv 0 \text{ kompakt auf } \{z : |z| < m+1\} \quad (k \to \infty).$$

Es sei ein $\tilde{z}$ mit $|\tilde{z}| \leq m$ und $g(\tilde{z}) \neq 0$ gegeben. Nach Satz 4.11 gilt $\tilde{z} \notin H(\{\varphi(z + z_{n_k})\})$, also existiert eine Umgebung $U(\tilde{z})$ (ohne Einschränkung offen wählbar) mit der Eigenschaft: $\varphi(z + z_{n_k})$ besitzt eine Nullstelle in $U(\tilde{z}) \cap \{z : |z| < m+1\}$ für nur endlich viele $k \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$K \subset \{\tilde{z} : |\tilde{z}| \leq m, g(\tilde{z}) \neq 0\} \subset \bigcup \{U(\tilde{z}) : |\tilde{z}| \leq m, g(\tilde{z}) \neq 0\}.$$

Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d. h. mit $|\tilde{z}_j| \leq m$ $(1 \leq j \leq q)$ und $g(\tilde{z}_j) \neq 0$ gilt

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{q} U(\tilde{z}_j).$$

Wie im vorigen Schritt existiert ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit: $\varphi(z + z_{n_k})$ besitzt keine Nullstelle in $U(\tilde{z}_j) \cap \{z : |z| < m+1\}$ für alle $k \geq k_j$. Setzen wir $\tilde{k} := \max_{1\leq j\leq q} k_j$, so hat die Funktion $\varphi(z + z_{n_k})$ für alle $k \geq \tilde{k}$ keine Nullstelle in K.

□

Bemerkung 4.14. *Als Folgerung aus dem Großen Satz von Picard wissen wir, dass eine ganze transzendente Funktion jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ unendlich oft annimmt - mit* höchstens *einer Ausnahme. „Birkhoff-universelle" Funktionen nehmen jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ unendlich oft an und besitzen wegen der*

zweiten Eigenschaft aus Satz 4.13 keinen *solchen Ausnahmewert.*
Dementsprechend können alle Funktionen, die mindestens einen Wert $w \in \mathbb{C}$ überhaupt nicht oder nur endlich oft annehmen, nicht T-universell sein. $f(z) = e^z$ und $g(z) = e^{h(z)}$ mit einer beliebigen ganzen Funktion h sind Beispiele für Funktionen, die aufgrund dieses notwendigen Kriteriums als mögliche T-universelle ganze Funktionen ausscheiden. Sie besitzen beide den Picardschen Ausnahmewert 0, den sie als Funktionswert nicht annehmen.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass eine ganze Funktion, die universell im Sinne Birkhoffs ist, nicht nullstellenfrei sein kann, überrascht uns die Tatsache noch mehr, dass es ganze, nullstellenfreie Funktionen gibt, deren Ableitung Birkhoff-translationsuniversell sind. Der Beweis erfolgt erneut sehr analog zum dem von Satz 4.1'.

Satz 4.15. *Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge unbeschränkter komplexer Zahlen. Dann existiert eine ganze Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *φ besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

2. *Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$\varphi'(z + z_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

Beweis. 1. Zunächst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Punkte z_n so gewählt sind, dass für die Mengen

$$F_n := \{z : |z - z_n| \leq n + 1\},$$
$$\tilde{F}_n := \{z : |z - z_n| < n + 1 + \varepsilon\} \text{ mit einem beliebig kleinen } \varepsilon > 0$$

$\tilde{F}_n \cap \tilde{F}_m = \emptyset$ für $n \neq m$ gilt. Die Menge $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ist wiederum eine Arakelian-Menge in $\mathbb{C}$ und $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne wie üblich eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

2. Wir setzen

$$\delta_1(z) := -\ln(2 \cdot n(n+1)), \quad z \in F_n.$$

Da dies eine in F holomorphe Funktion ist, existiert nach dem Arakelianschen Approximationssatz eine ganze Funktion g_1 mit

$$|\delta_1(z) - g_1(z)| < 1, \quad z \in F.$$

Ferner bestimmen wir mit $G_n(z)$ eine Stammfunktion zu $Q_n(z - z_n)$, d. h.

$$\frac{d}{dz} G_n(z) = Q_n(z - z_n)$$

mit der zusätzlichen Forderung $G_n(z) \neq 0$ für alle $z \in \tilde{F}_n$. Falls dies zunächst nicht gilt, betrachten wir

$$\tilde{G}_n(z) = G_n(z) + 1 + \max_{\tilde{F}_n} |G_n(z)|$$

anstelle von G_n. Hiermit definieren wir

$$R_n(z) := \frac{G_n(z)}{e^{g_1(z)-1}}, \quad z \in \tilde{F}_n,$$

eine in $\tilde{F}_n$ holomorphe und nullstellenfreie Funktion, sodass Funktionen $\log R_n(z)$ existieren, die holomorph in $\tilde{F}_n \supset F_n$ sind, mit $e^{\log R_n(z)} = R_n(z)$. Ferner ist die Funktion

$$l(z) := \log R_n(z), \quad z \in F_n$$

in F holomorph.

3. Setzen wir

$$\delta_2(z) := -\ln\left(\max(\max_{z \in F_n} |R_n(z)|; 2)\right), \quad z \in F_n,$$

so existieren nach dem Satz von Arakelian eine ganze Funktion g_2 mit

$$|\delta_2(z) - g_2(z)| < 1, \quad z \in F,$$

sowie zur ebenfalls in F holomorphen Funktion $\frac{l(z)}{e^{g_2(z)-1}}$ eine weitere ganze Funktion h_1 mit

$$\left| \frac{l(z)}{e^{g_2(z)-1}} - h_1(z) \right| < 1, \quad z \in F.$$

Insgesamt erfüllt die ganze Funktion $h_2(z) := h_1(z) \cdot e^{g_2(z)-1}$

$$|e^{l(z)} - e^{h_2(z)}| < 2, \quad z \in F.$$

(Hinsichtlich Rechendetails verweisen wir auf die Beweisschritte 2(f) und 2(g) von Satz 4.1'.)

Hiermit folgt für die ersichtlicherweise nullstellenfreie und ganze Funktion $\varphi(z) := e^{h_2(z)} \cdot e^{g_1(z)-1}$ und $z \in F_n = \{z : |z - z_n| \leq n+1\}$

$$|G_n(z) - \varphi(z)| < 2|e^{g_1(z)-1}| < 2e^{\delta_1(z)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Mit der Cauchyschen Integralformel folgt weiter

$$\max_{|z-z_n|\leq n} |\varphi'(z) - Q_n(z-z_n)| = \max_{|z-z_n|\leq n} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_n|=n+1} \frac{\varphi(t) - G_n(t)}{(t-z)^2} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|t-z_n|=n+1} |\varphi(t) - G_n(t)| \cdot 2\pi(n+1) < \frac{1}{n},$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|w|\leq n} |\varphi'(w+z_n) - Q_n(w)| < \frac{1}{n}. \tag{4.5}$$

4. Zu einem beliebigen Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und einer beliebigen Funktion $f \in A(K)$ existiert nach dem Satz von Mergelian eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodass die Folge $\{Q_{n_k}(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen $f(z)$ konvergiert. Da $K \subset \{w : |w| \leq n_k\}$ für alle hinreichend großen k gilt, folgt zusammen mit (4.5) auch die zweite Aussage.

