Marcinkiewicz-Funktionen in der komplexen Ebene und universelle Approximationsoperatoren

Andreas Vogt

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
im Fachbereich IV der Universität Trier

Betreuer	:	Professor Dr.Dr.h.c. Wolfgang Luh
Zweitgutachter	:	Professor Dr. Jürgen Müller
Eingereicht am	:	18.11.2008

Für grundlegende Anregungen und zahlreiche vielfältige Hinweise zu der vorliegenden Arbeit möchte ich meinem Betreuer, Herrn Professor Dr.Dr.h.c. Wolfgang Luh, herzlich danken. Ebenso gilt mein Dank Herrn Professor Dr. Jürgen Müller für die freundliche Übernahme des Koreferats.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

1.1 Notationen 5

1.2 Grundlegende Universalitätsphänomene 7

1.3 Hauptergebnisse 9

2 Beschränktheit universeller Funktionen auf Kurven **13**

2.1 Unbeschränktheit auf jeder Geraden 13

2.2 Unbeschränktheit auf jeder Kurve nach ∞ 15

3 Marcinkiewicz-Universalität, Variante I **21**

4 Marcinkiewicz-Universalität, Variante II **32**

4.1 Eine weitere Universalität in $\mathbb{C}$ 32

4.2 Eine weitere Universalität in allgemeinen Gebieten 38

5 Weitere Aussagen in $\mathbb{R}$ **43**

5.1 Partiell differenzierbare universelle Funktionen 43

5.2 Eine Riemann-universelle Funktion 52

6 Universelles Verhalten linearer Operatoren **57**

6.1 Funktionen mit universellen Bernsteinpolynomen 58

6.2 Universelles Verhalten von Interpolationspolynomen 60

6.3 Interpolation in $\mathbb{C}$ 79

6.4 Zum Satz von Korovkin 81

7 Eine „Birkhoff-ähnliche“ universelle Funktion **89**

Literaturverzeichnis **92**

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist der Approximationstheorie, einem Teilgebiet der Analysis, zuzuordnen, wobei wir uns mit der Konstruktion von Funktionen mit gewissen universellen Approximationseigenschaften befassen.

In der Approximationstheorie geht man der Frage nach, ob eine Funktion f durch eine „einfachere“ Funktion ersetzt werden kann, ohne dabei einen zu großen Fehler zu begehen. Wenn etwa eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben ist, ist es von praktischer und auch von innermathematischer Bedeutung, ob und wie f durch Polynome *approximierbar* ist. Eine naheliegende Möglichkeit scheint zu sein, Punkte in $[0,1]$ auszuwählen und ein Polynom zu konstruieren, welches mit der Funktion f an diesen Punkten übereinstimmt. Solche *Interpolationspolynome* sind sehr einfach zu konstruieren. Zudem könnte man vermuten, dass die Interpolationspolynome, wenn sie an immer mehr Stellen mit f übereinstimmen, eine immer bessere Annäherung an f darstellen, d.h. gegen die Funktion f *konvergieren* .
Überraschenderweise muss die Folge der Interpolationspolynome nicht konvergieren, sie kann sogar in gewissem Sinne in maximaler Art und Weise divergieren! So zeigen wir zum Beispiel, dass es sogar eine unendlich oft differenzierbare Funktion f und ein System von Stützstellen gibt, so dass zu jeder messbaren Funktion g eine Teilfolge der Interpolationsfolge von f fast sicher gegen g konvergiert.
Aus der Folge der Interpolationspolynome der *einen* Funktion f gehen also in diesem Sinne *alle* messbaren Funktionen g hervor. Aus diesem Grund bezeichnen wir diese Funktionen als *universell*.

In dieser Arbeit untersuchen wir neben solchen Funktionen, die bzgl. gewissen Approximationsverfahren universell sind, auch Erweiterungen eines Satzes von Marcinkiewicz, der die Existenz von Funktionen mit universellen Differenzenquotienten sicherstellt. Bei einer differenzierbaren Funktion f konvergiert die

Folge der Differenzenquotienten $\left(\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Ableitung von f, wenn $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n \neq 0$ ist. Auch hier gibt es Funktionen, so dass diese Folge der Differenzenquotienten in maximaler Art und Weise divergiert, derart dass jede messbare Funktion durch eine Teilfolge der Differenzenquotienten beliebig genau approximiert werden kann:

1.1 Satz *(Marcinkiewicz [21])*: *Es sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $0 \neq h_n \to 0,\ (n \to \infty)$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass für jede messbare Funktion g auf $[0,1]$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+h_{n_k})-f(x)}{h_{n_k}} = g(x) \quad \textit{fast sicher in } [0,1]$$

gilt.

Bevor wir in diesem ersten Kapitel einen kurzen Überblick über verwandte Universalitätsphänomene geben, vereinbaren wir zunächst einige Notationen, die wir ständig benutzen werden und die sich sogleich bei der Formulierung dieser Phänomene als hilfreich erweisen. Anschließend stellen wir unsere Hauptergebnisse kurz dar.

1.1 Notationen

Wir führen nun wesentliche Bezeichnungen ein, die die topologische Struktur von Teilmengen der komplexen Ebene betreffen.

1.2 Definition:

1. Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Mit $\mathring{M}$ bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von M und mit M^c das Komplement von M. Für den Abschluss der Menge M schreiben wir $\bar{M}$ und für den Rand von M verwenden wir das Symbol ∂M.

2. Mit $\mathbb{D}$ bezeichnen wir den Einheitskreis, d.h. $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$.

3. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge aller kompakten Mengen $K \subset \mathbb{C}$, so dass K^c zusammenhängend ist.

4. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Mit $G^\star$ bezeichnen wir die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von G.

5. Eine abgeschlossene Menge F eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$, für welche $G^\star \backslash F$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend ist, bezeichnen wir als Arakelian-Menge.

Die folgende Definition stellt oft verwendete Funktionenräume zusammen:

1.3 Definition: Es seien $M \subset \mathbb{C}$ sowie $n, m \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren:

1. $C(M) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig auf } M\}$

2. $H(M) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ ist holomorph auf } M\}$

3. $A(M) := C(M) \cap H(\mathring{M})$

4. $C(K, \mathbb{R}^m) := \{f : K \to \mathbb{R}^m : f \text{ ist stetig auf } K\}$

5. Für eine kompakte Menge K und eine Funktion $F \in C(K, \mathbb{R}^m)$ definieren wir
$$||F||_\infty := \max_K |F(x)|,$$
wobei für $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt
$$|y| = \sqrt{\sum_{k=1}^m y_k^2}.$$

6. Für $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnen wir mit $\|A\|$ den größten Eigenwert von $A^t A$. Dann ist $||.||$ eine Norm mit
$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}.$$
Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $|Ax| \le \|A\| \cdot |x|$.

7. Mit λ^n bezeichnen wir das n-dimensionale Lesbesgue-Maß.

In dieser Arbeit verwenden wir häufig den folgenden bestmöglichen Satz für polynomielle Approximation auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$:

1.4 Satz *(Mergelian [23]): Es seien $K \in \mathfrak{M}$ und $f \in A(K)$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom P mit*

$$\max_{z \in K} |f(z) - P(z)| < \epsilon.$$

An einigen Stellen werden wir Funktionen auf abgeschlossenen Mengen gleichmäßig approximieren. Der bestmögliche Satz für diese Situation ist der Satz von Arakelian:

1.5 Satz *(Arakelian [1]): Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F \subset G$ eine Arakelian-Menge. Ferner seien $f \in A(F)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine auf G holomorphe Funktion ϕ mit*

$$\sup_{z \in F} |\phi(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Um etwas über die „Größe" der Mengen der universellen Funktionen in $H(G)$ aussagen zu können, wobei G ein Gebiet ist, versehen wir den Raum $H(G)$ mit der in Conway[4, Kapitel VII] konstruierten Metrik d. Diese Metrik ist eine kanonische Metrik auf $H(G)$. Sie erzeugt dort die sogenannte lokal-gleichmäßige Topologie.

Damit sind die Bezeichnungen geklärt und die wichtigsten Hilfsmittel zusammengestellt. Wir geben nun einen Überblick über grundlegende Universalitätsphänomene.

1.2 Grundlegende Universalitätsphänomene

Einen ausführlichen Überblick über die Theorie der universellen Funktionen findet man in [10]. Wir beschränken uns hier auf die Darstellung einiger zentraler Resultate.
Es existieren zahlreiche Varianten des Satzes 1.1, die ausschließlich reeller Natur sind: Von Gan und Stromberg ([7],[8]) stammt eine Erweiterung des Satzes 1.1 auf Funktionen $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$, wo $\mathbb{R}^{m \times n}$-wertige Funktionen approximiert werden. Neben einer Erweiterung eines Ergebnisses von Joó ([13]) über

die Existenz universeller Funktionen in L_p-Räumen findet man in der Diplomarbeit des Autors ([28]) eine weitere Verallgemeinerung des Satzes von Marcinkiewicz für Funktionen $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$:

1.6 Satz: *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $h = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $0 \neq |h_k| \to 0$ $(k \to \infty)$. Dann existiert eine Funktion $f \in C([0,1]^n, \mathbb{R}^m)$, so dass für jede messbare Funktion $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$ eine Teilfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert mit*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{f(x + h_{k_l}) - f(x)}{|h_{k_l}|} = g(x) \ f.s.$$

Die Menge dieser Funktionen ist residual in dem Raum $(C([0,1]^n, \mathbb{R}^m), ||.||_\infty)$.

Viele Resultate bezüglich universeller Funktionen sind durch ein Resultat von Birkhoff aus dem Jahre 1929 motiviert, welches von Luh unter Verwendung des Approximationssatzes von Mergelian zu folgendem Satz erweitert wurde:

1.7 Satz *(Birkhoff-Luh [15])*: *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine ganze Funktion f, so dass für jedes Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jede Funktion $g \in A(K)$ eine Teilfolge $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert mit*

$$f(z + z_{n_k}) \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty).$$

Funktionen mit dieser Eigenschaft werden wir *translationsuniversell* bzgl. der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen.
Ein Ergebnis über „translationsuniverselle“ Funktionen in allgemeineren Gebieten stammt von Luh:

1.8 Satz *(Luh [16])*: *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion ϕ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\zeta \in \partial G$, jedem $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $g \in A(K)$ existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ und $b_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$ mit*

$$a_n z + b_n \in G \quad \text{für alle } z \in K \text{ und alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\phi(a_n z + b_n) \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty)$$

gilt.

Dieses Ergebnis von Luh wurde 2002 von Luh, Martirosian und Müller in [18] auf beliebige Gebiete verallgemeinert:

1.9 Satz *(Luh, Martirosian, Müller [18])*: *Es seien $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge. Ferner seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $a_n \to 0\,(n \to \infty)$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G, so dass die Menge der Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit E übereinstimmt. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion ϕ, so dass für alle $\zeta \in E$, alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}$ und alle $g \in A(K)$ Teilfolgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existieren, so dass $b_{n_k} \to \zeta\,(k \to \infty)$ und*

$$a_{m_k}z + b_{n_k} \in G \text{ für alle } z \in K \text{ und alle } k \in \mathbb{N},$$

sowie

$$\phi(a_{m_k}z + b_{n_k}) \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K(k \to \infty)$$

gilt.

Unter Verwendung des Theorems 1 aus [10] erhält man mit der Beweistechnik aus [17] folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Zappa, der die Existenz von Funktionen sicherstellt, die bzgl. einer Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *streckungsuniversell* sind:

1.10 Satz *(Zappa [29])*: *Es sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann existiert eine Funktion ϕ die bzgl. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streckungsuniversell ist, d.h. ϕ ist ganz und es gilt Folgendes: Für jedes Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ und jede Funktion $g \in A(K)$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit*

$$\phi(\lambda_{n_k}z) \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K\ (k \to \infty).$$

Außerdem ist die Menge dieser Funktionen residual in $H(\mathbb{C})$.

1.3 Hauptergebnisse

Der Satz 1.10 über streckungsuniverselle Funktionen ähnelt dem Satz 1.7 über translationsuniverselle Funktionen. Die Struktur der jeweiligen universellen Funktionen kann sich dennoch stark unterscheiden. Translationsuniverselle

Funktionen können auf jeder Geraden beschränkt sein, vgl. [25]. Im Gegensatz zu diesem Ergebnis werden wir in Satz 2.1 zeigen, dass streckungsuniverselle Funktionen sogar auf jeder Geraden unbeschränkt sind.
Außerdem zeigen wir im zweiten Kapitel, dass es streckungsuniverselle Funktionen gibt, die sogar auf jeder Kurve nach ∞ unbeschränkt sind (Satz 2.4), aber nicht jede streckungsuniverselle Funktion diese Eigenschaft besitzt (Satz 2.5).

Mit der Definition $f(z) := (z - \zeta_0)\phi(z)$ mit einer Funktion ϕ aus Satz 1.8 erhält man eine Funktion f, die bezüglich des Punktes ζ_0 universell in dem Sinne ist, dass zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $g \in A(K)$ Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ und $b_n \to \zeta_0$ $(n \to \infty)$ existieren mit

$$a_n z + b_n \in G \quad \text{für alle } z \in K \text{ und alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\frac{f(a_n z + b_n)}{a_n z + b_n - \zeta_0} \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K (n \to \infty)$$

gilt.
Im dritten Kapitel zeigen wir, dass es Funktionen gibt, die nicht nur bezüglich eines Punktes $\zeta_0 \in \partial G$, sondern bezüglich aller Punkte $\zeta \in \partial G$ in diesem Sinne universell sind (Satz 3.1).
Zudem beweisen wir ein Ergebnis über eine bezüglich jedes Punktes $\zeta \in E$ in obigem Sinne universellen Funktion, wobei E eine abgeschlossene Teilmenge des Randes von G ist. Dabei kann eine solche universelle Funktion f auf $G \cup (\partial G \backslash E)$ stetig sein, wenn es eine genau in G holomorphe Funktion ψ gibt, die stetig auf $G \cup (\partial G \backslash E)$ ist, vgl. Bemerkung 3.2. Dies ist etwa der Fall, wenn G durch endlich viele paarweise disjunkte Jordanbögen berandet ist, vgl. [18].

Offensichtlich kann es keine ganze Funktion f geben, so dass sich, mit einer Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, der Ausdruck $\frac{f(z+b_n)-f(z)}{b_n}$ in irgendeiner Weise universell verhält, da er gegen $f'(z)$ konvergiert. Im vierten Kapitel werden wir sehen, dass

$$\left(\frac{f(a_m z + b_n) - f(a_m z)}{b_n}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht sein kann, wenn $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge ist (Satz 4.1). Anschließend beweisen wir eine Version für beliebige Gebiete G (Satz 4.4). Die Streckung $a_m z$ wird dabei durch eine Translation $a_m z + c_l$ ersetzt, wobei $a_m \to 0$ und $(c_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist, deren Häufungspunkte den Rand von G enthalten.

Im fünften Kapitel zeigen wir in Satz 5.5, dass es Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die in einigen Richtungen partiell differenzierbar sind und in anderen Richtungen ein zu Satz 1.1 analoges universelles Verhalten aufweisen.
Während die Funktionen aus Satz 1.1 in gewissem Sinne maximal nicht-differenzierbar sind, beweisen wir im fünften Kapitel in Satz 5.7, dass es Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die maximal nicht-Riemann-integrierbar sind, in dem Sinne, dass es zu jeder (geeigneten) Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, zu jedem $x \in [0,1]$ und jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = x$ des Intervalls $[0,x]$ mit $\max_{i=0,1,\ldots,n-1} |t_{i+1} - t_i| < \epsilon$ und Zwischenstellen ζ_i mit $t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1}$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ gibt, so dass

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(t_{k+1} - t_k) - g(x)\right| < \epsilon$$

gilt. Diese Funktionen bezeichnen wir als maximal nicht-Riemann-integrierbar, da bei einer in $[0,1]$ integrierbaren Funktion f bekanntlich jede Riemann-Summe bei feiner werdender Zerlegung von $[0,x]$ gegen $\int_0^x f(t)dt$ konvergiert. Bei Funktionen aus Satz 5.7 ist es möglich, bei jeder beliebigen Funktion g durch geeignete Wahl von Zerlegungen von $[0,x]$ und Zwischenstellen mit der resultierenden Riemann-Summe die Funktion $g(x)$ beliebig genau zu approximieren.