□

Bemerkung 4.16. *1. Insbesondere zeigt dieser Satz, dass eine Funktion nicht notwendigerweise über eine universelle Eigenschaft ihrer Ableitung verfügen muss, denn die obige Funktion φ ist als nullstellenfreie Funktion wie oben gesehen nicht translationsuniversell.*

2. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis des letzten Satzes folgt für die dortige Funktion φ, dass $\varphi'(z) = \varphi(z) \cdot (h_2'(z) + g_1'(z))$ gilt, wobei der erste Faktor nullstellenfrei ist. Das bedeutet nach Satz 4.13, dass die Funktion h_2' die Funktion g_1' an abzählbar vielen Punkten interpoliert.

3. Mit Lemma 2.1 folgt, dass auch alle weiteren Ableitungen von φ translationsuniversell sind. Denn die in Satz 4.15 konstruierte Funktion erfüllt die im dortigen Lemma mit (A_j) bezeichnete Eigenschaft für $j = 1$, und folglich besitzt sie diese Eigenschaft auch für alle $j \geq 2$.

4. Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Kombinieren wir die Konstruktionen aus den Beweisen der Sätze 4.15 und 4.6, wobei wir in letzterem auf die Mengen $A_{n,0}$ und dortige Approximationen verzichten, *und in beiden Konstruktionen stets nullstellenfreie Stammfunktionen auf den jeweiligen Mengen betrachten, so erhalten wir eine nullstellenfreie ganze Funktion φ mit*

$$\{\varphi^{(j)}(z + z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist dicht in } A(K) \text{ für alle } K \in \mathfrak{M} \text{ und alle } j \in \mathbb{N},$$

und

$$\{\varphi^{(j)}(z_n \cdot z)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist dicht in } A(K) \text{ für alle } K \in \mathfrak{M} \text{ mit } 0 \notin K \text{ und alle } j \in \mathbb{N}.$$

Kapitel 5

Über Nullstellen ableitungsuniverseller Funktionen

Die Klasse der ableitungsuniversellen Funktionen geht auf MacLane [19] zurück und besteht aus ganzen Funktionen φ, für welche eine geeignete Folge $\{\varphi^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ihrer Ableitungen auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen jede beliebig vorgegebene ganze Funktion f konvergiert. Die Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hängt hierbei logischerweise von f ab.
Im Jahre 1994 zeigte Herzog [12], dass es nullstellenfreie ableitungsuniverselle Funktionen gibt. Des Weiteren ist die Existenz ableitungsuniverseller Funktionen mit endlich vielen vorgeschriebenen Nullstellen nicht schwer nachzuweisen, wie folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 5.1. *Es seien endlich viele komplexe Zahlen z_i $(1 \leq i \leq N)$ gegeben. Dann existiert eine ableitungsuniverselle Funktion φ mit $\varphi(z_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, N$.*

Beweis. Es sei φ_0 eine ganze Funktion, die im Sinne von MacLane ableitungsuniversell ist. Ferner sei P_0 ein Polynom, welches φ_0 an den Punkten z_i $(1 \leq i \leq N)$ interpoliert, so liefert $\varphi_0 - P_0$ das Gewünschte. $\square$

Im folgenden Satz zeigen wir, dass wir zu jeder vorgeschriebenen Folge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ von Nullstellen, die natürlich keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ haben darf, eine ableitungsuniverselle Funktion φ konstruieren können, mit $\varphi(z_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Satz 5.2. *Es sei $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $V(\{z_i\}) = \emptyset$.*
Dann existiert eine ganze Funktion φ mit:

- *Es ist* $\varphi(z_i) = 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}_0$.
- *Zu jedem* $K \in \mathfrak{M}$ *und jedem* $f \in A(K)$ *existiert eine Folge natürlicher Zahlen* $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$\varphi^{(m_s)}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (s \to \infty).$$

Beweis. 1. Ohne Einschränkung gelte für die Folge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$

$$0 \le |z_0| \le |z_1| \le \ldots,$$

sodass zu jedem ν ein Index $h_\nu \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\{z_i : i = 0, \ldots, h_\nu\} = \{z_i : i \in \mathbb{N}_0, |z_i| \le \nu - 1\}.$$

Wir betrachten die Lagrange-Polynome

$$L_j^{(\nu)}(z) := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{h_\nu} \frac{z - z_k}{z_j - z_k} \quad (j = 0, \ldots, h_\nu)$$

und setzen

$$M_\nu := \sum_{j=0}^{h_\nu} \max_{|z|\le\nu} |L_j^{(\nu)}(z)|.$$

2. Für eine ganze Funktion $\Phi(z)$ sei $\{\Phi^{(-j)}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge ihrer iterierten Stammfunktionen gemäß

$$\Phi^{(-j)}(z) := \int_0^z \Phi^{(-j+1)}(\zeta)d\zeta \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Nach Luh [16, Lemma 1] gilt $\Phi^{(-j)}(z) \to 0$ kompakt auf $\mathbb{C}$ $(j \to \infty)$. Es sei $\{Q_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, und wir setzen $g_\nu := Grad(Q_\nu)$. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $r_\nu \ge \nu$ mit

$$\max_{|z|\le\nu} |Q_\nu^{(-j)}(z)| < \min\left\{\frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{M_\nu\,\nu^3\,(n_{\nu-1})!}\right\} \quad \text{für alle } j \ge r_\nu. \tag{5.1}$$

Wir beachten, dass die Folge $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ erst im nächsten Schritt definiert wird. Wie wir dort sehen werden, ist die Größe $(n_{\nu-1})!$ an dieser Stelle jedoch stets bekannt.

3. Wir konstruieren induktiv eine Folge $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und zwei Folgen von Polynomen $\{P_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $\{\Pi_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, wobei $P_\nu(z)$ stets vom Grad $\leq h_\nu$ ist, und $l_\nu := Grad(\Pi_\nu)$ sei. Es seien $n_1 = r_1 + 1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}$, $P_1(z) \equiv 0, P_2(z), \ldots, P_{\nu-1}(z)$, sowie $\Pi_1(z) \equiv 0, \Pi_2(z), \ldots, \Pi_{\nu-1}(z)$ für ein $\nu \in \mathbb{N}$ bereits bekannt. Wir setzen

$$n_\nu > \max_{1\leq\mu\leq\nu-1}\{g_\mu + h_\mu + l_\mu\} + r_\nu + n_{\nu-1} + h_\nu$$

und

$$\begin{aligned}
\Omega_\mu(z) &:= Q_\mu^{(-n_\mu)}(z),\\
U_\mu(z) &:= T_{\mu-1}(z) + \Omega_\mu(z) + P_\mu(z),\\
T_\mu(z) &:= T_{\mu-1}(z) + \Omega_\mu(z) + P_\mu(z) + \Pi_\mu(z).
\end{aligned}$$

(a) Es gelte $T_{\nu-1}(z_i) = 0$ für alle $i = 0, \ldots, h_\nu$. Bezüglich des Induktionsanfangs beachten wir, dass $T_1(z) = \Omega_1(z) = Q_1^{(-n_1)}(z)$ mit $Q_1^{(-n_1)}(0) = 0$ gilt. Induktiv konstruieren wir als erstes $P_\nu(z)$, daher betrachten wir zur Funktion $-\Omega_\nu(z) = -Q_\nu^{(-n_\nu)}(z)$ das Lagrange-Interpolationspolynom

$$P_\nu(z) := \sum_{j=0}^{h_\nu}\{-\Omega_\nu(z_j)\}\; L_j^{(\nu)}(z).$$

Folglich gilt:

- $P_\nu(z)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq h_\nu < n_\nu$, also $P_\nu^{(n_\nu)}(z) \equiv 0$.
- Für alle $i = 0, \ldots, h_\nu$ gilt

$$U_\nu(z_i) = T_{\nu-1}(z_i) + \Omega_\nu(z_i) + P_\nu(z_i) = 0.$$

- Ferner ist

$$\begin{aligned}
\max_{|z|\leq\nu}|P_\nu(z)| &\leq \max_{|z|\leq\nu}|\Omega_\nu(z)| \cdot \sum_{j=0}^{h_\nu}\max_{|z|\leq\nu}|L_j^{(\nu)}(z)| \\
&< \frac{1}{M_\nu\,\nu^3\,(n_{\nu-1})!}\cdot M_\nu = \frac{1}{\nu^3\,(n_{\nu-1})!} \leq \frac{1}{\nu^2}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

- Weiter folgt für alle $k \leq \nu - 1$

$$\begin{aligned}
\max_{|z|\leq\nu-1}|P_\nu^{(n_k)}(z)| &= \max_{|z|\leq\nu-1}\left|\frac{n_k!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\nu}\frac{P_\nu(t)}{(t-z)^{n_k+1}}dt\right| \\
&\leq \frac{(n_{\nu-1})!}{2\pi}\max_{|t|=\nu}|P_\nu(t)|\cdot 2\pi\nu \leq \frac{1}{\nu^2}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

(b) Als zweites konstruieren wir nun $\Pi_\nu(z)$. Falls kein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\nu - 1 < |z_i| \le \nu$, so fällt dieser Beweisschritt weg, d. h. wir setzen $\Pi_\nu(z) \equiv 0$. Andernfalls gibt es mindestens eine Nullstelle in $\nu - 1 < |z| \le \nu$, und wir betrachten

$$F_\nu(z) := \prod_{\nu-1<|z_i|\le\nu} E_{j_\nu}\left(\frac{z}{z_i}\right),$$

wobei

$$E_j(z) := (1-z)\exp\left(\sum_{\imath=0}^{j} \frac{z^i}{i}\right)$$

eine sogenannte Weierstraßsche Elementarfunktion sei. Für diese gilt, siehe etwa Rudin [23, Kapitel 15]:

- Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ ist $E_j(z)$ eine ganze Funktion mit einer einfachen Nullstelle an $z = 1$.
- Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ und für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$|1 - E_j(z)| \le |z|^{j+1}.$$

Im Hinblick auf die zweite Eigenschaft dieser Elementarfunktionen, sei $j_\nu \in \mathbb{N}_0$ so groß gewählt, dass gilt:

$$\max_{|z|\le\nu-1} |F_\nu(z) - 1| \le \frac{1}{\nu^3\, b_\nu\, (n_\nu)!} \quad \text{mit } b_\nu := \max_{|z|\le\nu-1} |U_\nu(z)|.$$

Offensichtlich ist $U_\nu(z) \cdot F_\nu(z)$ eine ganze Funktion mit Nullstellen an allen z_i mit $|z_i| \le \nu$. Nach dem Satz von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation existiert zu $\tilde{F}_\nu(z) := U_\nu(z)(F_\nu(z) - 1)$ ein Polynom $\Pi_\nu(z)$ mit

$$\max_{|z|\le\nu} |\Pi_\nu(z) - \tilde{F}_\nu(z)| < \frac{1}{\nu^3 (n_\nu)!},$$

welches $\tilde{F}_\nu(z)$ an allen z_i mit $|z_i| \le \nu$ interpoliert. Für alle z_i mit $|z_i| \le \nu$ folgt damit

$$\begin{aligned} T_\nu(z_i) &= U_\nu(z_i) + \Pi_\nu(z_i) \\ &= U_\nu(z_i) + \tilde{F}_\nu(z_i) + \Pi_\nu(z_i) - \tilde{F}_\nu(z_i) \\ &= (U_\nu F_\nu)(z_i) = 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\max_{|z|\le\nu-1}|\Pi_\nu(z)| &\le \max_{|z|\le\nu-1}|\Pi_\nu(z)-\tilde F_\nu(z)| + \max_{|z|\le\nu-1}|\tilde F_\nu(z)| \\ &< \frac{1}{\nu^3(n_\nu)!} + \max_{|z|\le\nu-1}|U_\nu(z)\cdot(F_\nu-1)(z)| \qquad (5.5)\\ &< \frac{1}{\nu^3(n_\nu)!} + b_\nu\frac{1}{\nu^3\,b_\nu\,(n_\nu)!} = \frac{2}{\nu^3\,(n_\nu)!} \le \frac{2}{\nu^2}.\end{aligned}$$

Weiter folgt für alle $k \le \nu$

$$\begin{aligned}\max_{|z|\le\nu-2}|\Pi_\nu^{(n_k)}(z)| &= \max_{|z|\le\nu-2}\left|\frac{n_k!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\nu-1}\frac{\Pi_\nu(t)}{(t-z)^{n_k+1}}dt\right| \qquad (5.6)\\ &\le \frac{n_\nu!}{2\pi}\max_{|t|=\nu-1}|\Pi_\nu(t)|\cdot 2\pi(\nu-1) \le \frac{2}{\nu^2}.\end{aligned}$$

4. Wir setzen

$$\varphi(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu^{(-n_\nu)}(z) + P_\nu(z) + \Pi_\nu(z).$$

Wegen $n_\nu > r_\nu$, sowie (5.1), (5.2) und (5.5) gilt

$$\max_{|z|\le\nu-1}|Q_\nu^{(-n_\nu)}(z) + P_\nu(z) + \Pi_\nu(z)| < \frac{4}{\nu^2},$$

also ist die obige Reihe kompakt konvergent in $\mathbb{C}$, d. h. φ ist eine ganze Funktion. Des Weiteren gilt

$$T_\nu(z) = \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_\mu^{(-n_\mu)}(z) + P_\mu(z) + \Pi_\mu(z) \to \varphi(z) \ \text{ kompakt auf } \mathbb{C},$$

also besitzt φ wegen (5.4) jedes z_i ($i \in \mathbb{N}_0$) als Nullstelle.

5. Abschließend weisen wir nach, dass φ ableitungsuniversell ist.

   (a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Aufgrund der Wahl von n_k gilt

$$Q_\nu^{(n_k-n_\nu)}(z) \equiv P_\nu^{(n_k)}(z) \equiv \Pi_\nu^{(n_k)}(z) \equiv 0 \qquad \text{für alle } \nu < k$$

und $P_k^{(n_k)}(z) \equiv 0$. Das bedeutet

$$\begin{aligned}\varphi^{(n_k)}(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu^{(n_k-n_\nu)}(z) + P_\nu^{(n_k)}(z) + \Pi_\nu^{(n_k)}(z)\\ &= Q_k(z) + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} Q_\nu^{(n_k-n_\nu)}(z) + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} P_\nu^{(n_k)}(z) + \sum_{\nu=k}^{\infty}\Pi_\nu^{(n_k)}(z).\end{aligned}$$

Erneut aufgrund der Wahl von n_k, sowie wegen (5.1), (5.3) und (5.6) folgt

$$\begin{aligned}
\max_{|z|\le k-2} |\varphi^{(n_k)}(z) - Q_k(z)| &\le \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \max_{|z|\le\nu} |Q_\nu^{(n_k-n_\nu)}(z)| \\
&\quad + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \max_{|z|\le\nu-1} |P_\nu^{(n_k)}(z)| \\
&\quad + \sum_{\nu=k}^{\infty} \max_{|z|\le\nu-2} |\Pi_\nu^{(n_k)}(z)| \\
&\le \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{2}{\nu^2} \\
&\le 4\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \frac{4}{k-1}.
\end{aligned}$$

(b) Es seien nun $K \in \mathfrak{M}$, sowie $f \in A(K)$ beliebig gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert eine Folge $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ mit

$$\max_K |Q_{k_s}(z) - f(z)| < \frac{1}{s}.$$

Für alle genügend großen s gilt $K \subset \{z : |z| \le k_s - 2\}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\max_K |\varphi^{(n_{k_s})}(z) - f(z)| &\le \max_{|z|\le k_s-2} |\varphi^{(n_{k_s})}(z) - Q_{k_s}(z)| \\
&\quad + \max_K |Q_{k_s}(z) - f(z)| \\
&\le \frac{4}{k_s - 1} + \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Mit $m_s := n_{k_s}$ folgt die Behauptung.