Wenn $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist und $0 \leq x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ beliebige Punkte im Intervall $[0,1]$ sind, dann existiert genau ein Polynom $L_n f$ vom Grad $\leq n$, welches mit f an $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n$ übereinstimmt. Wir

untersuchen im sechsten Kapitel zunächst, welches universelle Verhalten von $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ möglich ist. Ein Hauptergebnis ist die Existenz einer sogar unendlich oft differenzierbaren Funktion f und eines „schönen" Systems von Stützstellen, so dass die Folge $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ in gewissem Sinne in maximaler Art und Weise divergiert (Satz 6.16).
Im sechsten Kapitel untersuchen wir zudem das Verhalten von $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Operatoren und $f \in C([0,1])$ ist. Ein bekannter Satz von Korovkin besagt, dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn die Folge der Operatoren $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

(1) L_n ist linear

(2) L_n ist positiv

(3) $L_n f_i(x) \to f_i(x)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ $(n \to \infty)$ für $i = 0, 1, 2$, wobei $f_i(x) = x^i$.

Wir werden im sechsten Kapitel sehen, dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits dann maximal divergieren kann, wenn nur eine der drei Voraussetzungen nicht erfüllt ist. So existieren eine Folge von linearen und positiven Operatoren mit

$$L_n f_i(x) \to f_i(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty) \text{ für } i = 1, 2, \ldots,$$

und eine in $[0,1]$ stetige Funktion f, so dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nur nicht gegen f konvergiert, sondern sogar in $\left(C\left([0,1]\right), \|.\|_\infty\right)$ dicht ist (Satz 6.19).
Ähnlich wichtig ist die Linearität (Satz 6.20) bzw. die Positivität (Satz 6.21) im Satz von Korovkin.

Im siebten Kapitel erweitern wir ein von Mortini mündlich kommuniziertes Ergebnis, welches die Existenz einer ganzen Funktion ϕ sicherstellt, so dass die Funktionenfolge $\left(\phi\left(e^{\frac{z}{n}} + n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})$ dicht ist. Wir werden in Satz 7.1 sehen, dass die Exponentialfunktion in diesem Satz durch andere Funktionen ersetzt werden kann.

2 Beschränktheit universeller Funktionen auf Kurven

2.1 Unbeschränktheit auf jeder Geraden

Translationsuniverselle Funktionen gemäß Satz 1.7 können auf jeder Geraden beschränkt sein, vgl. [25]. In diesem Abschnitt beweisen wir, dass dies bei den streckungsuniversellen Funktionen aus Satz 1.10 nicht möglich ist. Solche Funktionen sind sogar auf jeder Geraden unbeschränkt.

2.1 Satz: *Die Funktion ϕ sei streckungsuniversell, d.h. ϕ ist ganz und zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ und zu jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, so dass gilt*

$$\phi(a_n z) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty).$$

Dann ist ϕ auf jeder Geraden unbeschränkt.

Beweis: Es sei Γ eine beliebige Gerade in $\mathbb{C}$. Wir betrachten folgendes Kompaktum, vgl. Abbildung 1:

$$K := \left\{ z : z = e^{i\phi} \text{ mit } -\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5}{4}\pi \right\} \cup \left\{ z : z = 2e^{i\phi} \text{ mit } \pi \leq \phi \leq 2\pi \right\}.$$

Offensichtlich gilt $K \in \mathfrak{M}$ und $0 \notin K$. Nun nehmen wir an, dass ϕ auf Γ beschränkt ist. Dann existiert eine Konstante M mit $|\phi(z)| \leq M$ für alle $z \in \Gamma$. Es sei nun $f(z) := M + 1$. Dann ist $f \in A(K)$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, so dass gilt

$$\phi(a_n z) \to M + 1 \ \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty).$$

Insbesondere existiert eine natürliche Zahl N_1 mit

$$\max_K |\phi(a_n z) - (M + 1)| < 1 \qquad \text{für alle } n \geq N_1. \tag{2.1}$$

Nun sei $z_0 \in \Gamma$ beliebig. Wegen $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ existiert eine natürliche Zahl $n \geq N_1$ mit $\left|\frac{z_0}{a_n}\right| < 1$.

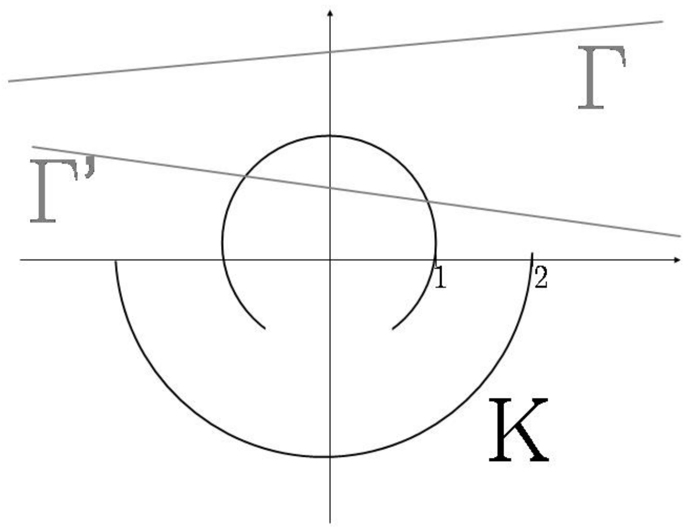

Abbildung 1: Kompaktum K

Da $\Gamma' := \left\{\frac{z}{a_n} : z \in \Gamma\right\}$ eine Gerade und $\frac{z_0}{a_n} \in \mathbb{D}$ ist, gilt offenbar

$$\left\{\frac{z}{a_n} : z \in \Gamma\right\} \cap K \neq \emptyset.$$

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $z^* \in \left\{\frac{z}{a_n} : z \in \Gamma\right\} \cap K$. Dann ist $z^* = \frac{\tilde{z}}{a_n}$ mit einem $\tilde{z} \in \Gamma$. Aus (2.1) folgt

$$|\phi(a_n z^*) - (M+1)| < 1$$

oder

$$|\phi(\tilde{z}) - (M+1)| < 1.$$

Wir folgern weiter

$$|\phi(\tilde{z})| = |M + 1 + \phi(\tilde{z}) - (M+1)| \geq M + 1 - |\phi(\tilde{z}) - (M+1)| > M.$$

Damit ist ein $\tilde{z} \in \Gamma$ gefunden mit $|\phi(\tilde{z})| > M$. Dieser Widerspruch zeigt, dass ϕ auf Γ nicht beschränkt sein kann.
Da Γ beliebig war, ist damit der Satz bewiesen. $\square$

2.2 Bemerkung: Gemäß Satz 1.10 ist die Menge aller streckungsuniversellen Funktionen eine residuale Teilmenge von $H(\mathbb{C})$. Damit gilt dies ebenfalls für die Menge aller Funktionen, die auf jeder Geraden unbeschränkt sind. Wenn man diese Menge mit der (residualen) Menge der translationsuniversellen Funktionen schneidet, erhält man eine residuale Menge von translationsuniversellen Funktionen, die auf jeder Geraden unbeschränkt sind. Obwohl es also translationsuniverselle Funktionen gibt, die auf jeder Geraden beschränkt sind, ist die „Mehrzahl“ der translationsuniversellen Funktionen auf jeder Geraden (und wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sogar auf jeder Kurve nach ∞) unbeschränkt.

2.2 Unbeschränktheit auf jeder Kurve nach ∞

Wir haben gesehen, dass streckungsuniverselle Funktionen auf jeder Geraden unbeschränkt sind. Im folgenden Satz beweisen wir, dass in gewissem Sinne sogar fast alle streckungsuniversellen Funktionen auf jeder Kurve nach ∞ unbeschränkt sind. Zunächst definieren wir, was wir unter einer Kurve nach ∞ verstehen.

2.3 Definition: Es sei $f : [0,1) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{t\to 1} f(t) = \infty$. Dann heißt $\Gamma := f([0,1))$ eine Kurve nach ∞.

Im Beweis zu folgendem Satz werden wir verwenden, dass jede Kurve nach ∞ jeden Kreis mit hinreichend großem Radius schneidet.

2.4 Satz: *Zu jeder unbeschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine in $H(\mathbb{C})$ residuale Teilmenge von streckungsuniversellen Funktionen, die auf jeder Kurve nach ∞ unbeschränkt sind.*

Beweis: 1. Zunächst zeigen wir, dass die Menge

$$V := \{f \in H(\mathbb{C}) : \forall M \in \mathbb{N}\, \exists n \geq M : |f(z)| > M\, \forall |z| = n\}$$

eine residuale Teilmenge von $H(\mathbb{C})$ ist.

Mit

$$V_{M,n} := \{f \in H(\mathbb{C}) : |f(z)| > M\, \forall |z| = n\} \quad (M, n \in \mathbb{N})$$

erhalten wir

$$V = \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=M}^{\infty} V_{M,n}.$$

Wir zeigen nun, dass $V_{M,n}$ $(M \in \mathbb{N},\ n \geq M)$ offen in $H(\mathbb{C})$ ist und dass für alle $M \in \mathbb{N}$ die Menge $\bigcup_{n \geq M}^{\infty} V_{M,n}$ in $H(\mathbb{C})$ dicht ist.

(a) Für $M \in \mathbb{N}$ und $n \geq M$ ist $V_{M,n}$ offen in $H(\mathbb{C})$:
Dazu wählen wir eine Folge $f_k \in V_{M,n}^c$ mit

$$f_k(z) \to f(z) \text{ lokal-gleichmäßig in } \mathbb{C}\ (k \to \infty)$$

und zeigen, dass $f \in V_{M,n}^c$ ist.
Zu jedem $f_k \notin V_{M,n}$ existiert ein $z_k \in \mathbb{C}$ mit $|z_k| = n$ und $|f_k(z_k)| \leq M$. Da die Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch n beschränkt ist, existieren ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Teilfolge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $z_{k_l} \to z_0$ $(l \to \infty)$. Damit folgt mit der Stetigkeit von f und der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ auf $\{z : |z| = n\}$ gegen f, dass gilt

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f_{k_l}(z_{k_l})| &\leq |f(z_0) + f(z_{k_l})| + |f(z_{k_l}) - f_{k_l}(z_{k_l})| \leq \\ &\leq |f(z_0) + f(z_{k_l})| + \\ &\quad + \max_{|z|=n} |f(z) - f_{k_l}(z)| \to 0 \ (l \to \infty). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nun nehmen wir an, dass $|f(z_0)| > M$ sei. Dann ist

$$\epsilon := |f(z_0)| - M > 0.$$

Aus (2.2) folgt die Existenz eines $l \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z_0) - f_{k_l}(z_{k_l})| < \epsilon,$$

woraus

$$|f(z_0)| \leq |f(z_0) - f_{k_l}(z_{k_l})| + |f_{k_l}(z_{k_l})| < \epsilon + M = |f(z_0)|$$

folgt. Dieser Widerspruch impliziert $|f(z_0)| \leq M$, oder $f \notin V_{M,n}$. Damit ist $V_{M,n}^c$ abgeschlossen, bzw. $V_{M,n}$ offen.

(b) Nun zeigen wir, dass für alle $M \in \mathbb{N}$ die Menge

$$V_M := \bigcup_{n=M}^{\infty} V_{M,n}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht ist, indem wir beweisen, dass jedes nichtkonstante Polynom P in V_M enthalten ist. Dazu sei P ein solches Polynom und $M \in \mathbb{N}$ beliebig.
Bekanntlich existiert eine Zahl R mit $|P(z)| > M$ für alle $|z| \geq R$. Wir wählen eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > R$. Dann gilt $P \in V_{M,n} \subset V_M$. Da die Menge aller nichtkonstanten Polynome in $H(\mathbb{C})$ dicht ist, folgt damit die Dichtheit von V_M.

Damit ist V als abzählbarer Schnitt offener Mengen in $H(\mathbb{C})$ residual. Da der Schnitt residualer Teilmengen wieder residual ist und die Menge aller streckungsuniversellen Funktionen eine residuale Teilmenge von $H(\mathbb{C})$ bildet, gibt es insbesondere eine in $H(\mathbb{C})$ residuale Teilmenge von streckungsuniversellen Funktionen in V.

2. Nun zeigen wir, dass jede Funktion $f \in V$ auf jeder Kurve nach ∞ unbeschränkt ist. Dazu seien $K \in \mathbb{N}$ und eine Kurve Γ nach ∞ beliebig. Zunächst wählen wir eine Zahl $M_0 > K$ mit

$$\Gamma \cap \{z : |z| = M\} \neq \emptyset \quad \text{für alle } M \geq M_0.$$

Da $f \in V$ ist, existiert eine natürliche Zahl $n \geq M_0$ mit $f \in V_{K,n}$, d.h.

$$|f(z)| > K \text{ für alle } |z| = n.$$

Insbesondere existiert ein $z^* \in \Gamma$ mit $|f(z^*)| > K$.

Da $K \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Wir haben bisher gesehen, dass jede streckungsuniverselle Funktion auf jeder Geraden unbeschränkt ist, und sehr viele sogar auf allen Kurven nach ∞. Im nächsten Satz zeigen wir, dass nicht alle streckungsuniversellen Funktionen auf jeder Kurve nach ∞ unbeschränkt sind. Wir konstruieren also eine streckungsuniverselle Funktion f und eine Kurve Γ nach ∞, so dass f auf Γ beschränkt ist.

2.5 Satz: *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge. Dann existieren eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$, die bezüglich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streckungsuniversell ist, und eine Kurve Γ, so dass f auf Γ beschränkt ist.*

Beweis: 1. Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge kompakter Mengen aus $\mathfrak{M}$ mit $0 \notin K_n$ $(n \in \mathbb{N})$, so dass für alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ eine natürliche Zahl n_0 existiert mit $K \subset K_{n_0}$, vergleiche [17]. Ferner sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome, deren Koeffizienten rationalen Real- und Imaginärteil haben. Zudem sei $((Q_n^*, K_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung, in der jedes Paar (Q_ν, K_μ) $(\nu, \mu \in \mathbb{N})$ unendlich oft vorkommt.

Nun wählen wir eine Teilfolge $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass die Mengen $A_n := a_n^* K_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt sind. Da die Vereinigung der A_n eine Arakelian-Menge ist (vgl. [24]), ist $\mathbb{C}^*\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ an ∞ lokal zusammenhängend. Dies bedeutet insbesondere, dass eine von $z_0 = 0$ ausgehende Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}^\star\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nach ∞ existiert, vgl. [9]. Dann ist

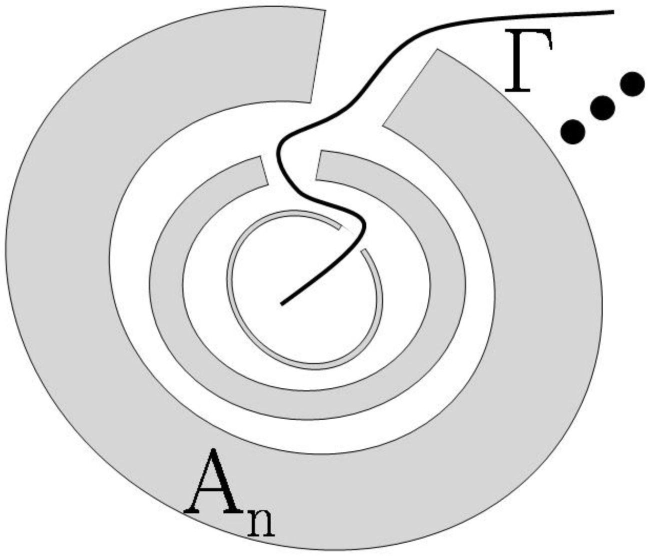

Abbildung 2: Arakelian-Menge E

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \Gamma$$

ebenfalls eine Arakelian-Menge.

2. Nun definieren wir auf E holomorphe Funktionen δ, q vermöge

$$\delta(z) = \begin{cases} -\ln n, & z \in A_n \\ 0, & z \in \Gamma \end{cases}$$

und

$$q(z) := \begin{cases} Q_n^*\left(\frac{z}{a_n^*}\right), \ z \in A_n \\ 0, \ z \in \Gamma. \end{cases}$$

Wir wenden nun den Satz von Arakelian zweimal an. Zunächst wählen wir eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1, \ (z \in E)$$

und anschließend eine ganze Funktion h mit

$$\left| \frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z) \right| < 1, \ (z \in E).$$

Die Funktion $\phi(z) := h(z) \cdot e^{g(z)-1}$ ist dann ganz und erfüllt für alle $z \in E$

$$\begin{aligned} |q(z) - \phi(z)| &< \left|e^{g(z)-1}\right| = e^{Reg(z)-1} \leq \\ &\leq e^{|g(z)-\delta(z)|-1+\delta(z)} < e^{\delta(z)}. \end{aligned}$$

3. Damit folgt für alle $z \in \Gamma$, dass $|\phi(z)| < 1$ ist, also die Beschränktheit von ϕ auf Γ.

4. Auf der Menge A_n folgt

$$\max_{A_n} \left| \phi(z) - Q_n^*\left(\frac{z}{a_n^*}\right) \right| < \frac{1}{n},$$

oder nach einer Substitution

$$\max_{K_n^*} |\phi(a_n^* z) - Q_n^*(z)| < \frac{1}{n}.$$

5. Nun zeigen wir, dass ϕ streckungsuniversell ist. Dazu seien ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ und eine Funktion $g \in A(K)$ beliebig. Dann existieren eine natürliche Zahl n_0 mit $K \subset K_{n_0}$ und eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q_{m_k}(z) \to g(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty).$$

Wir wählen eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit $(K_{n_k}^*, Q_{n_k}^*) = (K_{n_0}, Q_{m_k})$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \max_K \left|\phi(a_{n_k}^* z) - g(z)\right| &\leq \max_{K_{n_k}^*} \left|\phi(a_{n_k}^* z) - Q_{n_k^*}(z)\right| + \\ &+ \max_K |Q_{m_k}(z) - g(z)| \to 0 \ (k \to \infty). \qquad \square \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, dass translationsuniverselle Funktionen nie auf jeder Kurve nach ∞ beschränkt sein können, obwohl es translationsuniverselle ganze Funktionen gibt, die auf jeder Geraden beschränkt sind.