□

In diesem Beweis wurde die universelle Funktion nicht direkt mit Hilfe des Satzes von Arakelian erzeugt, sondern als Polynomreihe konstruiert. Als wichtige Hilfsmittel dienten hier die Interpolation mit Lagrange-Polynomen, der Satz von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation, sowie einfache Eigenschaften der Weierstraßschen Elementarfunktionen. In völlig anderem Zusammenhang wurde diese Beweistechnik zuerst von Gehlen [9] angewandt, um Aussagen über die Schärfe eines der Jentzschen Sätze zu treffen.

Kapitel 6

In einem doppelten Sinne universelle Funktionen

Mit der im vorigen Kapitel angewandten Beweistechnik ist es aber auch möglich weitere, sogar in einem doppelten Sinne universelle Funktionen zu konstruieren.
Hierzu benötigen wir erneut den Begriff der Nullstellenhäufungspunkte, welchen wir bereits zu Beginn von Kapitel 4.2 in der Definition 4.10 erläutert haben.
Die beiden folgenden Funktionen φ werden im Einheitskreis $\mathbb{D}$ ableitungs- bzw. translationsuniversell sein. Darüber hinaus existiert zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{D}^c$ eine Folge $\{s_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ der p_k-ten Partialsummen der Potenzreihenentwicklung von φ, für welche gilt, dass A Teilmenge der Nullstellenhäufungspunkt-Menge der Folge $\{s_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Im Komplement des abgeschlossenen Einheitskreises sind beide Mengen sogar identisch.

6.1 Ableitungsuniverselle Funktionen in $\mathbb{D}$

Zunächst betrachten wir die oben beschriebene Problemstellung für ableitungsuniverselle Funktionen.

Satz 6.1. *Es gibt eine Potenzreihe $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ mit Konvergenzradius 1 und den Teilsummen $s_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\, z^\nu$, sodass die folgenden Bedingungen gelten:*

1. *Zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{D}$ mit zusammenhängendem Komplement und jeder Funktion $f \in A(K)$, existiert eine Teilfolge $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit*
$$\varphi^{(m_s)}(z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (s \to \infty).$$

2. *Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{D}^c$, existiert eine Teilfolge $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ (abhängig von A), sodass $A \subset H(\{s_{p_k}\})$ gilt und für alle $z \in (\bar{\mathbb{D}})^c$ gilt*

$$z \in H(\{s_{p_k}\}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in A.$$

Beweis. 1. Wir bezeichnen mit T die Menge aller Punkte in $|z| > 1$ mit rationalen Real- und Imaginärteilen. Ferner sei $M_1^\star, M_2^\star, \ldots$ eine Abzählung aller endlichen Teilmengen von T, und wir definieren die Folge $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mittels $M_{(n,m)} := M_m^\star$; wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$1 \leq m \leq n \quad \text{und} \quad (n,m) := \binom{n}{2} + m,$$

also hat $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Glieder:

$$M_1^\star, M_1^\star, M_2^\star, M_1^\star, M_2^\star, M_3^\star, M_1^\star, M_2^\star, M_3^\star, M_4^\star, \ldots .$$

Weiter nehmen wir an, es sei $M_k := \{z_{k,1}, \ldots, z_{k,m_k}\}$, und wir definieren die Folge $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$R_0 := 1, \quad R_k := \max\{R_{k-1}, |z_{k,1}|, \ldots, |z_{k,m_k}|\} + 1 \text{ für jedes } k \geq 1,$$

sowie eine zweite Folge $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $r_k := 1 - \frac{1}{k+1}$.

2. Für eine ganze Funktion $\Phi(z)$ sei $\{\Phi^{(-j)}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge ihrer iterierten Stammfunktionen gemäß

$$\Phi^{(-j)}(z) := \int_0^z \Phi^{(-j+1)}(\zeta) d\zeta \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Nach Luh [16, Lemma 1] gilt $\Phi^{(-j)}(z) \to 0$ kompakt auf $\mathbb{C}$ $(j \to \infty)$. Es sei $\{Q_k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, und wir setzen $g_k := Grad(Q_k)$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $\tilde{r}_k \geq k$ mit

$$\max_{|z|\leq r_k} |Q_k^{(-j)}(z)| < \frac{1}{k^2} \quad \text{für alle } j \geq \tilde{r}_k. \tag{6.1}$$

Ist etwa

$$Q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{g_k} b_\nu z^\nu,$$

so gilt

$$Q_k^{(-n_k)}(z) = \sum_{\nu=n_k}^{g_k+n_k} \frac{b_{\nu-n_k}}{(\nu - n_k + 1)\cdots\nu}\, z^{\nu},$$

d. h. $Q_k^{(-n_k)}(z)$ ist ein Polynom vom Grad $g_k + n_k$ und einer Nullstelle der Ordnung $\geq n_k$ an $z = 0$. Die Ordnung n_k der Stammfunktion von $Q_k(z)$ wird noch zu wählen sein.

3. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und eine Folge von Polynomen $\{P_k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $h_k := Grad(P_k)$. Des Weiteren sei $T_0(z) \equiv 0$, und wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Omega_k(z) &:= Q_k^{(-n_k)}(z), \\ T_k(z) &:= T_{k-1}(z) + \Omega_k(z) + P_k(z). \end{aligned}$$

Dabei nehmen wir an, dass $T_{k-1}(z)$ in $\{z : 1 \leq |z| \leq R_{k-1}\}$ exakt die Elemente von M_{k-1} als Nullstellen besitze und den Grad j_{k-1} habe; während die Nullstellen von $T_{k-1}(z) + \Omega_k(z)$ in $\{z : 1 \leq |z| \leq R_k\}$ durch die Punkte $w_{k,1}, \ldots, w_{k,l_k}$ gegeben seien, und wir definieren

$$c_k := \max_{|z|\leq r_k} |T_{k-1}(z) + \Omega_k(z)|.$$

Es seien $n_1 = \tilde{r}_1 + 1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, sowie $P_1(z), \ldots, P_{k-1}(z)$ bereits bekannt, so wählen wir zunächst

$$n_k > \max_{1\leq\mu\leq k-1} \{g_\mu + h_\mu\} + \tilde{r}_k + n_{k-1} + j_{k-1}.$$

4. Bevor wir unsere Konstruktion beginnen, erinnern wir noch an einige Basiseigenschaften der von Weierstraß eingeführten Elementarfunktionen

$$E_\mu(z) := (1 - z)\exp(\sum_{j=1}^{\mu} \frac{z^j}{j}),$$

vgl. Rudin [23, Kapitel 15]:

- Für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $E_\mu(z)$ eine ganze Funktion mit nur einer einfachen Nullstelle an $z = 1$.
- Für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$ und alle $|z| < 1$ gilt

$$|1 - E_\mu(z)| \leq |z|^{\mu+1}. \tag{6.2}$$

- Es gilt
$$-E'_\mu(z) = z^\mu \exp(\sum_{j=1}^{\mu} \frac{z^j}{j}).$$
Somit besitzt $E_\mu(z) - 1$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu + 1$ an der Stelle $z = 0$.