2.6 Satz: *Es sei ϕ eine translationsuniverselle ganze Funktion, d.h. zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und zu jeder Funktion $f \in A(K)$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, so dass*

$$\phi(z + a_n) \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty)$$

gilt. Dann existiert eine Kurve Γ nach ∞, so dass ϕ auf Γ unbeschränkt ist.

Beweis: Es seien $K := \{0\}$ und $f_k(0) := k$ $(k \in \mathbb{N})$. Wir definieren ferner $a_0 := 0$. Da ϕ translationsuniversell und $f_k \in A(K)$ $(k \in \mathbb{N})$ ist, können wir eine Folge komplexer Zahlen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_k| > |a_{k-1}| + 1$ so wählen, dass

$$\max_K |\phi(z + a_k) - f_k(z)| = |\phi(a_k) - k| < 1$$

ist. Daraus folgt

$$\phi(a_k) \to \infty \ (k \to \infty).$$

Damit ist ϕ auf jeder Kurve Γ mit $a_k \in \Gamma$ $(k \in \mathbb{N})$ unbeschränkt. □

3 Marcinkiewicz-Universalität, Variante I

Gemäß Satz 1.8 existiert eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion ϕ, die sich bei geeigneter Annäherung an jeden Randpunkt universell verhält. Wenn nun $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ endlich viele Randpunkte von $\mathbb{D}$ bezeichnen, dann ist die Funktion

$$\psi(z) := (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdot \ldots \cdot (z - \zeta_m) \cdot \phi(z)$$

in folgendem Sinne universell bezüglich jedes Punktes $\zeta \in \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m\}$:
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, jeder Funktion $f \in A(K)$ und jedem $\zeta \in \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m\}$ existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ und $b_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$ so, dass gilt

$$a_n z + b_n \in \mathbb{D} \text{ für alle } z \in K$$

und

$$\frac{\psi(a_n z + b_n)}{a_n z + b_n - \zeta} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty).$$

Sind etwa $\zeta = \zeta_1$, $K \in \mathfrak{M}$ und $f \in A(K)$ gegeben, so folgt aus Satz 1.8 die Existenz von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ und $b_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$ mit

$$a_n z + b_n \in \mathbb{D} \text{ für alle } z \in K$$

und

$$\phi(a_n z + b_n) \to \frac{f(z)}{(\zeta - \zeta_2) \cdot (\zeta - \zeta_3) \cdot \ldots \cdot (\zeta - \zeta_m)} \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty).$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{\psi(a_n z + b_n)}{a_n z + b_n - \zeta} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (n \to \infty).$$

Wir beweisen nun, dass es in jedem Gebiet G und zu jeder abgeschlossenen Menge $E \subset \partial G$ eine in diesem Sinne bezüglich jedes Punktes $\zeta \in E$ universelle Funktion gibt. Dabei kann eine solche Funktion stetig auf $G \cup (\partial G \backslash E)$ sein, wenn es eine auf G holomorphe Funktion gibt, die stetig auf $G \cup (\partial G \backslash E)$ ist.

3.1 Satz: *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G, so dass jeder Punkt $\zeta \in E$ ein Häufungspunkt*

dieser Folge ist. Ferner seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $0 \neq a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *gegeben. Für* $w \in F := \partial G \backslash E$ *sei* $r_w > 0$*, so dass* $E \cap \{z : |z-w| \leq r_w\} = \emptyset$*. Damit sei* $H := G \cup \bigcup_{w\in F} \{z : |z-w| < r_w\}$*. Zudem sei* $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von in* G *holomorphen Funktionen, wobei in dieser Folge eine in* $H(G)$ *dichte Menge enthalten sei.*
Dann gelten folgende Aussagen

1. *Es existiert eine in* $H(G)$ *residuale Menge von Funktionen, so dass jede dieser Funktionen* ϕ *folgende Eigenschaft hat:*
   Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$*, jedem* $\zeta \in E$ *und jeder Funktion* $f \in A(K)$ *existieren Teilfolgen* $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(m_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *natürlicher Zahlen, so dass* $b_{m_k} \to \zeta$ $(k \to \infty)$*,*

   $$a_{n_k} z + b_{m_k} \in G \text{ für alle } z \in K$$

   sowie

   $$\frac{\phi^{(\mu)}(a_{n_k} z + b_{m_k})}{(a_{n_k} z + b_{m_k} - \zeta)^\lambda} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty)$$

   gilt.

2. *Es existiert eine in* H *holomorphe Funktion* ϕ*, so dass die Funktion* $\phi + \Psi_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Eigenschaft aus 1. besitzt.*

Beweis:

1. Es sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen mit

   (a) $H_n \subset \mathring{H}_{n+1} \subset H$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

   (b) für alle Kompakta $K \subset H$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset H_{n_0}$.

   Weiter sei $(\zeta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in E dicht und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $(z_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n^{(k)} \to \zeta^{(k)}$ $(n \to \infty)$, so dass $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)}$ verschieden sind und zudem für eine Teilfolge $(H_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $z_\nu^{(k)} \in \mathring{G}_{\nu+1} \backslash G_\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, wobei $G_\nu := H_{n_\nu}$ ist.

Mit $(\tilde{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten, deren Real- und Imaginärteile rational sind. Außerdem sei $(Q_n, \rho_n, R_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung in der jedes Tupel

$$(\tilde{Q}_n, m, \Psi_l, \zeta^{(k)}) \ (n, k, l, m \in \mathbb{N})$$

unendlich oft vorkommt.

Jetzt sei $(l_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge natürlicher Zahlen so gewählt, dass mit $r_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ gilt:

Die Kreisscheiben $\tilde{D}_{\nu,k} := \left\{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le 2r_\nu\right\}$ sind für $k = 1, 2, \dots \nu$ paarweise disjunkt, es gilt $\tilde{D}_{\nu,k} \subset G$ und $\Omega_\nu := \bigcup_{k=1}^{\nu} \tilde{D}_{\nu,k} \subset \mathring{G}_{\nu+1} \backslash G_\nu$.

Außerdem verlangen wir von der Folge $(l_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, dass mit

$$t_\nu := \min_{k=1,2,\dots,\nu} \left|q_\nu - z_\nu^{(k)}\right|$$

gilt $r_\nu < \frac{t_\nu}{2}$. Mit $d_\nu := \left(\frac{t_\nu}{2}\right)^\lambda$ gilt dann für $k = 1, 2, \dots, \nu$

$$\left(\left|q_\nu - z_\nu^{(k)}\right| - r_\nu\right)^\lambda \ge d_\nu.$$

2. Nun sei $D := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$. Dann ist D in H abgeschlossen. Da die Mengen $\tilde{D}_{\nu,k}$ für verschiedene ν und k paarweise disjunkt sind, ist $H^\star \backslash D$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend, vgl. [24]. Also ist D eine Arakelian-Menge in H. Wir definieren nun folgende auf D holomorphe Funktionen:

   (a) $\delta(z) := -\ln(\nu\mu! \frac{1}{2\pi\rho_\nu d_\nu r_\nu^{\mu+1}})$

   (b) $q(z) := \rho_\nu \left(\left[(z - q_\nu)^\lambda Q_\nu\left(\frac{z - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)\right]^{-\mu} - R_\nu(z)\right) \ (z \in \tilde{D}_{\nu,k})$.

   Hierbei bezeichnet $g^{-\mu}$ eine Funktion h mit $h^{(\mu)} = g$. Wir wenden nun zweimal den Satz von Arakelian an. Zunächst existiert eine in H holomorphe Funktion g, so dass

$$|\delta(z) - g(z)| < 1 \ (z \in D)$$

   gilt. Insbesondere gilt also $Reg(z) - \delta(z) < 1$. Dann existiert eine in H holomorphe Funktion h mit

$$\left|\frac{q(z)}{\exp(g(z) - 1)} - g(z)\right| < 1 \ (z \in D).$$

Die Funktion $\phi(z) := h(z)\exp(g(z)-1)$ ist holomorph in H und erfüllt

$$|q(z)-\phi(z)| < |\exp(g(z)-1)| = \exp(Reg(z)-1) < \exp(\delta(z)).$$

3. Es folgt für alle $k = 1, 2, \ldots, \nu$

$$\max_{\tilde{D}_{\nu,k}} \left| \phi(w) - \rho_\nu \left(\left[(w-q_\nu)^\lambda Q_\nu \left(\frac{w - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}} \right) \right]^{-\mu} - R_\nu(w) \right) \right| < \frac{2\pi \rho_\nu d_\nu r_\nu^{\mu+1}}{\nu \mu!}$$

Mit $D_{\nu,k} := \left\{ z : \left| z - z_\nu^{(k)} \right| \leq r_\nu \right\}$ und der Cauchyschen Integralformel erhalten wir

$$\max_{D_{\nu,k}} \left| \phi^{(\mu)}(w) - q^{(\mu)}(w) \right| = \max_{D_{\nu,k}} \left| \frac{\mu!}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}_{\nu,k}} \frac{\phi(t)-q(t)}{(t-w)^{\mu+1}} dt \right| < \frac{\rho_\nu d_\nu}{\nu}.$$

Mit der Substitution $z = \frac{w - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}$ folgt

$$\max_{|z| \leq \frac{1}{r_v}} \left| \left(\frac{1}{\rho_\nu} \phi + R_\nu \right)^{(\mu)} (a_{l_v} z + z_\nu^{(k)}) - (a_{l_v} z + z_\nu^{(k)} - q_\nu)^\lambda Q_\nu(z) \right| < \frac{d_\nu}{\nu}.$$

Da für $|z| \leq \frac{1}{r_\nu}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)} - q_\nu \right|^\lambda &\geq \left(\left| z_\nu^{(k)} - q_\nu \right| - |a_{l_\nu}| \cdot |z| \right)^\lambda \geq \\ &\geq \left(\left| z_\nu^{(k)} - q_\nu \right| - r_\nu \right)^\lambda \geq d_\nu, \end{aligned}$$

folgt

$$\max_{|z| \leq \frac{1}{r_v}} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_\nu} \phi + R_\nu \right)^{(\mu)} (a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)})}{(a_{l_v} z + z_\nu^{(k)} - q_\nu)^\lambda} - Q_\nu(z) \right| < \frac{1}{\nu}. \tag{3.1}$$

4. Nun definieren wir

$$V := \left\{ \phi \in H(G) : \forall n, l, r, M \in \mathbb{N}\, \exists p \geq M\, \forall k = 1, 2, \ldots, p : \max_{|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi^{(\mu)} \left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} \right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r \right)^\lambda} - Q_l(z) \right| < \frac{1}{n} \right\}$$

und zeigen, dass V residual in $H(G)$ ist.

Wir bemerken zunächst, dass

$$V = \bigcap_{n,l,r,M} \bigcup_{p \geq M} \bigcap_{k=1}^{p} V_{n,l,r,p,k,M}$$

ist, wobei

$$V_{n,l,r,p,k,M} := \left\{ \phi \in H(G) : \max_{|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} - Q_l(z) \right| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Wir zeigen nun, dass $V_{n,l,r,p,k,M}$ offen ist und dass

$$V_{n,l,r,M} = \bigcup_{p \geq M} \bigcap_{k=1}^{p} V_{n,l,r,p,k,M}$$

in $H(G)$ dicht ist. Dann ist V als Schnitt offener dichter Mengen residual.

(a) Die Menge $V^c_{n,l,r,p,k,M}$ ist abgeschlossen:

Dazu sei $(\phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $V^c_{n,l,r,p,k,M}$, die in $H(G)$, d.h. lokal-gleichmäßig, gegen ϕ konvergiert. Wir zeigen nun, dass $\phi \in V^c_{n,l,r,p,k,M}$ ist.

Wir betrachten ein beliebiges z mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}$. Dafür gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} - Q_l(z) \right| = \left| \frac{\phi_\alpha^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} - Q_l(z) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right) - \phi_\alpha^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} \right| \geq \\
&\geq \left| \frac{\phi_\alpha^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} - Q_l(z) \right| - \\
&\qquad - \left| \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right) - \phi_\alpha^{(\mu)}\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r\right)^{\lambda}} \right|.
\end{aligned}$$

Nun seien $\epsilon > 0$ beliebig und $L := dist(\partial G, D_{p,k})^{\lambda}$. Da $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}$ ist, gilt $\left| a_{l_p} z + z_p^{(k)} - z_p^{(k)} \right| \leq \sqrt{|a_{l_p}|}$, was $a_{l_p} z + z_p^{(k)} \in D_{p,k}$ bedeutet. Wir folgern

$$\left| a_{l_p} z + z_p^{(k)} - q_r \right|^{\lambda} \geq L.$$

Da $(\phi_\alpha^{(\mu)})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ gegen $\phi^{(\mu)}$ in $H(G)$ konvergiert, existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left|\phi^{(\mu)}(a_{l_p}z + z_p^{(k)}) - \phi_\alpha^{(\mu)}(a_{l_p}z + z_p^{(k)})\right| < L\epsilon.$$

Damit folgt

$$\left|\frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)} - q_r\right)^\lambda} - Q_l(z)\right| \geq$$
$$\geq \left|\frac{\phi_\alpha^{(\mu)}\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)} - q_r\right)^\lambda} - Q_l(z)\right| - \epsilon.$$

Da $\phi_\alpha \in V_{n,l,r,p,k,M}^c$ ist, folgt

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left|\frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)} - q_r\right)^\lambda} - Q_l(z)\right| \geq \frac{1}{n} - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\phi \in V_{n,l,r,p,k,M}^c$, also die Abgeschlossenheit.

(b) Nun zeigen wir, dass $V_{n,l,r,M}$ in $H(G)$ dicht ist.

Dazu seien $F \in H(G)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir konstruieren eine Funktion $\Psi \in V_{n,l,r,M}$ mit $d(F,\Psi) < \epsilon$.

Zunächst wählen wir eine Funktion Ψ_i mit $d(F,\Psi_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Da für eine in G holomorphe Funktion g gilt $d(\frac{1}{n}g, 0) \to 0$ $(n \to \infty)$, können wir ein $s \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $d(\frac{1}{s}\phi, 0) < \frac{\epsilon}{2}$ ist, wobei ϕ eine Funktion mit der Eigenschaft aus (3.1) ist. Für $\Psi := \frac{1}{s}\phi + \Psi_i$ gilt dann $d(\Psi, F) < \epsilon$.

Außerdem ist $\Psi \in V_{n,l,r,M}$:

Wir können ein $p \geq \max\{M, n\}$ wählen mit

$$(Q_l, s, \Psi_i, q_r) = (Q_p, \rho_p, R_p, q_p).$$

Aus (3.1) folgt damit für $k = 1, 2, \ldots, p$

$$\max_{|z|\leq\frac{1}{rp}} \left|\frac{(\frac{1}{s}\phi + \Psi_i)^{(\mu)}\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)} - q_r\right)^\lambda} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{p} < \frac{1}{n}.$$

Damit ist $\Psi \in V_{n,l,r,M}$ und es folgt die Dichtheit.

Somit ist V residual.

5. Wir zeigen nun, dass jedes $\phi \in V$ die gewünschten Eigenschaften hat. Dazu sei $\phi \in V$ beliebig. Wir konstruieren zunächst eine Folge $(p_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Da $\phi \in V$ ist, existiert zu $n = l = r = M = 1$ ein $p =: p_1 \geq 1$, so dass für alle $k = 1, 2, \ldots p_1$ gilt

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_{p_1}}|}}} \left| \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_{p_1}} z + z_{p_1}^{(k)}\right)}{\left(a_{l_{p_1}} z + z_{p_1}^{(k)} - q_1\right)^\lambda} - Q_1(z) \right| < \frac{1}{1}.$$

Nun seien $p_1, p_2, \ldots, p_{\nu-1}$ für ein $\nu \in \mathbb{N}$ konstruiert. Zu $n = l = r = \nu$ und $M = p_{\nu-1} + 1$ existiert dann ein $p =: p_\nu \geq M > p_{\nu-1}$ so, dass für alle $k = 1, 2, \ldots p_\nu$ gilt

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_{p_\nu}}|}}} \left| \frac{\phi^{(\mu)}\left(a_{l_{p_\nu}} z + z_{p_1}^{(k)}\right)}{\left(a_{l_{p_\nu}} z + z_{p_1}^{(k)} - q_\nu\right)^\lambda} - Q_\nu(z) \right| < \frac{1}{\nu}.$$

Jetzt seien $K \in \mathfrak{M}$, $\zeta \in E$ und $f \in A(K)$ beliebig. Der Approximationssatz von Mergelian liefert eine Teilfolge $(c_s)_{s\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\max_K \left| \tilde{Q}_{c_s}(z) - f(z) \right| < \frac{1}{s}.$$

Wir wählen eine Teilfolge $(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $(\tilde{Q}_{c_s}, q_s) = (Q_{\nu_s}, q_{\nu_s})$.

Zudem sei $S_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $K \subset \left\{z : |z| \leq \frac{1}{r_{p_{\nu_s}}}\right\}$ ist für alle $s \geq S_0$. Dann folgt für $s \geq S_0$

$$\max_K \left| \frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_s}}} z + z_{p_{\nu_s}}^{(k)})}{(a_{l_{p_{\nu_s}}} z + z_{p_{\nu_s}}^{(k)} - q_s)^\lambda} - f(z) \right| < \frac{1}{\nu_s} + \frac{1}{s} =: \epsilon_s. \tag{3.2}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\zeta = \zeta^{(k)}$ ist. Dann wählen wir eine Teilfolge $(\eta_s)_{s\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $q_{\eta_s} = \zeta^{(k)}$. Mit $\alpha_s := a_{l_{p_{\nu_{\eta_s}}}}$ und $\beta_s := z_{p_{\nu_{\eta_s}}}^{(k)}$ folgt $\beta_s \to \zeta$ $(s \to \infty)$ und aus (3.2) folgt

$$\max_K \left| \frac{\phi^{(\mu)}(\alpha_s z + \beta_s)}{(\alpha_s z + \beta_s - \zeta)^\lambda} - f(z) \right| \to 0 \ (s \to \infty).$$

Damit folgt in diesem Fall die Behauptung.

2. Fall: Es existiert eine gegen ζ konvergente Folge $(\zeta^{(k_\alpha)})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left|\zeta^{(k_\alpha)} - \zeta\right| =: \delta_\alpha > 0.$$

Hierbei sei (notfalls durch Ausdünnen) $\delta_1 < 1$ und $\delta_{\nu+1} < \delta_\nu^{2\lambda}$ für $\nu > 1$ angenommen.

Weiter sei $S_\alpha \in \mathbb{N}$ mit $S_\alpha > \max\{S_{\alpha-1}, k_\alpha\}$ so, dass für alle $s \geq S_\alpha$ gilt

$$\left|z_{p_{\nu_s}}^{(k_\alpha)} - \zeta^{(k_\alpha)}\right| < \frac{\delta_\alpha}{2}$$

und $r_{p_{\nu_s}} < \frac{\delta_{\alpha-1}}{4}$. Dann gilt für alle $s \geq S_\alpha$

$$\frac{\delta_\alpha}{2} \leq \left|z_{p_{\nu_s}}^{(k_\alpha)} - \zeta\right| \leq \frac{3}{2}\delta_\alpha$$

und für alle z mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_{p_{\nu_s}}}|}}$ folgt für $s \geq S_{\alpha-1}$

$$\begin{aligned}\left|a_{l_{p_{\nu_s}}} z + z_{p_{\nu_s}}^{(k_{\alpha-1})} - \zeta\right| &\geq \left|z_{p_{\nu_s}}^{(k_{\alpha-1})} - \zeta\right| - |a_{l_{p_{\nu_s}}} z| \geq \\ &\geq \frac{\delta_{\alpha-1}}{2} - r_{p_{\nu_s}} \geq \frac{\delta_{\alpha-1}}{4} \geq \frac{\delta_\alpha^{\frac{1}{2\lambda}}}{4}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nun definieren wir $r_\alpha := k_{\alpha-1}$ und wählen ein Teilfolge $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $e_\alpha > S_\alpha$, so dass $q_{e_\alpha} = \zeta^{(k_\alpha)}$ ist. Insbesondere gilt dann

$$|q_{e_\alpha} - \zeta| = \delta_\alpha.$$

Dann existiert wegen (3.2) zunächst eine Konstante $M_1 < \infty$ mit

$$\begin{aligned}\max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}\right| &= \\ = \max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda} - f(z)\right| &+ \\ + \max_K |f(z)| < M_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit der Identität $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$ und der Konvergenz von $(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ sowie von $(q_{e_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ folgt die Existenz einer Konstanten

$M_2 < \infty$ mit

$$\begin{aligned}
&\left|\left(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta\right)^\lambda - \left(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha}\right)^\lambda\right| = \\
&= |\zeta - q_{e_\alpha}| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\lambda-1} (a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^n (a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^{\lambda-1-n}\right| < \\
&< M_2 \, |\zeta - q_{e_\alpha}| = M_2 \delta_\alpha.
\end{aligned}$$

Damit und mit (3.3) folgt die Existenz einer Konstanten $M_3 < \infty$ mit

$$\begin{aligned}
&\left|1 - \frac{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda}\right| = \\
&\qquad = \left|\frac{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda - (a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda}\right| \leq \\
&\qquad \leq \frac{M_2 \delta_\alpha}{\left(\frac{(\delta_\alpha)^{\frac{1}{2\lambda}}}{4}\right)^\lambda} < M_3 \sqrt{\delta_\alpha}.
\end{aligned}$$

Mit all diesen Abschätzungen folgt nun

$$\begin{aligned}
&\max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda} - f(z)\right| \leq \\
&\quad \leq \max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda} - f(z)\right| + \\
&\quad\quad + \max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda} - \frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}\right| \leq \\
&\quad \leq \epsilon_{e_\alpha} + \max_K \left|\frac{\phi^{(\mu)}(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)})}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}\right| \cdot \\
&\quad\quad\quad \cdot \left|1 - \frac{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - q_{e_\alpha})^\lambda}{(a_{l_{p_{\nu_{e_\alpha}}}} z + z_{p_{\nu_{e_\alpha}}}^{(r_\alpha)} - \zeta)^\lambda}\right| \leq \\
&\quad \leq \epsilon_{e_\alpha} + M_1 M_3 \sqrt{\delta_\alpha} \to 0 \ (\alpha \to \infty).
\end{aligned}$$

Damit ist jedes Element aus V universell.

6. Zum Abschluss zeigen wir noch, dass die im zweiten Beweisteil konstruierte Funktion ϕ die Eigenschaft hat, dass $\phi + \Psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ universell ist. Dabei knüpfen wir wiederum an (3.1) an. Es seien $\Psi \in \{\Psi_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$K \in \mathfrak{M}$ und $f \in A(K)$ gegeben. Der Approximationssatz von Mergelian liefert wiederum eine Teilfolge $(c_s)_{s\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\max_K \left| \tilde{Q}_{c_s}(z) - f(z) \right| < \frac{1}{s}.$$

Nun wählen wir eine Teilfolge $(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$(\tilde{Q}_{c_s}, q_s, \Psi, 1) = (Q_{\nu_s}, q_{\nu_s}, R_{\nu_s}, \nu_s).$$

Zudem sei $S_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $K \subset \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{r_{\nu_s}} \right\}$ für alle $s \geq S_0$ ist. Dann folgt für $s > S_0$ aus (3.1)

$$\max_K \left| \frac{(\phi + \Psi)^{(\mu)}(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)})}{(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)} - q_s)^\lambda} - f(z) \right| < \frac{1}{\nu_s} + \frac{1}{s} =: \epsilon_s. \qquad (3.5)$$

Damit folgt analog zu (3.2) mit $p_n := n$ die Universalität von $\phi + \Psi$. $\square$

3.2 Bemerkung: Falls ein Gebiet G durch endlich viele paarweise disjunkte Jordanbögen berandet ist, existiert eine Funktion Ψ, die genau in G holomorph ist und sich stetig auf den Rand von G fortsetzen lässt, vgl. [18]. Wenn wir diese Funktion Ψ in die Folge $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem obigen Satz aufnehmen, erhalten wir eine Funktion ϕ, die in H holomorph ist, so dass insbesondere $\phi + \Psi$ bezüglich E universell ist. Die Funktion $\phi + \Psi$ ist in G holomorph und wegen $\partial G \backslash E \subset H$ auf $G \cup (\partial G \backslash E)$ stetig.

Aus Satz 3.1 folgt leicht folgendes Ergebnis:

3.3 Satz: *Es seien G ein Gebiet, $E \subset \partial G$ eine abgeschlossene Menge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G, so dass jeder Punkt $\zeta \in E$ Häufungspunkt dieser Folge ist. Ferner sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 \neq a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann existiert eine in $H(G)$ residuale Menge von Funktion ϕ, so dass ϕ und alle Ableitungen von ϕ folgende Eigenschaft besitzen:*
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, jedem $\zeta \in E$, jedem $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jedem Polynom g, dessen Nullstellen nicht in G liegen, und jeder Funktion $f \in A(K)$ existieren Teilfolgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$, so dass $b_{m_k} \to \zeta$ $(k \to \infty)$,

$$a_{n_k} z + b_{m_k} \in G \text{ für alle } z \in K$$

und

$$\frac{\phi^{(\mu)}(a_{n_k}z + b_{m_k})}{g(a_{n_k}z + b_{m_k})} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty)$$

gilt.

Beweis: Mit $M_{\lambda,\mu}$ bezeichnen wir die residuale Menge der universellen Funktionen gemäß Satz 3.1. Dann ist die Menge

$$M := \bigcap_{\lambda,\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}} M_{\lambda,\mu}$$

eine residuale Teilmenge von $H(G)$.

Wir zeigen nun, dass jede Funktion $\phi \in M$ die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu seien ein Punkt $\zeta \in E$, eine Menge $K \in \mathfrak{M}$, eine Funktion $f \in A(K)$ sowie eine natürliche Zahl $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein Polynom g gegeben. Dabei gelte $g(z) = (z - \zeta)^\lambda P(z)$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und einem Polynom P mit $P(\zeta) \neq 0$.

Da $\phi \in M_{\lambda,\mu}$ ist, existieren Teilfolgen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$, so dass $b_{m_k} \to \zeta \ (k \to \infty)$,

$$a_{n_k}z + b_{m_k} \in G \text{ für alle } z \in K$$

und

$$\frac{\phi^{(\mu)}(a_{n_k}z + b_{m_k})}{(a_{n_k}z + b_{m_k} - \zeta)^\lambda} \to f(z)P(\zeta) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty)$$

gilt. Wegen $P(\zeta) \neq 0$ und $a_{n_k}z + b_{m_k} \to \zeta \ (k \to \infty)$ folgt

$$\frac{\phi^{(\mu)}(a_{n_k}z + b_{m_k})}{P(a_{n_k}z + b_{m_k})(a_{n_k}z + b_{m_k} - \zeta)^\lambda} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

4 Marcinkiewicz-Universalität, Variante II

4.1 Eine weitere Universalität in $\mathbb{C}$

Bekanntlich konvergiert bei einer ganzen Funktion f der Differenzenquotient $\frac{f(z+b_n)-f(z)}{b_n}$ mit einer Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegen $f'(z)$. Durch eine Veränderung dieses Differenzenquotienten ist ein völlig anderes Verhalten möglich. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

4.1 Satz: *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dann existiert eine in $H(\mathbb{C})$ residuale Menge von Funktionen ϕ, so dass jede dieser Funktionen ϕ die folgende Eigenschaft besitzt:*
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und jeder Funktion $f \in A(K)$ existieren Teilfolgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\frac{\phi(a_{n_k}z + b_{m_k}) - \phi(a_{n_k}z)}{b_{m_k}} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty).$$

4.2 Bemerkung: Die Unbeschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wesentlich. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränkte Folge und ϕ eine ganze Funktion ist, so dass mit Teilfolgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und einer Funktion $f \in A(K)$ gilt

$$\frac{\phi(a_{n_k}z + b_{m_k}) - \phi(a_{n_k}z)}{b_{m_k}} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty),$$

dann ist $f(z) = \phi'(cz)$ mit einer komplexen Zahl c: Auf Grund der Beschränktheit der Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, existiert eine Teilfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$, so dass $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ gegen eine komplexe Zahl c konvergiert. Mit $\alpha_l := a_{n_{k_l}}$ und $\beta_l := b_{m_{k_l}}$ erhalten wir

$$\frac{\phi(\alpha_l z + \beta_l) - \phi(\alpha_l z)}{\beta_l} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (l \to \infty).$$

Aus der lokal-gleichmäßigen Konvergenz von $\left(\frac{\phi(z+\beta_l)-\phi(z)}{\beta_l}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\phi'(z)$, vgl. [12], erhalten wir

$$\max_k \left| \frac{\phi(\alpha_l z + \beta_l) - \phi(\alpha_l z)}{\beta_l} - \phi'(\alpha_l z) \right| \to 0 \ (l \to \infty),$$

woraus $f(z) = \phi'(cz)$ folgt.

Zum Beweis von Satz 4.1 benötigen wir folgendes Lemma:

4.3 Lemma: *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom. Dann existiert zu $b \neq 0$ ein Polynom P^* mit*

$$\frac{P^*(z+b) - P^*(z)}{b} = P(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Wir zeigen, dass es Koeffizienten $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{n+1}^*$ gibt, so dass gilt

$$P^*(z) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^* z^k.$$

Für ein solches Polynom P^* (mit zu bestimmenden Koeffizienten a_k^*) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{P^*(z+b) - P^*(z)}{b} &= \frac{1}{b}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^*(z+b)^k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k^* z^k\right) = \\
= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^*}{b}\left((z+b)^k - z^k\right) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^*}{b}\left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z^l b^{k-l} - z^k\right) = \\
= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^*}{b} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} z^l b^{k-l} &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{k-1} a_k^* \binom{k}{l} z^l b^{k-1-l} = \\
= \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} &= \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l+1}^{n+1} a_k^* \binom{k}{l} b^{k-l-1}\right) z^l.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{1}{b}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^*(z+b)^k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k^* z^k\right) = P(z)$$

genau dann, wenn für $l = 0, 1, \ldots n$ gilt

$$\sum_{k=l+1}^{n+1} a_k^* \binom{k}{l} b^{k-l-1} = a_l,$$

d.h. wenn

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n+1}^* \binom{n+1}{n} \\
a_{n-1} &= a_n^* \binom{n}{n-1} + a_{n+1}^* \binom{n+1}{n-1} b \\
a_{n-2} &= a_{n-1}^* \binom{n-1}{n-2} + a_n^* \binom{n}{n-2} b + a_{n+1}^* \binom{n+1}{n-2} b^2 \\
&\vdots \\
a_0 &= a_1^* \binom{1}{0} + a_2^* \binom{2}{0} b + \ldots + a_{n+1}^* \binom{n+1}{0} b^n
\end{aligned}$$

gilt, bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n+1}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \binom{n+1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_{n+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

gilt. Die Determinante obiger Matrix ist offensichtlich von Null verschieden. Damit ist dieses Gleichungssystem lösbar und somit P^* konstruiert. □

Im Folgenden bezeichnen wir mit L_bP das zu dem Polynom P mit $b \neq 0$ konstruierte Polynom P^* aus obigem Lemma. Damit können wir nun Satz 4.1 beweisen.

Beweis (von Satz 4.1):

1. Es seien $(\tilde{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen mit $0 \notin \tilde{K}_n$ und $\tilde{K}_n \in \mathfrak{M}$ so, dass für alle Kompakta $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ eine natürliche Zahl n_0 existiert mit $K \subset \tilde{K}_{n_0}$, vgl. [17].
   Mit $(\tilde{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir wieder eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten, deren Real- und Imaginärteile rational sind.
   Weiter sei $(K_n, Q_n, P_n, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung, in der jedes Tupel

   $$(\tilde{K}_l, \tilde{Q}_m, \tilde{Q}_n, s) \; (l, m, n, s \in \mathbb{N})$$

   unendlich oft vorkommt.
   Wir wählen nun eine Teilfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass paarweise disjunkte Jordangebiete $\tilde{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ existieren mit $A_n := \alpha_n K_n \subset \tilde{A}_n$. Dabei verlangen wir zudem $dist(\partial\tilde{A}_n, \partial A_n) > 0$. Sodann wählen wir eine Teilfolge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|\beta_n| < dist(\partial\tilde{A}_n, \partial A_n)$.
   Gemäß [24] ist $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$ eine Arakelian-Menge.