Im Hinblick auf die Eigenschaft (6.2) wählen wir $\mu_k \geq j_{k-1}$ so groß, dass die Funktion
$$F_k(z) := \frac{\prod_{j=1}^{m_k} E_{\mu_k}\left(\frac{z}{z_{k\,j}}\right)}{\prod_{j=1}^{l_k} E_{\mu_k}\left(\frac{z}{w_{k\,j}}\right)}$$
die Abschätzung
$$|F_k(z) - 1| \leq \frac{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{c_k\, k^2\, (n_k)!} \quad \text{für alle } z \in \{z : |z| \leq r_k\} \tag{6.3}$$
erfüllt. Offensichtlich besitzt die ganze Funktion
$$H_k(z) := (T_{k-1}(z) + \Omega_k(z))F_k(z) =: T_{k-1}(z) + \Omega_k(z) + \tilde{F}_k(z)$$
in $\{z : 1 \leq |z| \leq R_k\}$ exakt die Elemente von M_k als Nullstellen. Die Nullstellen von $H_k(z)$ in $\mathbb{D}$ sind jene des Polynoms $T_{k-1}(z) + \Omega_k(z)$ in $\mathbb{D}$. Diese heißen $\zeta_{k,1}, \ldots, \zeta_{k,i_k}$, wobei jede Nullstelle entsprechend ihrer Ordnung aufgelistet ist. Insbesondere ist $H_k(z)$ nullstellenfrei auf $\{z : |z| = R_k\}$, also gilt
$$d_k := \min_{|z|=R_k} |H_k(z)| > 0.$$
Unter Verwendung der dritten oben erwähnten Eigenschaft der Weierstraßschen Elementarfunktionen liefert eine einfache Überlegung, dass auch $\tilde{F}_k(z) = (F_k(z) - 1)(T_{k-1}(z) + \Omega_k(z))$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu_k + 1 > j_{k-1}$ an $z = 0$ besitzt.
Nach dem Satz von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation, existiert zu $\tilde{F}_k(z)$ ein Polynom $P_k(z)$ mit
$$|P_k(z) - \tilde{F}_k(z)| < \min\left\{d_k, \frac{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{k^2\, (n_k)!}\right\} \quad \text{für alle } z \in \{z : |z| \leq R_k\},$$
welches $\tilde{F}_k(z)$ an allen Punkten $\zeta_{k,1}, \ldots, \zeta_{k,i_k}, z_{k,1}, \ldots, z_{k,m_k}$, sowie an $z = 0$ mit der Ordnung $\mu_k + 1$ interpoliert.

5. Wir setzen

$$\varphi(z) := \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{(-n_k)}(z) + P_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(z) + P_k(z),$$

und stellen nun einige Eigenschaften zusammen:

(a) $P_k(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu_k + 1 > j_{k-1}$ an $z = 0$. Das bedeutet, $T_{k-1}(z)$ ist gleich $s_{j_{k-1}}(z)$, der j_{k-1}-ten Teilsumme der Potenzreihenentwicklung $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, z^\nu$ von φ.

(b) Mit (6.3) gilt

$$\begin{aligned}
\max_{|z|\leq r_k} |P_k(z)| &\leq \max_{|z|\leq r_k} |P_k(z) - \tilde{F}_k(z)| + \max_{|z|\leq r_k} |\tilde{F}_k(z)| \\
&< \frac{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{k^2\,(n_k)!} + \max_{|z|\leq r_k} |((T_{k-1} + \Omega_k)(F_k - 1))(z)| \\
&\leq \frac{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{k^2\,(n_k)!} + c_k \, \frac{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{c_k\, k^2\,(n_k)!} \\
&= \frac{2\,(r_k - r_k^2)^{n_k+1}}{k^2\,(n_k)!} \leq \frac{2}{k^2}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $n_k \geq \tilde{r}_k$ folgt mit (6.1), sowie wegen $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$, dass φ holomorph in $\mathbb{D}$ ist, also hat die Potenzreihe $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, z^\nu$ mindestens den Konvergenzradius 1.

(c) Weiter folgt für alle $\nu \leq k$

$$\begin{aligned}
\max_{|z|\leq r_k^2} |P_k^{(n_\nu)}(z)| &= \max_{|z|\leq r_k^2} \left| \frac{(n_\nu)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r_k} \frac{P_k(t)}{(t-z)^{n_\nu+1}} dt \right| \\
&\leq \frac{(n_k)!}{2\pi} \max_{|t|=r_k} |P_k(t)| \cdot \frac{1}{(r_k - r_k^2)^{n_k+1}} \cdot 2\pi r_k \\
&\leq \frac{2}{k^2}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

(d) Wegen $|P_k(z) - \tilde{F}_k(z)| < d_k \leq |H_k(z)| = |T_{k-1}(z) + \Omega_k(z) + \tilde{F}_k(z)|$ für alle $z \in \{z : |z| = R_k\}$, erhalten wir nach dem Satz von Rouché, dass die beiden Funktionen

$$T_{k-1}(z) + \Omega_k(z) + \tilde{F}_k(z) = H_k(z)$$

und

$$T_{k-1}(z) + \Omega_k(z) + P_k(z) = T_k(z)$$

die gleiche Anzahl an Nullstellen in $\{z : |z| \leq R_k\}$ haben. Wegen der Interpolationseigenschaften von $P_k(z)$ sind die Nullstellen sogar identisch. Insbesondere besitzt also $T_k(z)$ in $\{z : 1 \leq |z| \leq R_k\}$ exakt die Elemente von M_k als Nullstellen.

(e) Speziell sind für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und alle $i \geq m$ die Nullstellen von $T_{(i,m)}(z) = s_{j_{(i,m)}}(z)$ in $\{z : 1 \leq |z| \leq R_{(i,m)}\}$ exakt die Elemente von $M_m^\star$.
Der Konvergenzradius der Potenzreihe von φ kann daher nicht größer als 1 sein. Wäre der Konvergenzradius $s > 1$, würde für $\nu \to \infty$ die Folge $\{T_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ kompakt auf $S := \{z : |z| < s\} \underset{\neq}{\supset} \mathbb{D}$ gegen $\varphi(z)$ konvergieren, somit wären alle Elemente von $T \cap S$ auch Nullstellen von φ. Aufgrund der Beschaffenheit von T wäre dann $\varphi(z) \equiv 0$.