2. Nun definieren wir folgende auf A holomorphe Funktionen:

   (a) $\delta(z) := -\ln \frac{2n}{\rho_n|\beta_n|}$ $(z \in \tilde{A}_n)$ und

   (b) $q(z) := \rho_n \left[L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n}\right) - P_n(z)\right]$ $(z \in \tilde{A}_n)$.

Der Satz von Arakelian liefert zunächst eine ganze Funktion g mit

$$|\delta(z) - g(z)| < 1 \ (z \in A).$$

Insbesondere gilt also $Reg(z) - \delta(z) < 1$ für alle $z \in A$. Sodann liefert der Satz von Arakelian eine ganze Funktion h mit

$$\left| \frac{q(z)}{\exp(g(z) - 1)} - h(z) \right| < 1 \ (z \in A).$$

Die Funktion $\phi(z) := h(z) \exp(g(z) - 1)$ ist dann ebenfalls eine ganze Funktion und erfüllt für alle $z \in A$

$$|q(z) - \phi(z)| < |\exp(g(z) - 1)| = \exp\left(Reg(z) - 1\right) < \exp(\delta(z)).$$

Damit folgt

$$\max_{\tilde{A}_n} \left| \phi(z) - \rho_n \left[L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right) - P_n(z) \right] \right| < \frac{\rho_n |\beta_n|}{2n},$$

bzw.

$$\max_{\tilde{A}_n} \left| \frac{1}{\rho_n} \phi(z) + P_n(z) - \left[L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right) \right] \right| < \frac{|\beta_n|}{2n}.$$

Da $z + \beta_n \in \tilde{A}_n$ aus $z \in A_n$ folgt, erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}
&\max_{A_n} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z + \beta_n) - \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z)}{\beta_n} - Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right) \right| = \\
&= \max_{A_n} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z + \beta_n) - \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z)}{\beta_n} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z+\beta_n}{\alpha_n} \right) - L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right)}{\beta_n} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|\beta_n|} \left(\max_{A_n} \left| \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z + \beta_n) - L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z + \beta_n}{\alpha_n} \right) \right| + \right. \\
&\qquad \left. + \max_{A_n} \left| \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z) - L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right) - \right| \right) \leq \\
&\leq \frac{2}{|\beta_n|} \max_{\tilde{A}_n} \left| \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(z) - \left[L_{\beta_n} Q_n \left(\frac{z}{\alpha_n} \right) \right] \right| < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Eine Substitution liefert

$$\max_{K_n} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(\alpha_n z + \beta_n) - \left(\frac{1}{\rho_n} \phi + P_n \right)(\alpha_n z)}{\beta_n} - Q_n(z) \right| < \frac{1}{n}. \quad (4.1)$$

3. Wir definieren nun

$$V := \Big\{\phi \in H(\mathbb{C}) : \forall l,m,n,M \in \mathbb{N}\ \exists p \geq M \text{ mit } K_p = \tilde{K}_n \text{ und } \max_{K_p}\left|\frac{\phi(\alpha_p z+\beta_p)-\phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{m}\Big\}.$$

Dann ist

$$V = \bigcap_{l,m,n,M\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq M} V_{l,m,n,M,p},$$

wobei

$$V_{l,m,n,M,p} = \left\{\phi \in H(\mathbb{C}) : \max_{K_p}\left|\frac{\phi(\alpha_p z+\beta_p)-\phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{m}\right\}$$

ist für $K_p = \tilde{K}_n$ und $V_{l,m,n,M,p} = \emptyset$ ist für $K_p \neq \tilde{K}_n$.

Wir zeigen nun, dass V residual in $H(\mathbb{C})$ ist. Dazu zeigen wir, dass $V^c_{l,m,n,M,p}$ abgeschlossen und

$$\begin{aligned} V_{l,m,n,M} := \bigcup_{p\geq M} V_{l,m,n,M,p} &= \\ &= \Big\{\phi \in H(\mathbb{C}) : \exists p \geq M \text{ mit } K_p = \tilde{K}_n \text{ und} \\ &\qquad \max_{K_p}\left|\frac{\phi(\alpha_p z+\beta_p)-\phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{m}\Big\} \end{aligned}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht ist.

(a) Die Menge $V^c_{l,m,n,M,p}$ ist abgeschlossen:

Dazu sei $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $V^c_{l,m,n,M,p}$ die in $H(\mathbb{C})$ gegen ϕ konvergiert. Wir zeigen nun, dass $\phi \in V^c_{l,m,n,M,p}$ ist.

Für $z \in K_p$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{\phi(\alpha_p z+\beta_p)-\phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z)\right| &\geq \\ \geq \left|\frac{\phi_\nu(\alpha_p z+\beta_p)-\phi_\nu(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z)\right| &- \\ - \left|\frac{\phi(\alpha_p z+\beta_p)-\phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - \frac{\phi_\nu(\alpha_p z+\beta_p)-\phi_\nu(\alpha_p z)}{\beta_q}\right|&. \end{aligned}$$

Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein ν_0 mit

$$\max_{\tilde{A}_p}|\phi_{\nu_0}(z)-\phi(z)| < \frac{1}{2}\epsilon|\beta_p|.$$

Da für $z \in K_p$ gilt $\alpha_p z + \beta_p \in \tilde{A}_p$ und $\alpha_p z \in \tilde{A}_p$, folgt

$$\max_{K_p} \left| \frac{\phi(\alpha_p z + \beta_p) - \phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - \frac{\phi_{\nu_0}(\alpha_p z + \beta_p) - \phi_{\nu_0}(\alpha_p z)}{\beta_p} \right| < \epsilon.$$

Da $\phi_{\nu_0} \in V^c_{l,m,n,M,p}$ ist, folgt für ein $z \in K_p$

$$\left| \frac{\phi(\alpha_p z + \beta_p) - \phi(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_l(z) \right| \geq \frac{1}{m} - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\phi \in V^c_{l,m,n,M,p}$ und damit die Abgeschlossenheit.

(b) Nun zeigen wir, dass $V_{l,m,n,M}$ in $H(\mathbb{C})$ dicht ist. Dazu sei $F \in H(\mathbb{C})$ beliebig.

Wir wählen ein Polynom $P \in \left\{ \tilde{Q}_n : n \in \mathbb{N} \right\}$ mit $d(P, F) < \frac{\epsilon}{2}$ und eine natürliche Zahl s mit $d(\frac{1}{s}\phi, 0) < \frac{\epsilon}{2}$, wobei ϕ eine Funktion mit der Eigenschaft (4.1) ist. Dann gilt zunächst $d(\frac{1}{s}\phi + P, F) < \epsilon$. Außerdem ist $\frac{1}{s}\phi + P \in V_{l,m,n,M}$:

Wir wählen ein $p \geq \max\{M, m\}$ mit

$$(\tilde{K}_n, Q_l, P, s) = (K_p, Q_p, P_p, \rho_p).$$

Dann folgt aus (4.1):

$$\max_{K_p} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_p}\phi + P_p\right)(\alpha_p z + \beta_p) - \left(\frac{1}{\rho_p}\phi + P_p\right)(\alpha_p z)}{\beta_p} - Q_p(z) \right| < \frac{1}{p}.$$

Damit ist die Dichtheit gezeigt.

4. Wir zeigen nun, dass jedes $\phi \in V$ die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu seien $K \in \mathfrak{M}$ mit $0 \notin K$ und $f \in A(K)$ gegeben. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $K \subset \tilde{K}_{n_0}$ ist.

Der Satz von Mergelian liefert eine Teilfolge $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $\tilde{Q}_{m_k} \to f$ gleichmäßig auf K $(k \to \infty)$.

Nun wählen wir eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$(\tilde{K}_{n_0}, \tilde{Q}_{m_k}) = (K_{n_k}, Q_{n_k}) \ (k \in \mathbb{N})$$

gilt. Sodann konstruieren wir eine Folge natürlicher Zahlen $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Es sei $p_0 := 1$ und für ein $\nu \in \mathbb{N}$ sei $p_{\nu-1}$ bereits konstruiert. Da $\phi \in V$ ist, folgt, dass zu $m = \nu$, $n = n_0$, $l = n_\nu$ und $M := p_{\nu-1} + 1$ ein $p_\nu > p_{\nu-1}$ existiert mit $K_{p_\nu} = \tilde{K}_{n_0}$ und

$$\max_{K_{p_\nu}} \left| \frac{\phi(\alpha_{p_\nu} z + \beta_{p_\nu}) - \phi(\alpha_{p_\nu} z)}{\beta_{p_\nu}} - Q_{n_\nu}(z) \right| < \frac{1}{\nu}.$$

Wir folgern daraus

$$\max_{K} \left| \frac{\phi(\alpha_{p_\nu} z + \beta_{p_\nu}) - \phi(\alpha_{p_\nu} z)}{\beta_{p_\nu}} - f(z) \right| < \\ < \frac{1}{\nu} + \max_{K} |\tilde{Q}_{m_\nu} - f(z)| \to 0 \ (\nu \to \infty).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Ein zu diesem Ergebnis analoges Resultat für allgemeine Gebiete ist ebenfalls gültig.

4.2 Eine weitere Universalität in allgemeinen Gebieten

4.4 Satz: *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit*

$$0 \neq a_n, c_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G, so dass jeder Punkt $\zeta \in \partial G$ ein Häufungspunkt dieser Folge ist. Dann existiert eine in $H(G)$ residuale Menge von Funktionen ϕ, so dass jede dieser Funktionen ϕ die folgende Eigenschaft besitzt:
Zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$, jeder Funktion $f \in A(K)$ und jedem $\zeta \in \partial G$ existieren Teilfolgen $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $b_{l_k} \to \zeta \ (k \to \infty)$,

$$a_{n_k} z + b_{l_k} + c_{m_k} \in G \text{ für alle } z \in K$$

und

$$\frac{\phi(a_{n_k} z + b_{l_k} + c_{m_k}) - \phi(a_{n_k} z + b_{l_k})}{c_{m_k}} \to f(z) \text{ gleichmäßig auf } K \ (k \to \infty).$$

Beweis: 1. Wir beginnen wie im Beweis zu Satz 3.1: Es sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen mit

(a) $H_n \subset \mathring{H}_{n+1} \subset G$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

(b) für alle Kompakta $K \subset G$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset H_{n_0}$.

Weiter sei $(\zeta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in ∂G dicht und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $\left(z_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n^{(k)} \to \zeta^{(k)}$ $(n \to \infty)$, so dass $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)}$ verschieden sind und zudem für eine Teilfolge $(H_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $z_\nu^{(k)} \in \mathring{G}_{\nu+1}\backslash G_\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, wobei $G_\nu := H_{n_\nu}$ ist.

Mit $(\tilde{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten, deren Real- und Imaginärteile rational sind und mit $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $H(G)$ dichte Folge. Außerdem sei $(Q_n, R_n, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung in der jedes Tupel $(\tilde{Q}_n, \Psi_l, m)$ $(l, n, m \in \mathbb{N})$ unendlich oft vorkommt.

Jetzt sei $(l_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge natürlicher Zahlen so gewählt, dass mit $r_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ gilt:

Die Kreisscheiben $\tilde{D}_{\nu,k} := \left\{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le 2r_\nu\right\}$ sind für $k = 1, 2, \ldots \nu$ paarweise disjunkt, es gilt $\tilde{D}_{\nu,k} \subset G$ und $\Omega_\nu := \bigcup_{k=1}^{\nu} \tilde{D}_{\nu,k} \subset \mathring{G}_{\nu+1}\backslash G_\nu$.

Zudem wählen wir eine Teilfolge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $|\gamma_n| < r_n$ ist.

2. Nun sei $D := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$. Dann ist D in G abgeschlossen. Da die Mengen $\tilde{D}_{\nu,k}$ für verschiedene ν und k paarweise disjunkt sind, ist die Menge $G^\star\backslash D$ zusammenhängend und an ∞ lokal zusammenhängend. Also ist D eine Arakelian-Menge in G, vgl. [24]. Wir definieren nun folgende auf D holomorphe Funktionen:

   (a) $\delta(z) := -\ln\left(\frac{\nu}{2\rho_\nu|\gamma_\nu|}\right)$ und

   (b) $q(z) := \rho_\nu\left(L_{\gamma_\nu}Q_\nu\left(\frac{z-z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right) - R_\nu(z)\right)$ $(z \in \tilde{D}_{\nu,k})$.

3. Durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Arakelian erhalten wir analog zum Beweis von Satz 3.1 eine in G holomorphe Funktion ϕ, so dass für alle $k = 1, 2, \ldots, \nu$ gilt

$$\max_{\tilde{D}_{\nu,k}}\left|\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z) - L_{\gamma_\nu}Q_\nu\left(\frac{z - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)\right| < \frac{2|\gamma_\nu|}{\nu}.$$

Da $z+\gamma_\nu \in \tilde{D}_{\nu,k}$ aus $z \in D_{\nu,k} := \left\{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le r_\nu\right\}$ folgt, erhalten wir

$$\max_{D_{\nu,k}} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z+\gamma_\nu) - \left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z)}{\gamma_\nu} - Q_\nu\left(\frac{z - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)\right| =$$

$$= \max_{D_{\nu,k}} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z+\gamma_\nu) - \left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z)}{\gamma_\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{L_{\gamma_\nu} Q_\nu\left(\frac{z+\gamma_\nu - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right) - L_{\gamma_\nu} Q_\nu\left(\frac{z - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)}{\gamma_\nu}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\gamma_\nu|}\left(\max_{D_{\nu,k}}\left|\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z+\gamma_\nu) - L_{\gamma_\nu} Q_\nu\left(\frac{z+\gamma_\nu - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)\right| + \right.$$

$$\left. + \max_{D_{\nu,k}}\left|\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(z) - L_{\gamma_\nu} Q_\nu\left(\frac{z - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right)\right|\right) < \frac{1}{\nu}.$$

Eine Substitution liefert

$$\max_{|z|\le \frac{1}{r_v}} \left| \frac{\left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)} + \gamma_\nu) - \left(\frac{1}{\rho_\nu}\phi + R_\nu\right)(a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)})}{\gamma_\nu} - \right.$$

$$\left. - Q_\nu(z)\right| < \frac{1}{\nu}. \tag{4.2}$$

4. Nun bezeichnen wir mit V die folgende Menge:

$$V := \left\{\phi \in H(G) : \forall n, l, M \in \mathbb{N}\ \exists p \ge M\ \forall k = 1, 2, \dots p : \right.$$

$$\left. \max_{|z|\le \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi\left(a_{l_p} z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Wir zeigen jetzt, dass V in $H(G)$ residual ist und dass jede Funktion $\phi \in V$ die gewünschte Eigenschaft hat. Zunächst ist

$$V = \bigcap_{n,l,M\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\ge M} \bigcap_{k=1}^{p} V_{n,l,M,p,k}$$

mit

$$V_{n,l,M,p,k} := \left\{\phi \in H(G) : \right.$$

$$\left. \max_{|z|\le \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi\left(a_{l_p} z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_p} z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - Q_l(z)\right| < \frac{1}{n}\right\}.$$

(a) Die Menge $V^c_{n,l,M,p,k}$ ist abgeschlossen, denn für eine in $H(G)$ gegen ϕ konvergente Folge $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $V^c_{n,l,M,p,k}$ existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{\tilde{D}_{p,k}} |\phi_\alpha(z) - \phi(z)| < \frac{1}{2}\epsilon|\gamma_p|.$$

Für $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}$ gilt $a_{l_p}z + z_p^{(k)} \in \tilde{D}_{p,k}$ und $a_{l_p}z + z_p^{(k)} + \gamma_p \in \tilde{D}_{p,k}$. Es folgt

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi_\alpha\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi_\alpha\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - \right.$$
$$\left. - \frac{\phi\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} \right| < \epsilon$$

und damit

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - Q_l(z) \right| \geq$$
$$\geq \max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi_\alpha\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi_\alpha\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - Q_l(z) \right| -$$
$$- \max_{|z|\leq \frac{1}{\sqrt{|a_{l_p}|}}} \left| \frac{\phi_\alpha\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi_\alpha\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - \right.$$
$$\left. - \frac{\phi\left(a_{l_p}z + \gamma_p + z_p^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} \right| \geq \frac{1}{n} - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Abgeschlossenheit.