6. Zunächst weisen wir nach, dass φ ableitungsuniversell in $\mathbb{D}$ ist.

   (a) Es sei $\nu \in \mathbb{N}$ fest. Aufgrund der Wahl von n_ν gilt

$$Q_k^{(n_\nu - n_k)}(z) \equiv P_k^{(n_\nu)}(z) \equiv 0 \quad \text{für alle } k < \nu.$$

Das bedeutet

$$\varphi^{(n_\nu)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{(n_\nu - n_k)}(z) + P_k^{(n_\nu)}(z)$$

$$= Q_\nu(z) + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} Q_k^{(n_\nu - n_k)}(z) + \sum_{k=\nu}^{\infty} P_k^{(n_\nu)}(z).$$

Erneut aufgrund der Wahl von n_ν, sowie wegen (6.1) und (6.4) folgt

$$\max_{|z|\leq r_\nu^2} |\varphi^{(n_\nu)}(z) - Q_\nu(z)|$$

$$\leq \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \max_{|z|\leq r_k} |Q_k^{(n_\nu - n_k)}(z)| + \sum_{k=\nu}^{\infty} \max_{|z|\leq r_k^2} |P_k^{(n_\nu)}(z)|$$

$$\leq \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{2}{k^2}$$

$$\leq 3 \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{3}{\nu - 1}.$$

(b) Es seien nun ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ mit $K \subset \mathbb{D}$, sowie eine Funktion $f \in A(K)$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert eine Folge $\{\nu_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ mit

$$\max_K |Q_{\nu_s}(z) - f(z)| < \frac{1}{s}.$$

Für alle hinreichend großen s gilt $K \subset \{z : |z| \leq r_{\nu_s}^2\}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\max_K |\varphi^{(n_{\nu_s})}(z) - f(z)| \\
&\qquad \leq \max_{|z|\leq r_{\nu_s}^2} |\varphi^{(n_{\nu_s})}(z) - Q_{\nu_s}(z)| + \max_K |Q_{\nu_s}(z) - f(z)| \\
&\qquad \leq \frac{3}{\nu_s - 1} + \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Mit $m_s := n_{\nu_s}$ folgt die Behauptung.

7. Abschließend weisen wir nach, dass φ auch die zweite geforderte Eigenschaft besitzt.
Es sei $A \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge mit $A \subset \mathbb{D}^c$. Wir werden nun eine Teilfolge $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ derart auswählen, dass $A \subset H(\{s_{p_k}\})$ und für alle $z \in (\bar{\mathbb{D}})^c$

$$z \in H(\{s_{p_k}\}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in A$$

gilt. Für ein $k \geq 1$ seien die Indizes $p_1 < \cdots < p_{k-1}$ bereits bestimmt. Wir überdecken $A \cap \{z : 1 \leq |z| \leq k\}$ mit einer endlichen Anzahl offener Kreise $U_{k,1}, \ldots, U_{k,\nu_k}$ mit Radius $\frac{1}{k}$ derart, dass

$$U_{k,j} \cap A \neq \emptyset \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq \nu_k,$$

und wir wählen paarweise verschiedene Punkte

$$z_{k,j} \in U_{k,j} \cap T \quad (1 \leq j \leq \nu_k).$$

Dann existiert ein Index $m(k)$ mit $M^\star_{m(k)} = \{z_{k,1}, \ldots, z_{k,\nu_k}\}$. Aus der Konstruktion von $\{T_k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ sahen wir in Beweisschritt 5 (e), dass für alle $i \geq m(k)$ die Nullstellen von $T_{(i,m(k))}(z) = s_{j_{(i,m(k))}}(z)$ in der Menge $\{z : 1 \leq |z| \leq R_{(i,m(k))}\}$ exakt die Punkte $z_{k,1}, \ldots, z_{k,\nu_k}$ sind. Schließlich wählen wir $i(k)$ so groß, dass $R_{(i(k),m(k))} \geq k$ und $p_k := j_{(i(k),m(k))} > p_{k-1}$ gelten.
Wir bezeichnen mit $U_\delta(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < \delta\}$ die δ-Umgebung

von z. Es sei $z \in A$. Gemäß unserer Konstruktion von $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten wir für alle $k > |z|$, dass s_{p_k} eine Nullstelle in $U_{2/k}(z)$ hat. Folglich gilt $A \subset H(\{s_{p_k}\})$.
Es sei nun $z \in (A \cup \bar{\mathbb{D}})^c$, d. h. $2\delta := dist(z, A \cup \bar{\mathbb{D}}) > 0$. Dann hat s_{p_k} keine Nullstelle in $U_\delta(z)$ für $k > \max\{\frac{2}{\delta}, |z|\} + \frac{1}{k}$. Damit ist das Resultat bewiesen.

□

6.2 T-universelle Funktionen in $\mathbb{D}$

Nun betrachten wir dieselbe Fragestellung wie oben für im Einheitskreis translationsuniverselle Funktionen. Translationsuniversell ist dabei wie in Kapitel 2.3 zu verstehen.

Satz 6.2. *Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann existieren eine Potenzreihe $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit Konvergenzradius 1 und den Teilsummen $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, sowie eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$, sodass die folgenden Bedingungen gelten:*

1. *Zu jedem Kompaktum K mit zusammenhängendem Komplement, jeder Funktion $f \in A(K)$ und jedem $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, existieren Teilfolgen $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen (abhängig von K, f, ζ) mit*

$$a_{m_k} z + b_{n_k} \in \mathbb{D} \text{ für alle } z \in K \text{ und alle } k \in \mathbb{N},$$

$$b_{n_k} \to \zeta \quad (k \to \infty),$$

$$\varphi(a_{m_k} z + b_{n_k}) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \quad (k \to \infty).$$

2. *Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{D}^c$, existiert eine Teilfolge $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ (abhängig von A), sodass $A \subset H(\{s_{p_k}\})$ gilt und für alle $z \in (\bar{\mathbb{D}})^c$ ist*

$$z \in H(\{s_{p_k}\}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in A.$$

Beweis. 1. Wie im ersten Beweisschritt des vorigen Satzes wählen wir eine Folge $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Mengen und eine Folge $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Radien. Dazu bezeichnen wir mit T die Menge aller Punkte in $|z| > 1$ mit rationalen Real- und Imaginärteilen. Ferner sei $M_1^\star, M_2^\star, \ldots$ eine Abzählung aller endlichen Teilmengen von T und wir betrachten erneut $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$M_{(n,m)} := M^\star_m, \qquad \text{wobei } m,n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \le m \le n, \\ \text{sowie } (n,m) := \binom{n}{2} + m.$$

Jede Menge M_k sei gegeben durch $M_k := \{z_{k,1}, \ldots, z_{k,m_k}\}$, und wir definieren die Folge $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mittels

$$R_0 := 1, \quad R_k := \max\{R_{k-1}, |z_{k,1}|, \ldots, |z_{k,m_k}|\} + 1 \quad \text{für jedes } k \ge 1.$$

2. Wir wählen ferner eine zweite Folge $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $r_k := 1 - \frac{1}{k+1}$ und eine Folge $\{\zeta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten in $\partial\mathbb{D}$, die dicht in $\partial\mathbb{D}$ ist. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Folge $\{z_\nu^{(k)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit:

   - $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu^{(k)} = \zeta^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
   - Es existiert eine Folge $\{l_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, sodass die zugehörigen Radien $\tilde{r}_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ die Eigenschaft haben, dass die abgeschlossenen Kreisscheiben
   $$D_{\nu,k} := \{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le \tilde{r}_\nu\}$$
   für $k = 1, \ldots, \nu$ alle paarweise disjunkt sind, und dass gilt
   $$\bigcup_{k=1}^{\nu} D_{\nu,k} \subset \{z : r_\nu < |z| < r_{\nu+1}\}.$$

   Betrachten wir $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_3^{(1)}, z_3^{(2)}, z_3^{(3)}, \ldots$, so ergibt dies die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Es sei $\{Q_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Wir konstruieren nun induktiv zwei Folgen von Polynomen $\{P_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $\{\Pi_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. Wir beginnen mit $P_0(z) \equiv T_0(z) \equiv 0$ und setzen

   $$\Omega_\nu(z) := P_\nu(z) - P_{\nu-1}(z), \\ T_\nu(z) := T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z) + \Pi_\nu(z).$$

   Dabei nehmen wir an, dass $T_{\nu-1}(z)$ in $\{z : 1 < |z| \le R_{\nu-1}\}$ exakt die Elemente von $M_{\nu-1}$ als Nullstellen besitze und den Grad $j_{\nu-1}$ habe. Die

Nullstellen des Polynoms $T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z)$ in $\{z : 1 < |z| \leq R_\nu\}$ seien durch die Punkte $w_{\nu,1}, \ldots, w_{\nu,\tilde{l}_\nu}$ gegeben, und wir definieren

$$c_\nu := \max_{|z|\leq 1} |T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z)|.$$

Wenn für ein $\nu \in \mathbb{N}$ die Polynome $P_0(z), \ldots, P_{\nu-1}(z)$ bereits erklärt sind, so existiert nach dem Satz von Runge über die polynomiale Approximation ein Polynom $P_\nu(z)$ mit

$$\max_{|w|\leq r_\nu} |P_\nu(w) - P_{\nu-1}(w)| < \frac{1}{\nu^2} \tag{6.5}$$

und

$$\max_{w\in D_{\nu,k}} \left| P_\nu(w) - Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}(w - z_\nu^{(k)})\right)\right| < \frac{1}{\nu} \tag{6.6}$$

für alle $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Nach dem Satz von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation können wir zusätzlich fordern, dass $P_\nu(z)$ das Polynom $P_{\nu-1}(z)$ in $z = 0$ mit der Ordnung $j_{\nu-1} + 1$ interpoliert, sodass $\Omega_\nu(z) = P_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)$ eine Nullstelle dieser Ordnung an $z = 0$ hat.

4. Auch hier betrachten wir die von Weierstraß eingeführten Elementarfunktionen

$$E_\mu(z) := (1 - z)\exp(\sum_{j=1}^{\mu} \frac{z^j}{j}),$$

deren Basiseigenschaften wir bereits im vierten Beweisschritt zu Satz 6.1 erläutert haben. Im Hinblick auf (6.2) wählen wir $\mu_\nu \geq j_{\nu-1}$ so groß, dass die Funktion

$$F_\nu(z) := \frac{\prod_{j=1}^{m_\nu} E_{\mu_\nu}\left(\frac{z}{z_{\nu\, j}}\right)}{\prod_{j=1}^{\tilde{l}_\nu} E_{\mu_\nu}\left(\frac{z}{w_{\nu\, j}}\right)}$$

die Abschätzung

$$|F_\nu(z) - 1| \leq \frac{1}{c_\nu\, \nu^2} \quad \text{für alle } z \in \{z : |z| \leq 1\} \tag{6.7}$$

erfüllt. Wiederum besitzt die ganze Funktion

$$H_\nu(z) := (T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z))F_\nu(z) =: T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z) + \tilde{F}_\nu(z)$$

in $\{z : 1 < |z| \leq R_\nu\}$ exakt die Elemente von M_ν als Nullstellen. Die Nullstellen von $H_\nu(z)$ in $\bar{\mathbb{D}}$ sind jene des Polynoms $T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z)$

in $\bar{\mathbb{D}}$. Diese heißen $\zeta_{\nu,1},\ldots,\zeta_{\nu,i_\nu}$, wobei jede Nullstelle entsprechend ihrer Ordnung aufgelistet ist. Insbesondere ist $H_\nu(z)$ nullstellenfrei auf $\{z : |z| = R_\nu\}$, d. h. es gilt

$$d_\nu := \min_{|z|=R_\nu} |H_\nu(z)| > 0.$$

Ebenso besitzt $\tilde{F}_\nu(z) = (F_\nu(z)-1)(T_{\nu-1}(z)+\Omega_\nu(z))$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu_\nu + 1 > j_{\nu-1}$ an $z = 0$.
Nach dem Satz von Walsh über die simultane Approximation und Interpolation, existiert zu $\tilde{F}_\nu(z)$ ein Polynom $\Pi_\nu(z)$ mit

$$|\Pi_\nu(z) - \tilde{F}_\nu(z)| < \min\left\{d_\nu, \frac{1}{\nu^2}\right\} \qquad \text{für alle } z \in \{z : |z| \leq R_\nu\},$$

welches $\tilde{F}_\nu(z)$ an allen Punkten $\zeta_{\nu,1},\ldots,\zeta_{\nu,i_\nu}, z_{\nu,1},\ldots,z_{\nu,m_\nu}$, sowie an $z = 0$ mit der Ordnung $\mu_\nu + 1$ interpoliert.

5. Wir setzen

$$\varphi(w) := \sum_{\nu=1}^{\infty}\{P_\nu(w) - P_{\nu-1}(w)\} + \Pi_\nu(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu(w) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi_\nu(w),$$

wobei wir die letzte Reihe kurz mit $\Pi(w)$ bezeichnen werden, und stellen nun einige Eigenschaften zusammen:

(a) $\Pi_\nu(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu_\nu + 1 > j_{\nu-1}$ an $z = 0$. Das bedeutet zusammen mit der Wahl von $\Omega_\nu(z)$, dass $T_{\nu-1}(z) = s_{j_{\nu-1}}(z)$, der $j_{\nu-1}$-ten Teilsumme der Potenzreihenentwicklung $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ von φ ist.

(b) Mit der Abschätzung (6.7) erhalten wir

$$\begin{aligned}\max_{|z|\leq 1} |\Pi_\nu(z)| &\leq \max_{|z|\leq 1} |\Pi_\nu(z) - \tilde{F}_\nu(z)| + \max_{|z|\leq 1} |\tilde{F}_\nu(z)| \\ &< \frac{1}{\nu^2} + \max_{|z|\leq 1} |((T_{\nu-1} + \Omega_\nu)(F_\nu - 1))(z)| \\ &\leq \frac{1}{\nu^2} + c_\nu\, \frac{1}{c_\nu\, \nu^2} = \frac{2}{\nu^2}.\end{aligned}$$

Zusammen mit (6.5) folgt, dass φ holomorph in $\mathbb{D}$ ist, also hat die Potenzreihe $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ mindestens Konvergenzradius 1. Ferner erhalten wir, dass $\Pi(w)$ in $\mathbb{D}$ holomorph und auf $\bar{\mathbb{D}}$ stetig ist.

(c) Wegen $|\Pi_\nu(z) - \tilde{F}_\nu(z)| < d_\nu \leq |H_\nu(z)| = |T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z) + \tilde{F}_\nu(z)|$ für alle $z \in \{z : |z| = R_\nu\}$, erhalten wir nach dem Satz von Rouché, dass die beiden Funktionen

$$T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z) + \tilde{F}_\nu(z) = H_\nu(z)$$

und

$$T_{\nu-1}(z) + \Omega_\nu(z) + \Pi_\nu(z) = T_\nu(z)$$

die gleiche Anzahl an Nullstellen in $\{z : |z| \leq R_\nu\}$ haben. Wegen der Interpolationseigenschaften von $\Pi_\nu(z)$ sind die Nullstellen sogar identisch. Insbesondere besitzt also $T_\nu(z)$ in $\{z : 1 < |z| \leq R_\nu\}$ exakt die Elemente von M_ν als Nullstellen.