(b) Die Menge $\bigcup_{p\geq M} \bigcap_{k=1}^{p} V_{l,n,M,p,k} =: V_{l,n,M}$ ist dicht in $H(G)$:
Dazu seien $F \in H(G)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $s \in \mathbb{N}$ mit $d(\frac{1}{s}\phi, 0) < \frac{\epsilon}{2}$, wobei ϕ eine Funktion mit der Eigenschaft (4.2) ist, und ein R_t mit $d(R_t, F) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt $d(\frac{1}{s}\phi + R_t, F) < \epsilon$. Außerdem gilt $\frac{1}{s}\phi + R_t \in V_{l,n,M}$: Dazu wählen wir ein $p > \max\{M, n\}$ mit $(Q_l, R_t, s) = (Q_p, R_p, \rho_p)$. Aus (4.2) folgt für $k = 1, 2, \ldots, p$

$$\max_{|z|\leq \frac{1}{r_p}} \left| \frac{\left(\frac{1}{s}\phi + R_t\right)\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)} + \gamma_p\right) - \left(\frac{1}{s}\phi + R_t\right)\left(a_{l_p}z + z_p^{(k)}\right)}{\gamma_p} - \right.$$
$$\left. - Q_l\left(z\right) \right| < \frac{1}{n},$$

was $\frac{1}{s}\phi + R_t \in V_{l,n,M}$ bedeutet. Damit folgt die Dichtheit.

5. Abschließend zeigen wir, dass jede Funktion $\phi \in V$ universell ist:

   Dazu seien $K \in \mathfrak{M}$, $\zeta \in \partial G$ und $f \in A(K)$ beliebig. Mit dem Satz von Mergelian existiert zunächst eine Folge $(d_s)_{s\in\mathbb{N}}$ mit
$$\max_K |Q_{d_s} - f(z)| < \frac{1}{s}.$$
   Nun konstruieren wir eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(p_s)_{s\in\mathbb{N}}$. Es sei $p_1 := 1$. Jetzt sei p_{s-1} für ein $s > 1$ bereits konstruiert. Da $\phi \in V$ ist, existiert zu $l = d_s$, $M = p_{s-1} + 1$ und $n = s$ ein $p_s \geq M > p_{s-1}$ mit $K \subset \left\{|z| \leq \frac{1}{r_{p_s}}\right\}$, so dass für alle $k = 1, 2, \ldots, p_s$ gilt
$$\max_K \left| \frac{\phi\left(a_{l_{p_s}} z + \gamma_{p_s} + z_{p_s}^{(k)}\right) - \phi\left(a_{l_{p_s}} z + z_{p_s}^{(k)}\right)}{\gamma_{p_s}} - f(z) \right| < \frac{1}{s} + \frac{1}{s}. \quad (4.3)$$
   Nun ist ζ ein Häufungspunkt der Menge $\left\{z_{p_s}^{(k)} : k = 1, 2, \ldots p_s, s \in \mathbb{N}\right\}$ und wir können k_α und s_α mit $1 \leq k_\alpha \leq p_{s_\alpha}$ $(n \in \mathbb{N})$ wählen mit
$$z_{p_{s_\alpha}}^{(k_\alpha)} \to \zeta \ (\alpha \to \infty).$$

Damit folgt aus (4.3) die Behauptung. □

5 Weitere Aussagen in $\mathbb{R}$

5.1 Partiell differenzierbare universelle Funktionen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass es Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die in einigen Richtungen partiell differenzierbar sind und in anderen Richtungen in gewisser Weise maximal nicht-differenzierbar sind.

Wenn wir zu einer reellen Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $0 \neq h_k \to 0$ $(k \to \infty)$ eine universelle Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gemäß Satz 1.1 wählen und $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ vermöge

$$F(x,y) := f(x) + e^y$$

definieren, dann existiert $\frac{\partial F}{\partial y}$ und zu jeder messbaren Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert eine Teilfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$, so dass fast sicher auf $[0,1]$ gilt

$$\frac{F(x+h_{k_l},y) - F(x,y)}{h_{k_l}} = \frac{f(x+h_{k_l}) - f(x)}{h_{k_l}} \to g(x) \ (l \to \infty). \tag{5.1}$$

Dabei ist klar, dass in (5.1) die Funktion g nicht von y abhängen kann. Wir untersuchen nun, ob es zu einer vorgegebenen reellen Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $0 \neq h_k \to 0$ $(k \to \infty)$ eine Funktion $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die partiell nach einigen Richtungen differenzierbar ist und zudem für jede andere Richtung x_i und jede messbare Funktion $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{F(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h_{n_k},x_{i+1},\ldots,x_n) - F(x)}{h_{n_k}} \to g(x) \ (k \to \infty)$$

fast sicher auf $[0,1]^n$.

Wir werden eine Kombination der Approximationssätze von Luzin und Weierstraß verwenden. Dafür sei die abzählbare Menge $\mathcal{Q}$ aller Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei die (i,j)-te Koordinatenfunktion $F_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist, zu einer Folge $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ angeordnet. Damit gilt folgender Satz, vgl. [28]:

5.1 Satz: *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\phi : [0,1]^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ eine messbare Funktion. Dann existieren eine Teilfolge $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ und messbare Mengen $A_s \subset [0,1]^n$,* *so dass für alle $s \in \mathbb{N}$ und alle $x \in A_s$ gilt*

$$\lambda^n([0,1]^n \backslash A_s) < \frac{1}{2^s} \text{ und } \|\phi(x) - P_{k_s}(x)\| < \frac{1}{s}.$$

Für Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h. für

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{pmatrix}$$

schreiben wir $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ für

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{12}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial F_{1n}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{22}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial F_{2n}}{\partial x_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m1}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{m2}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist $\int_0^{x_1} F(t, x_2, x_3, \dots, x_n)dt$ komponentenweise zu verstehen. Zudem vereinbaren wir $I := [0,1]$.

Wesentlich wird folgendes Lemma aus [7] sein:

5.2 Lemma: *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $P = (P_1, \dots, P_n) \in C(I^n, \mathbb{R}^n)$ sowie $F_0 \in C(I^n, \mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$. Dann existieren ein $F \in C(I^n, \mathbb{R})$ und eine offene Menge $W \subset \mathring{I}^n$ mit $\lambda^n(W) = 1$, so dass*

1. *∇F auf W existiert und stetig ist,*
2. *$|\nabla F(x) - P(x)| < \epsilon$, für alle $x \in W$ und*
3. *$\|F - F_0\|_\infty < \epsilon$.*

Außerdem verwenden wir eine Aussage über die Differentiation von Parameterintegralen, vgl. [27]:

5.3 Lemma: *Es seien μ ein Maß auf Y, $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \times Y \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x, \cdot)$ für alle $x \in U$ integrierbar ist. Es gelte*

1. *$f(\cdot, y)$ ist für fast alle $y \in Y$ stetig differenzierbar und*

2. *es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to R \cup \{-\infty, \infty\}$ mit*

$$\sup_U \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \leq g(y)$$

für fast alle $y \in Y$. Dann ist die Funktion $\phi(x) := \int f(x,y)d\mu(y)$ auf U stetig differenzierbar und es gilt

$$\phi'(x) = \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} d\mu(y) \text{ für alle } x \in U.$$

Nützlich ist ebenfalls folgende Integralabschätzung:

5.4 Lemma: *Die Funktion $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $[a,b]$. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b \phi(x)dx \right| \leq \int_a^b |\phi(x)|dx.$$

Einen Beweis findet man etwa in [20].

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Kapitels:

5.5 Satz: *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, eine Menge $M \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\emptyset \neq M \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ sowie eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $0 \neq h_k \to 0$ $(k \to \infty)$ gegeben. Dann existiert eine stetige Funktion $f : I^n \to \mathbb{R}^m$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Für jedes $i \notin M$ existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ auf I^n und zu jedem $i \in M$ und zu jeder messbaren Funktion $g : I^n \to \mathbb{R}^m$ existiert eine Teilfolge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so dass

$$\frac{f(x + h_{k_l} e_i) - f(x)}{h_{k_l}} \to g(x) \text{ f.s. auf } I^n \ (l \to \infty)$$

gilt. Hierbei bezeichnet e_i den i-ten Einheitsvektor: $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $M = \{1, 2, \ldots, l\}$ ist.

1. Wir definieren nun für $i \notin M$ Folgen $(h_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ vermöge $h_k^i = h_k e_i$. Mit $(P_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung von $\mathcal{Q}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$P_k(x) := \frac{\partial P_k^*(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_l}.$$

Hierbei nehmen wir an, dass $P_0 = P_1 = 0$ ist. Induktiv konstruieren wir nun für $j \notin M$

- eine Funktionenfolge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(I^n, \mathbb{R}^m)$,
- eine Folge reeller Zahlen $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $r_k < r_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- eine Folge reeller Zahlen $(t_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k^j = h_{r_k}^j$ und $|t_{k+1}^j| < \frac{|t_k^j|}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- eine Folge offener Teilmengen $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von I^n mit $\lambda^n(V_k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- eine Folge kompakter Teilmengen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von V_k mit $\lambda^n(V_k \backslash E_k) < \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und
- eine Funktionenfolge $(F_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(I^n, \mathbb{R}^m)$.

Hierbei gelte für $j \notin M$

(a) J_{F_k} und $J_{F_k^*}$ existieren und sind stetig auf V_k,

(b) $\|J_{F_k}(x) - P_k(x)\| < \frac{1}{2^k}$ für alle $x \in V_k$,

(c) $\left|J_{F_k^*}(x)h - P_k^*(x)h\right| < \frac{|h|}{2^k}$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $h_i = 0$ $(i \in M)$ und für alle $x \in V_k$,

(d) $\max_{I^n} |F_k(x) - F_{k-1}(x)| < \frac{|t_{k-1}^j|}{k}$,

(e) $\max_{I^n} \left|F_k^*(x) - F_{k-1}^*(x)\right| < \frac{|t_{k-1}^j|}{k}$ und

(f) $x + t_k^j \in V_k$ sowie $\frac{1}{|t_k^j|} \left|F_k^*(x + t_k^j) - F_k^*(x) - J_{F_k^*}(x)t_k^j\right| < \frac{1}{k}$ für alle $x \in E_k$.

Es seien $F_0 = F_1 = F_0^* = F_1^* = 0$, $V_1 = \mathring{I}^n$ und E_1 eine beliebige kompakte Teilmenge von V_1 mit $\lambda^n(E_1) > \frac{1}{2}$. Nun sei r_1 so gewählt, dass $x + |h_{r_1}| \in V_1$ ist für alle $x \in E_k$.
Jetzt seien $F_{k-1}, F_{k-1}^*, V_{k-1}, E_{k-1}$ und r_{k-1}^j $(j \notin M)$ für ein $k > 1$ konstruiert.
Mit Hilfe von Lemma 5.2 erhalten wir nun für $i = 1, 2, \ldots, m$ Funktionen $F_{k,i} \in C(I^n, \mathbb{R}^m)$ und offene Mengen $W_i \subset I^n$ mit $\lambda^n(W_i) = 1$ so,

dass $\nabla F_{k,i}$ auf W_i existiert und stetig ist, $|\nabla F_{k,i}(x) - P_{k,i}(x)| < \frac{1}{m2^k}$ für alle $x \in W_i$ und $\max_{I^n} |F_{k,i}(x) - F_{k-1,i}(x)| < \frac{\delta_{k-1}}{km}$ gilt, wobei $\delta_{k-1} := \min_{1 \le j \le n} |t_{k-1}^j|$.
Nun definieren wir $F_k : I^n \to \mathbb{R}^m$ durch $F_k = (F_{k,1}, F_{k,2}, \ldots, F_{k,m})^t$ und $V_k := \bigcap_{i=1}^m W_i$. Wir erhalten

- V_k ist eine offene Teilmenge von I^n mit $\lambda^n(V_k) = 1$,
- J_{F_k} existiert und ist stetig auf V_k,
- $\|J_{F_k}(x) - P_k(x)\| < \frac{1}{2^k}$ für alle $x \in V_k$ und
- $\max_{I^n} |F_k(x) - F_{k-1}(x)| < \frac{\delta_{k-1}}{k}$.

Wir definieren nun für $x \in I^n$

$$F_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_l} F_k(t_1, \ldots, t_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) dt_1 \ldots dt_l.$$

Da F_k stetig ist, ist dann F_k^* eine stetige Funktion und die partiellen Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_l$ existieren auf I^n.
Da für alle $j \notin M$ und alle $i = 1, 2, \ldots, m$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{V_k} \left| \frac{\partial F_{k,i}(x)}{\partial x_j} \right| &\le \sup_{V_k} \|J_{F_k}(x)\| \le \\ &\le \sup_{V_k} \|J_{F_k}(x) - P_k(x)\| + \sup_{V_k} \|P_k(x)\| < \infty \end{aligned}$$

folgt aus Lemma 5.3, dass $J_{F_k^*}$ auf V_k existiert und stetig ist. Zudem gilt für alle $x \in V_k$ mit den Abkürzungen

- $(t, \bar{x}) := (t_1, \ldots, t_l, x_{l+1}, \ldots x_n)$,
- $(t^i, \tilde{x}) = (t_1, \ldots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \ldots, t_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$,
- $dt := dt_1 \ldots dt_l$,
- $dt^i = dt_1 \ldots dt_{i-1} dt_{i+1} \ldots dt_l$,
- $\int := \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_l}$ und
- $\int_i := \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{i-1}} \int_0^{x_{i+1}} \ldots \int_0^{x_l}$:

$J_{F_k^*}(x) =$

$$\begin{pmatrix} \int_1 F_{k,1}(t^1,\tilde{x})dt^1 & \dots & \int_l F_{k,1}(t^l,\tilde{x})dt^l & \int \frac{\partial F_{k,1}(t,\bar{x})}{\partial x_{l+1}}dt & \dots & \int \frac{\partial F_{k,1}(t,\bar{x})}{\partial x_n}dt \\ \int_1 F_{k,2}(t^1,\tilde{x})dt^1 & \dots & \int_l F_{k,2}(t^l,\tilde{x})dt^l & \int \frac{\partial F_{k,2}(t,\bar{x})}{\partial x_{l+1}}dt & \dots & \int \frac{\partial F_{k,2}(t,\bar{x})}{\partial x_n}dt \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_1 F_{k,m}(t^1,\tilde{x})dt^1 & \dots & \int_l F_{k,m}(t^l,\tilde{x})dt^l & \int \frac{\partial F_{k,m}(t,\bar{x})}{\partial x_{l+1}}dt & \dots & \int \frac{\partial F_{k,m}(t,\bar{x})}{\partial x_n}dt \end{pmatrix}.$$

Nun gilt für eine fast-sicher differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit integrierbarer Ableitung g' im Allgemeinen nicht $g(x) = \int_0^x g'(t)dt + g(0)$, was man etwa an der Cantor-Funktion sieht. Für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $h_i = 0$ für alle $i \in M$ gilt dennoch

$$J_{F_k^*}(x)h = \int J_{F_k}(t,\bar{x})hdt \ (x \in V_k).$$

Da P_k^* stetig differenzierbar ist, gilt

$$P_k^*(x) = \int P_k(t,\bar{x})dt.$$

Wir erhalten mit Lemma 5.4 sowie mit

$$|J_{F_k}(x)h - P_k(x)h| < \|J_{F_k}(x) - P_k(x)\| \cdot |h| < \frac{|h|}{2^k} \ (x \in V_k)$$

für alle $x \in V_k$ die Abschätzung

$$\left|J_{F_k^*}(x)h - P_k^*(x)h\right| \leq \int_0^1 \dots \int_0^1 |J_{F_k}(t,\bar{x})h - P_k(t,\bar{x})h|\, dt < \frac{|h|}{2^k}.$$

Außerdem gilt für $x \in I^n$

$$\left|F_k^*(x) - F_{k-1}^*(x)\right| \leq \int_0^1 \dots \int_0^1 |F_k(t,\bar{x}) - F_{k-1}(t,\bar{x})|\, dt < \frac{\delta_{k-1}}{k}.$$

Weil $J_{F_k^*}$ auf V_k existiert, gilt für alle $x \in V_k$ und alle $j \notin M$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{|h_r^j|} \left|F_k^*(x + h_r^j) - F_k^*(x) - J_{F_k^*}(x)h_r^j\right| = 0. \tag{5.2}$$

Nun wählen wir eine kompakte Menge $D_k \subset V_k$ mit $\lambda^n(V_k \backslash D_k) < \frac{1}{n2^{k+1}}$ und eine natürliche Zahl N so, dass $x + h_r^j \in V_k$ für alle $r > N$, alle

$j \notin M$ und alle $x \in D_k$.

Der Satz von Egorov liefert kompakte Mengen $E_k^j \subset D_k$ mit

$$\lambda^n(V_k \backslash E_k^j) < \frac{1}{n2^k},$$

sodass der Limes in (5.2) gleichmäßig auf E_k^j ist. Es existiert also ein $r_k > N$, sodass $r_k > r_{k-1}$ und $|t_k^j| < \frac{|t_{k-1}^j|}{2}$, sowie $x + t_k^j \in V_k$ und

$$\frac{1}{|t_k^j|} \left| F_k^*(x + t_k^j) - F_k^*(x) - J_{F_k^*}(x) t_k^j \right| < \frac{1}{k} \ (j \notin M)$$

für alle $x \in E_k^j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Wir setzen $E_k := \bigcap_{j=l+1}^n E_k^j$. Dann gilt $\lambda(V_k \backslash E_k) < \frac{1}{2^k}$.

Damit sind alle Folgen konstruiert.

2. Wir erhalten aus (c) und (f) für alle $x \in E_k$ und alle $j \notin M$

$$\frac{1}{|t_k^j|} \left| F_k^*(x + t_k^j) - F_k^*(x) - P_k^*(x) t_k^j \right| < \frac{2}{k}. \tag{5.3}$$

Aus $|t_{k+1}^j| < \frac{|t_k^j|}{2}$ und (e) folgt für alle $k, p \in \mathbb{N}$ und $j \notin M$

$$\begin{aligned}
\max_{I^n} \left| F_{k+p}^*(x) - F_k^*(x) \right| &\leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \max_{I^n} \left| F_i^*(x) - F_{i-1}^*(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{|t_{i-1}^j|}{i} \leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{2^{-i+k+1} |t_k^j|}{k+1} \leq \\
&\leq 2 \frac{|t_k^j|}{k} \leq 2 \frac{|t_1^j|}{k}.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\max_{I^n} |F_{k+p} - F_k(x)| < 2 \frac{|t_1^j|}{k}, \tag{5.4}$$

woraus für $i \in M$ folgt

$$\left| \frac{\partial F_{k+p}^*(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial F_k^*(x)}{\partial x_i} \right| \leq \int_i \left| (F_{k+p} - F_k)(t^i, \tilde{x}) dt^i \right| \leq 2 \frac{|t_1^j|}{k}.$$

Die Vollständigkeit von $(C(I^n, \mathbb{R}^m), ||.||_\infty)$ liefert eine Funktion $F \in C(I^n, \mathbb{R}^m)$ mit

$$\frac{1}{|t_k^j|} \max_{I^n} |F(x) - F_k^*(x)| \leq \frac{2}{k} \ (j \notin M), \tag{5.5}$$

so dass $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ auf I^n für alle $i \in M$ existiert.

3. Wir zeigen nun, dass F die geforderte Universalitätseigenschaft besitzt. Dazu seien $g : I^n \to \mathbb{R}^m$ und $p \in \{l+1, l+2, \dots, n\}$ beliebig. Wir definieren eine Funktion $g^* : I^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ vermöge

$$g^*(x) = g(x)e_p^t.$$

Aus Satz 5.1 folgt die Existenz einer Folge von Teilmengen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von I^n mit $\lambda^n(I^n\backslash A_j) < \frac{1}{2^j}$ und einer Teilfolge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $x \in A_j$ gilt

$$\left\|P^*_{k_j}(x) - g^*(x)\right\| < \frac{1}{j}.$$

Nun sei $A := \bigcup_{q=1}^\infty \bigcap_{j=q}^\infty A_j$. Dann ist $A \subset I^n$ und

$$\lambda^n(I^n\backslash A) \le \lim_{q\to\infty} \sum_{j=q}^\infty \lambda^n(I^n\backslash A_k) = 0,$$

also $\lambda^n(A) = 1$.

Zudem existiert für jedes $x \in A$ eine natürliche Zahl $q(x)$, so dass für alle $l \ge q(x)$ gilt

$$\left\|P^*_{k_l}(x) - g^*(x)\right\| < \frac{1}{l}.$$

Weiter folgt aus (5.3) mit (5.5) für alle $x \in E_k$ und alle $j \notin M$

$$\frac{1}{|t_k^j|}\left|F(x+t_k^j) - F(x) - P^*_k(x)t_k^j\right| < \frac{6}{k}.$$

Mit $B := \bigcup_{p=1}^\infty \bigcap_{k=p}^\infty E_k$ gilt

$$\lambda^n(I^n\backslash B) \le \lim_{p\to\infty} \sum_{k=p}^\infty \lambda(I^n\backslash E_k) = 0,$$

oder $\lambda^n(B) = 1$. Weiter erhalten wir, dass für alle $x \in B$ eine natürliche Zahl $p(x)$ existiert, so dass für alle $k \ge p(x)$ gilt

$$\frac{1}{|t_k^j|}\left|F(x+t_k^j) - F(x) - P^*_k(x)t_k^j\right| < \frac{6}{k}.$$

Damit folgt für alle $x \in A \cap B$ und alle $l \ge \max\{p(x), q(x)\}$ für $j \notin M$ die Abschätzung

$$\frac{1}{|t_{k_l}^j|}\left|F(x+t_{k_l}^j) - F(x) - g^*(x)t_{k_l}^j\right| < \frac{6}{k_l} + \frac{1}{l}.$$

Es sei $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_j e_p = t^p_{k_j}$. Dann gilt wegen $\lambda^n(A\cap B) = 1$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|s_j|} |F(x+s_je_p) - F(x) - g^*(x)e_ps_j| = 0 \; f.s. \text{ auf } I^n.$$

Daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F(x+s_je_p) - F(x)}{|s_j|} - g(x)e_p^te_p\frac{s_j}{|s_j|} = 0 \; f.s. \text{ auf } I^n.$$

Wegen der Beschränktheit der Folge $\left(\frac{|s_j|}{s_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ existieren eine Zahl $a \in \{-1,1\}$ und eine Teilfolge $(j_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit $\frac{|s_{j_l}|}{s_{j_l}} \to a \; (l\to\infty)$.
Es folgt wegen $e_p^te_p = 1$ für fast alle $x\in I^n$

$$\begin{aligned}\frac{F(x+s_{j_l}e_p) - F(x)}{s_{j_l}} - g(x) &= \\ &= \frac{|s_{j_l}|}{s_{j_l}}\left(\frac{F(x+s_{j_l}e_p) - F(x)}{|s_{j_l}|} - g(x)e_p^te_p\frac{s_{j_l}}{|s_{j_l}|}\right) \to 0 \; (l\to\infty).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Der folgende Satz enthält eine Aussage über die Anzahl solcher Funktionen:

5.6 Satz: *Es seien $(h_k)_{k\in\mathbb{R}}$ eine reelle Folge mit $0 \neq h_k \to 0 \; (k\to\infty)$ und $M \subset \{1,2,\dots,n\}$ mit $\emptyset \neq M \neq \{1,2,\dots,n\}$. Mit G sei nun die Menge aller Funktionen f bezeichnet, die die Eigenschaft aus obigem Satz besitzen. Dann ist G eine dichte, aber keine residuale Teilmenge von $(C(I^n,\mathbb{R}^m), ||.||_\infty)$.*

Beweis:

1. G ist nicht residual in $(C(I^n,\mathbb{R}^m), ||.||_\infty)$:

   Es sei $i\in M$ beliebig. Mit H bezeichnen wir die gemäß Satz 1.6 residuale Menge von Funktionen, die bezüglich $(h_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $h_k^* := h_ke_i$ universell sind. Nun sind alle Funktionen h aus H nicht nach x_i differenzierbar, da es Teilfolgen $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(j_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ gibt, so dass fast sicher in I^n gilt

   $$\frac{h(x+h_{k_l}e_i) - h(x)}{h_{k_l}} \to e_1 \text{ und } \frac{h(x+h_{j_l}e_i) - h(x)}{h_{j_l}} \to e_2 \; (l\to\infty).$$

   Wenn nun G residual wäre, gäbe es eine Funktion $h \in G\cap H$. Diese Funktion h wäre wegen $h\in G$ nach x_i differenzierbar ist. Wegen $h\in H$

ist h aber nicht nach x_i differenzierbar, was einen Widerspruch darstellt. Deshalb kann G nicht residual sein.

2. G ist dicht in $(C(I^n, \mathbb{R}^m), ||.||_\infty)$:
Es seien $g \in C(I^n, \mathbb{R}^m)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen nun, dass in der ϵ-Umgebung von g eine Funktion aus G liegt.
Dazu wählen wir zunächst ein Polynom P mit

$$\max_{I^n} |P(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Da G wegen Satz 5.5 nicht leer ist, können wir eine Funktion $f \in G$ wählen. Wir setzen $K := \max_{I^n} |f(x)|$ und definieren $F : I^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$F(x) = \frac{\epsilon}{2(K+1)} f(x) + P(x).$$

Dann gilt

$$\max_{I^n} |F(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(K+1)} \max_{I^n} |f(x)| + \max_{I^n} |P(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Also liegt F in der ϵ-Umgebung von g.
Wir zeigen nun, dass $F \in G$ ist.
Offensichtlich existiert $\frac{\partial F}{x_i}$ für alle $i \in M$. Um die Universalität zu zeigen, wählen wir eine beliebige messbare Funktion $\phi : I^n \to \mathbb{R}^m$ und $i \notin M$. Da $f \in G$ ist, existiert eine Teilfolge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ so, dass fast sicher in I^n gilt

$$\frac{f(x + h_{k_l} e_i) - f(x)}{h_{k_l}} \to \frac{2(K+1)}{\epsilon} \left(\phi(x) - \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) \ (l \to \infty).$$

Daraus folgt

$$\frac{F(x + h_{k_l} e_i) - F(x)}{h_{k_l}} \to \phi(x) \ f.s. \text{ auf } I^n \ (l \to \infty).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

5.2 Eine Riemann-universelle Funktion

Bekanntlich ist eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ genau dann integrierbar mit $\int_a^b f(x)dx = c \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein

$\delta_\epsilon > 0$ existiert, so dass für jede Partition

$$P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a, b]$ mit

$$||P|| := \max_{i=1,2,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) < \delta_\epsilon$$

und jeder Wahl von Zwischenstellen $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ mit $x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_i$ für die Riemann-Summen von f bezüglich P und ζ:

$$s(P, \zeta) := \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

gilt

$$|s(P, \zeta) - c| < \epsilon.$$

Wir gehen in diesem Abschnitt der Frage nach, ob es beschränkte Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass zu gewissen Funktionen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $x \in (0, 1]$ Partitionen P_x^n von $[0, x]$ mit $||P_x^n|| \to 0$ $(n \to \infty)$ und Zwischenstellen ζ_x^n existieren, so dass

$$s(P_x^n, \zeta_x^n) \to g(x) \ (n \to \infty)$$

gilt. Dabei ist klar, dass aus $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [0, 1]$ mit einer Partition $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ von $[0, x]$ folgt

$$|s(P_x, \zeta)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq Kx.$$

Daher ist es sinnvoll, für die zu approximierenden Funktionen g zu fordern, dass $|g(x)| \leq Kx$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

5.7 Satz: *Zu jeder Zahl $K \in (0, \infty)$ existiert eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [0, 1]$ mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $|g(x)| \leq Kx$ für alle $x \in [0, 1]$ und zu jedem $x \in (0, 1]$ existieren Partitionen P_x^n von $[0, x]$ mit $||P_x^n|| \to 0$ $(n \to \infty)$ und Zwischenstellen ζ_x^n, so dass

$$s(P_x^n, \zeta_x^n) \to g(x) \ (n \to \infty)$$

gilt. Hierbei kann P_x^n äquidistant gewählt werden.

Beweis:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$M_n := \left\{x + \frac{\pi}{n} : x \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Dann sind alle Mengen M_n ($n \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt. Zudem gilt für alle $a < b$ ($a, b \in [0,1]$), dass $M_n \cap [a,b] \neq \emptyset$.

Mit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung von $\{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq K\}$, wobei $q_0 := 0$. Weiter definieren wir

$$h : \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \to \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq K\}$$

durch $h(x) = q_n$ ($x \in M_n$) sowie $h(x) = K$ ($x \in \mathbb{Q}$).

Mit $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung von

$$M := \left(\mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n\right) \cap [0,1].$$

Für $A \subset \mathbb{R}$ sei mit 1_A die zugehörige Indikatorfunktion bezeichnet, d.h.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Damit definieren wir für $x \in [0,1]$

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} h(m_k) 1_{\{m_k\}}(x).$$

Dann ist f durch K beschränkt.

2. Wir zeigen nun, dass diese Funktion die gewünschte Eigenschaft hat.

Dazu seien $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $|g(x)| \leq Kx$ ($x \in [0,1]$) und $x \in (0,1]$ beliebig. Es sei für $n > \frac{3}{K}$

$$P_x^n : 0 = \frac{0x}{n} < \frac{x}{n} < \frac{2x}{n} < \ldots < \frac{nx}{n} = x.$$

Dann gilt offensichtlich $||P_x^n|| \to 0$ ($n \to \infty$).

Weiter wählen wir eine rationale Zahl q mit

$$\left|q - g(x)\frac{n}{x}\right| < \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $|q| \leq nK + \frac{1}{n}$, denn aus $|q| > nK + \frac{1}{n}$ würde folgen, dass $|g(x)| = \left|\frac{x}{n}\left(q - g(x)\frac{n}{x}\right) - \frac{qx}{n}\right| \geq |q|\frac{x}{n} - \left|\frac{x}{n}\left(q - g(x)\frac{n}{x}\right)\right| > Kx + \frac{x}{n^2} - \frac{x}{n^2} = Kx$ ist. Weiter seien $l \in \mathbb{Z}$ mit $|l| \leq n-1$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| \leq K + \frac{1}{n}$ so, dass $q = lK + r$ ist.

Nun definieren wir

$$\bar{r} := \begin{cases} r + \frac{2}{n}, \text{ falls } r \leq 0 \\ r - \frac{2}{n}, \text{ falls } r > 0. \end{cases}$$

Dann gilt wegen $K > \frac{3}{n}$, dass $|\bar{r}| \leq K - \frac{1}{n}$ und $|r - \bar{r}| < \frac{2}{n}$ ist. Nun wählen wir eine rationale Zahl r^* mit $|r^* - \bar{r}| < \frac{1}{n}$. Dann gilt $|r^*| \leq K$ und $|q - lK - r^*| < \frac{3}{n}$. Weiter existiert eine natürliche Zahl i_0 mit $r^* = q_{i_0}$.

Nun wählen wir für jedes $i = 0, 1, \ldots, l-1$ eine Zahl $\zeta_i \in \left[\frac{ix}{n}, \frac{(i+1)x}{n}\right] \cap \mathbb{Q}$, für jedes $i = l, l+1, \ldots, n-2$ eine Zahl $\zeta_i \in \left[\frac{ix}{n}, \frac{(i+1)x}{n}\right] \cap M_0$ und eine Zahl $\zeta_{n-1} \in \left[\frac{(n-1)x}{n}, x\right] \cap M_{i_0}$.

Damit erhalten wir

$$f(\zeta_i) = \begin{cases} K, \; i = 0, 1, \ldots, l-1 \\ 0, \; i = l, l+1, \ldots, n-2 \\ r^*, \; i = n-1, \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} |s(P_x^n, \zeta_x^n) - g(x)| &= \left|(lK + r^*)\frac{x}{n} - g(x)\right| \leq \\ &\leq \left|(lK + r^* - q)\frac{x}{n}\right| + \left|q\frac{x}{n} - g(x)\right| < \\ &< \frac{3}{n}\frac{x}{n} + \frac{x}{n^2} \to 0 \; (n \to \infty). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

5.8 Bemerkungen:

1. Die Funktion f aus obigem Satz erfüllt $f(x) = 0$ fast sicher. Insbesondere ist f also Lebesgue-integrierbar mit $\int_0^1 f d\lambda = 0$, während f in obigem Sinne maximal nicht Riemann-integrierbar ist.

2. An die Funktionen g werden keine Zusatzforderungen wie etwa Messbarkeit gestellt. Damit ist klar, dass die Funktionen $x \mapsto s(P_x^n, \zeta_x^n)$ im Allgemeinen nicht stetig sind.

Offensichtlich kann eine Funktion f aus obigem Satz nicht stetig sein. Nun lassen wir die Voraussetzung der Beschränktheit weg und zeigen, dass eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit in obigem Sinne universellen Riemannsummen sogar in $(0,1]$ stetig sein kann.

5.9 Satz: *Jede Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die in $(0,1]$ stetig ist und für die Nullfolgen $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren mit*

$$f(x_n^1) \to \infty \text{ und } f(x_n^2) \to -\infty \ (n \to \infty)$$

ist im Sinne von Satz 5.7 universell.