(d) Speziell sind für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und alle $i \geq m$ die Nullstellen von $T_{(i,m)}(z) = s_{j_{(i,m)}}(z)$ in $\{z : 1 < |z| \leq R_{(i,m)}\}$ exakt die Elemente von $M_m^\star$. Folglich hat die Potenzreihe von φ Konvergenzradius 1.

6. Wörtlich wie im letzten Beweisschritt des vorigen Satzes weist man nach, dass φ die zweite geforderte Eigenschaft besitzt. Demnach bleibt nur noch zu zeigen, dass φ translationsuniversell in $\mathbb{D}$ ist.

(a) Aus (6.5) und (6.6) ergibt sich für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, \nu$

$$\begin{aligned} &\max_{w \in D_{\nu,k}} \left| \varphi(w) - \Pi(w) - Q_\nu\left(\frac{1}{a_{l_\nu}}\left(w - z_\nu^{(k)}\right)\right)\right| \\ &\leq \max_{w \in D_{\nu,k}} \left| \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \{P_\lambda(w) - P_{\lambda-1}(w)\} \right| + \frac{1}{\nu} \\ &\leq \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \max_{|w| \leq r_\lambda} |P_\lambda(w) - P_{\lambda-1}(w)| + \frac{1}{\nu} \\ &< \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\nu} < \frac{2}{\nu}, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\max_{|z| \leq \frac{1}{\tilde{r}_\nu}} \left|\varphi\left(z\, a_{l_\nu} + z_\nu^{(k)}\right) - \Pi\left(z\, a_{l_\nu} + z_\nu^{(k)}\right) - Q_\nu(z)\right| < \frac{2}{\nu}. \tag{6.8}$$

(b) Es seien nun ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, eine Funktion $f \in A(K)$ und ein Randpunkt $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert eine Teilfolge $\{\nu_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $\nu_s > s$, sodass gilt

$$\max_K |Q_{\nu_s}(z) - f(z) + \Pi(\zeta)| < \frac{1}{s}. \tag{6.9}$$

Weiter existiert ein $s_0 = s_0(K)$ so, dass

$$K \subset \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{\tilde{r}_{\nu_s}} \right\} \text{ gilt für alle } s > s_0.$$

Wegen (6.8) und (6.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} \max_K &|\varphi(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)}) - \Pi(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)}) + \Pi(\zeta) - f(z)| \\ &< \frac{2}{\nu_s} + \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{6.10}$$

für alle $s > s_0$ und alle $k = 1, \ldots, \nu_s$.
Da ζ Häufungspunkt der Menge $\{z = z_{\nu_s}^{(k)} : k = 1, \ldots, \nu_s; s > s_0\}$ ist, existieren natürliche Zahlen $j_s \in \{1, \ldots, \nu_s\}$ mit $z_{\nu_s}^{(j_s)} \to \zeta$ für $s \to \infty$. Für $s > s_0$ und $z \in K$ gilt

$$|(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(j_s)}) - z_{\nu_s}^{(j_s)}| = |a_{l_{\nu_s}}| \cdot |z| \leq \tilde{r}_{\nu_s}^2 \cdot \frac{1}{\tilde{r}_{\nu_s}} = \tilde{r}_{\nu_s},$$

also $a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(j_s)} \in D_{\nu_s, j_s} \subset \mathbb{D}\,(s > s_0)$.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir schießlich eine natürliche Zahl $s_k > \max\{k, s_0\}$ derart wählen, dass $C(k)$ mit

$$C(k) := \max_K |(a_{l_{\nu_{s_k}}} z + z_{\nu_{s_k}}^{(j_{s_k})}) - \zeta|$$

gegen 0 konvergiert für $k \to \infty$. Explizit sei $s_k > \max\{k, s_0\}$ derjenige Index, sodass aufgrund der (gleichmäßigen) Stetigkeit von Π in $\bar{\mathbb{D}}$

$$\max_K |\Pi(a_{l_{\nu_{s_k}}} z + z_{\nu_{s_k}}^{(j_{s_k})}) - \Pi(\zeta)| < \frac{1}{k}$$

gilt. Zusammen mit (6.10) ergibt sich

$$\max_K |\varphi(a_{l_{\nu_{s_k}}} z + z_{\nu_{s_k}}^{(j_{s_k})}) - f(z)| < \frac{2}{\nu_{s_k}} + \frac{1}{s_k} + \frac{1}{k} < \frac{4}{k}.$$

Setzen wir entsprechend

$$a_{m_k} := a_{l_{\nu_{s_k}}},\ b_{n_k} := z_{\nu_{s_k}}^{(j_{s_k})} \quad (k \in N),$$

so folgt insgesamt

$$\max_K |\varphi(a_{m_k} z + b_{n_k}) - f(z)| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

d. h. φ ist translationsuniversell im geforderten Sinne.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] N. U. Arakelian, *Uniform and tangential approximations by analytic functions*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 3 (1968), 273-286 [Russisch].

[2] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno und J. A. Prado-Bassas, *Maximal cluster sets along arbitrary curves*, J. Approx. Theory 129 (2004), no. 2, 207-216.

[3] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'une théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[4] R. P. Boas jr., *Entire functions*, Academic Press, New York/San Francisco/London (1954).

[5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin (1973).

[6] G. Costakis und M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*, Advances in Mathematics 182 (2004), 278-306.

[7] D. Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser (1980).

[8] P. M. Gauthier und N. Tarkhanov, *Approximation by the Riemann zeta-function*, Complex Variables 50 (2005), no. 3, 211-215.

[9] W. Gehlen, *Note on the Sharpness of Jentzsch's Theorem*, Complex Variables Theory Appl. 29 (1996), no. 4, 379-382.

[10] T. Gharibyan, W. Luh und M. Nieß, *Birkhoff-functions that are bounded on prescribed sets*, zur Veröffentlichung angenommen in Archiv der Mathematik.

[11] K.-G. Große-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 345-381.

[12] G. Herzog, *On zero-free universal entire functions*, Arch. Math. (Basel) 63 (1994), no. 4, 329-332.

[13] W. Luh, *Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten*, Aequationes Math. 19 (1979), 183-193.

[14] W. Luh, *Über cluster sets analytischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 33 (1979), 137-142.

[15] W. Luh, *Holomorphic monsters*, J. Approx. Theory 53 (1988), 128-144.

[16] W. Luh, *Entire functions with various universal properties*, Complex Variables Theory Appl. 31 (1996), 87-96.

[17] W. Luh, *Wild objects in analysis*, Vortrag an der Yerevan University im September 2001.

[18] W. Luh, V. A. Martirosian und J. Müller, *Restricted T-universal functions on multiply connected domains*, Acta Math. Hungar. 97 (2002), 173-181.

[19] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. 2 (1952), 72-87.

[20] S. N. Mergelian, *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Uspekhi Matem. Nauk 7 (1952), 31-122 [Russisch]. Englische Übersetzung in: Amer. Math. Soc. Transl. 3 (1962), 294-391.

[21] M. Nieß, *Beweis und Anwendungen des Satzes von Arakelian*, Diplomarbeit an der Universität Trier (2004).

[22] M. Nieß, *Entire functions with universal translates which are bounded on each line*, zur Veröffentlichung eingereicht in The Journal of Analysis.

[23] W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenbourg (1999).

[24] C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta Math. 6 (1885), 228-244.

[25] S. M. Voronin, *A theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39 (1975), 475-486 [Russisch]. Englische Übersetzung in: Math. USSR-Izv. 9 (1975), 443-453.