Beweis: Wir wählen eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, ein $x \in (0,1]$ und ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zudem seien $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ mit $\frac{(k-1)x}{n} < \zeta_{k-1} < \frac{kx}{n}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ beliebig. Wir definieren

$$a := \frac{x}{n} \sum_{k=2}^{n} f(\zeta_k) \text{ und } b := \frac{n(g(x) - a)}{x}.$$

Auf Grund der Stetigkeit und der Unbeschränktheit von f in $(0,1]$ existiert ein ζ_1 mit $\zeta_1 < \frac{x}{n}$ so, dass $f(\zeta_1) = b$ ist. Daraus folgt

$$|s(P_x^n, \zeta_x^n) - g(x)| = \left| \frac{x}{n} f(\zeta_1) + \frac{x}{n} \sum_{k=2}^{n} f(\zeta_k) - g(x) \right| = \left| \frac{x}{n} b + a - g(x) \right| = 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

6 Universelles Verhalten linearer Operatoren

In diesem Kapitel betrachten wir eine Folge von linearen Operatoren $L_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ $(n \in \mathbb{N})$. Unter gewissen Voraussetzungen an die Operatoren, konvergiert $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ für jede stetige Funktion f gleichmäßig gegen f. Ein sehr schöner Satz in dieser Richtung ist der Satz von Korovkin:

6.1 Satz *(Korovkin)*: *Es sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Operatoren von $C([0,1])$ nach $C([0,1])$ mit den folgenden drei Eigenschaften:*

(1) L_n ist linear für alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) L_n ist positiv für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. aus $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ folgt $L_n f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ und

(3) $L_n f_i(x) \to f_i(x)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ $(n \to \infty)$ $(i = 0,1,2)$, wobei $f_i(x) = x^i$.

Für jede stetige Funktion f gilt dann

$$L_n f \to f \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

Wir werden in diesem Kapitel folgendes zeigen: Es gibt Operatoren L_n, die den Eigenschaften

(a) (1) und (3)

(b) (2) und (3)

(c) (1), (2) und der Eigenschaft, dass für alle Polynome P mit $P(0) = 0$ gilt $L_n P(x) \to P(x)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ $(n \to \infty)$

genügen, so dass die Folge $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ für viele stetige Funktionen f in maximaler Art und Weise divergiert, d.h. in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ dicht ist.

Hierbei bedeutet die dritte Eigenschaft in (c), dass die Testfunktion f_0 im Satz von Korovkin auch dann nicht weggelassen werden kann, wenn man stattdessen die Gültigkeit von $L_n f_i(x) \to f_i(x)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ für alle Funktionen $f_i(x) = x^i$ mit $i > 0$ fordert!

Zunächst untersuchen wir das Verhalten einer sehr bekannten Folge von linearen positiven Operatoren, wenn man sie auf eine unstetige Funktion anwendet.

6.1 Funktionen mit universellen Bernsteinpolynomen

Wir benötigen zunächst folgende Definition:

6.2 Definition: Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann heißt für $n \in \mathbb{N}$

$$B_n f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \quad (x \in [0,1])$$

n-tes Bernsteinpolynom von f.

Bekanntlich konvergiert bei einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktionenfolge $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.
Wir untersuchen nun, welches Verhalten von $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ bei einer nicht-stetigen Funktion f möglich ist. Dabei ist klar, dass $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge stetiger Funktionen nicht gleichmäßig gegen eine unstetige Funktion konvergieren kann. Wir zeigen, dass es eine Funktion f gibt, so dass zu jeder stetigen Funktion g mit $g(0) = f(0)$ und $g(1) = f(1)$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert, so dass $(B_{n_k} f)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Dabei ist wegen

$$B_n f(0) = f(0) \text{ und } B_n f(1) = f(1)$$

die Einschränkung an g notwendig.

6.3 Satz: *Es existiert eine messbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$, so dass für jede Funktion $g \in C([0,1])$ mit $g(0) = g(1) = 0$ und jede Zahl $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$B_{n_k}^{(l)} f(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty)$$

gilt. Hierbei bezeichnen wir im Falle $l > 0$ mit $B_{n_k}^{(l)} f$ die l-Ableitung von $B_{n_k} f$. Ferner definieren wir $B_{n_k} f^{(0)} := B_{n_k} f$.

Beweis: 1. Mit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung der Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ und mit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome, deren Koeffizienten rational sind und zusätzlich $P_n(0) = P_n(1) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllen.

Weiter sei $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung, in der jedes Polynom P_n $(n \in \mathbb{N})$

unendlich oft vorkommt. Ferner bezeichnen wir mit h eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{P}$.

Damit setzen wir

$$Q_{h(k)} := P_k^* \ (k \in \mathbb{N}) \text{ und } Q_k := 0 \ (k \notin \mathbb{P}).$$

Nun definieren wir $f : [0,1] \to \mathbb{N}$ vermöge

$$f\left(\frac{\nu}{p}\right) := Q_p\left(\frac{\nu}{p}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1, \ p \in \mathbb{P})$$

und $f(x) := 0$, sonst. Da die Mengen

$$M_p := \left\{\frac{\nu}{p} : \nu = 1, 2, \ldots, p-1\right\} \quad (p \in \mathbb{P})$$

paarweise disjunkt sind, ist f wohldefiniert und es gilt für alle $p \in \mathbb{P}$, dass $B_p f = B_p Q_p$ ist.

2. Nun zeigen wir, dass f die gewünschte Eigenschaft besitzt. Dazu seien eine Funktion $g \in C([0,1])$ mit $g(0) = g(1) = 0$, eine natürliche Zahl l und ein $\epsilon > 0$ gegeben.

   Wir wählen nun ein Polynom R mit rationalen Koeffizienten und $R(0) = R(1) = 0$ so, dass

   $$\max_{[0,1]} |R(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

   ist und wählen ein weiteres Polynom P mit rationalen Koeffizienten und $P(0) = P(1) = 0$ so, dass $P^{(l)} = R$ ist. Da die Folge $\left(B_n^{(l)} P\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $P^{(l)}$ konvergiert, vgl. [5], können wir ein $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass für alle $n \geq N$ gilt

   $$\max_{[0,1]} \left|B^{(l)}(n,P)(x) - P^{(l)}(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

   Nun sei noch eine natürliche Zahl m gewählt, so dass gleichzeitig $P_m^* = P$ und $h(m) \geq N$ gilt. Dann folgt für alle $x \in [0,1]$

   $$\begin{aligned} \left|B^{(l)}(h(m), f)(x) - g(x)\right| &= \left|B^{(l)}(h(m), Q_{h(m)})(x) - g(x)\right| = \\ &= \left|B^{(l)}(h(m), P)(x) - g(x)\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

6.2 Universelles Verhalten von Interpolationspolynomen

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und einem System von Stützstellen $0 \leq x_1^n < x_2^n < \ldots < x_n^n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) das bekanntlich eindeutig bestimmte Interpolationspolynom P_n vom Grad höchstens $n-1$. Dabei untersuchen wir das Verhalten der Polynomfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Selbst wenn f eine stetige Funktion ist, muss $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f konvergieren. Bereits 1885 zeigte Runge ([26]), dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei Interpolation der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ an äquidistanten Stützstellen im Intervall $[-5,5]$ lediglich im Intervall $[-3,63\ldots,3,63\ldots]$ gegen $f(x)$ konvergiert und außerhalb dieses Intervalls divergiert.

Bernstein zeigte in [2], dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei äquidistanter Interpolation von $f(x) = |x|$ im Intervall $[-1,1]$ an jeder Stelle $x \neq 0$ divergiert.

Aber auch bei einer besseren Wahl von Stützstellen kann $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren. Selbst bei Interpolation in den Nullstellen der Tschebyscheffpolynome, was den Approximationsfehler in gewisser Weise minimiert, ist Divergenz möglich. Im Jahre 1937 konstruierte Marcinkiewicz in [22] eine stetige Funktion, so dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei Interpolation in den Nullstellen der Tschebyscheffpolynome an jedem Punkt divergiert.

In [6] beweisen Erdös und Vértesi, dass zu jedem System von Stützstellen eine stetige Funktion f existiert, so dass die Folge der Interpolationpolynome fast überall divergiert.

Es existieren aber auch positive Resultate über die Konvergenz der Interpolationsfolge. Krylov beweist etwa in [14], dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei Interpolation in den Nullstellen der Tschebyscheffpolynome einer absolut stetigen Funktion gleichmäßig gegen f konvergiert.

Wir untersuchen, ob die Interpolationsfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer Funktion f gewisse universelle Eigenschaften besitzen kann. Ein Ergebnis in dieser Richtung stammt von Herzog ([11]). Er versieht den Raum Y aller Systeme von Stützstellen mit folgender Metrik: Für

$$A = \begin{array}{ccccc} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \text{und} \quad B = \begin{array}{ccccc} y_1^1 & & & & \\ y_1^2 & y_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

wird definiert

$$d(A,B) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|(x_i^1 - y_i^1, \dots, x_i^i - y_i^i)|}{1 + |(x_i^1 - y_i^1, \dots, x_i^i - y_i^i)|}.$$

Dann ist $Y \times C([0,1])$ ein Baire-Raum und es gilt folgender Satz:

6.4 Satz *(Herzog, [11])*: *Es sei $p \in [1,\infty)$. Dann gilt:*

1. *Die Menge aller $(A,f) \in Y \times C([0,1])$, so dass die Folge der zu A und f gebildeten Interpolationspolynome dicht in L_p ist, ist eine residuale Menge in $Y \times C([0,1])$.*

2. *Es existiert ein $(A,f) \in Y \times C([0,1])$, so dass mit $A = (x_i^j)$ gilt*

$$\max\left\{x_1^n, x_2^n - x_1^n, x_3^n - x_2^n, \dots, x_n^n - x_{n-1}^n, 1 - x_n^n\right\} \to 0 \ (n \to \infty)$$

   und die Folge der Interpolationspolynome ist in L_p dicht.

3. *Für jedes $A \in Y$ ist die Menge aller stetigen Funktionen, deren Folge von Interpolationspolynomen dicht in L_p ist, entweder leer oder residual in $C([0,1])$.*

Dieser Satz wird mit der generischen Beweismethode bewiesen. Wir verfolgen in diesem Kapitel einen konstruktiven Ansatz, der uns erlaubt, universelle Funktionen zu konstruieren, die zusätzliche Glattheitseigenschaften besitzen. Wir konstruieren etwa eine unendlich oft differenzierbare Funktion, deren Interpolationspolynome sich universell verhalten. Da die Menge aller differenzierbaren Funktionen in $C([0,1])$ nicht residual ist, ist der generische Ansatz für ein solches Ergebnis nicht (ohne weiteres) geeignet.

Der Fall einer unstetigen Funktion wird leicht in folgendem Satz abgehandelt:

6.5 Satz: *Es sei*

$$\begin{array}{lllll} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

ein Knotensystem mit $x_i^n \in [0,1]$ $(i = 1, 2, \dots n,\ n \in \mathbb{N})$ *und der Eigenschaft, dass für* $n \neq m$ *gilt*

$$\{x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n\} \cap \{x_1^m, x_2^m, \dots, x_m^m\} = \emptyset.$$

Dann existiert eine messbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *so dass die Folge der Interpolationspolynome* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *folgende universelle Eigenschaft hat:*
Zu jeder stetigen Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *existiert eine Teilfolge* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *natürlicher Zahlen, so dass gilt*

$$P_{n_k}(x) \to g(x) \textit{ gleichmäßig auf } [0,1]\ (k \to \infty).$$

Beweis: 1. Mit $(Q_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung aller Polynome mit rationalen Koeffizienten. Hierbei sei $q_n^* := gradQ_n^*$. Mit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Folge mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$q_{n+1}^* + m_{n+1} > q_n^* + m_n.$$

Wir definieren nun $Q_n(x) := \frac{1}{n} x^{q_n^* + m_n} + Q_n^*(x)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist mit $q_n := gradQ_n$ die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend. Bekanntlich existiert zu jeder stetigen Funktion g eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$Q_{n_k}^*(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1]\ (k \to \infty).$$

Wegen

$$\max_{[0,1]} |Q_n^*(x) - Q_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$$

folgt somit auch

$$Q_{n_k}(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1]\ (k \to \infty).$$

2. Nun definieren wir

$$f(x) := \begin{cases} Q_n(x_j^{q_n}), & x = x_j^{q_n},\ j = 1, 2, \dots q_n,\ n \in \mathbb{N} \\ \text{beliebig}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Interpolationspolynom P_{q_n} vom Grad höchstens $q_n - 1$ bezüglich der Stützstellen $x_1^{q_n}, x_2^{q_n}, \dots, x_{q_n}^{q_n}$ stimmt somit an q_n Stellen mit dem Polynom Q_n überein. Damit gilt $P_{q_n} = Q_n$.

Wegen der Dichtheit von $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ ist die Behauptung gezeigt. □

6.6 Bemerkung: Die Voraussetzung an die Stützstellen in obigem Satz verhindert etwa den folgenden Fall eines Stützstellensystems der Form:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & & \\ x_1 & x_2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Wenn nun Q_n $(n \in \mathbb{N})$ das Interpolationspolynom einer Funktion f bezüglich $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist, dann gilt $Q_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, und somit gilt für alle $x = x_i$ $(i \in \mathbb{N})$

$$Q_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty).$$

Die Funktion f kann dann also nicht im Sinne des obigen Satz universell sein.

Nun untersuchen wir den Fall einer stetigen Funktion f. Dabei bemerken wir zunächst, dass Universalität für gleichmäßige Konvergenz bei keiner Wahl von Stützstellen möglich ist:

6.7 Bemerkung: Es seien $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\begin{array}{lllll} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

ein beliebiges System von Stützstellen. Mit P_n ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir das Interpolationspolynom von f bezüglich $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n$ vom Grad $\leq n-1$. Ferner seien eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert vermöge $g(x) := f(x)+1$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\max_{[0,1]} |P_n(x) - g(x)| \geq |P_n(x_1^n) - g(x_1^n)| = |f(x_1^n) - g(x_1^n)| = 1.$$

Insofern kann keine Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergieren.

6.8 Bemerkung: Aus obiger Bemerkung folgt, dass eine Funktion f aus Satz 6.5 nicht stetig sein kann. Obwohl also zu jeder stetigen Funktion g eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass gilt

$$P_{n_k}(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \quad (k \to \infty),$$

konvergiert keine Teilfolge der Interpolationsfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f.

In der Begründung von Bemerkung 6.7 haben wir entscheidend ausgenutzt, dass f und g sich überall genügend stark unterscheiden. Wir werden sehen, dass ein positives Resultat möglich ist, wenn wir uns auf Funktionen g beschränken, die an einem Punkt alle mit einem vorgegebenen Wert übereinstimmen. Dies ist Inhalt des folgenden Satzes:

6.9 Satz: *Es existieren eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und ein System von Stützstellen*

$$\begin{array}{lllll} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots \end{array}$$

so, dass für jede stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert mit der Eigenschaft, dass für die zu

$$x_1^{n_k}, x_2^{n_k}, \ldots, x_{n_k}^{n_k} \ (k \in \mathbb{N})$$

konstruierten Interpolationspolynome P_{n_k} vom Grad höchstens $n_k - 1$ gilt

$$P_{n_k}(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty).$$

Beweis: 1. Mit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung einer in

$$(\{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}, ||.||_\infty)$$

dichten Menge von Polynomen, so dass eine Teilfolge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ existiert mit $gradQ_n = r_n - 1$. Eine solche Abzählung erhalten wir wie folgt: Es sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit rationalen Koeffizienten. Wir definieren $Q_n^* := P_n - P_n(0)$. Nun sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $gradQ_{n+1}^* + m_{n+1} > gradQ_n^* + m_n$. Damit hat die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{1}{n}x^{gradq_n^* + m_n} + Q_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die gewünschte Eigenschaft: Dazu sei g eine stetige Funktion mit $g(0) = 0$. Zunächst existiert eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass die Folge $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Da $P_{n_k}(0) \to g(0) = 0$ $(n \to \infty)$, folgt

$$\begin{aligned}\max_{[0,1]} |P_{n_k}(x) - P_{n_k}(0) - g(x)| &\leq \max_{[0,1]} |P_{n_k}(x) - g(x)| + \\ &\quad + |P_{n_k}(0)| \to 0 \ (k \to \infty).\end{aligned}$$

Damit ist $\{Q_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ in $(\{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}, ||.||_\infty)$ dicht, und wegen

$$\max_{[0,1]} |Q_n^*(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

folgt obige Behauptung.

2. Nun konstruieren wir induktiv stetige Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},$$

reelle Zahlen t_n und Stützstellen

$$x_1^{r_n} < x_2^{r_n} < \ldots < x_{r_n}^{r_n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Dabei gelte stets

(a) $x_{r_n}^{r_n} < t_{n-1}$,

(b) $f_n(x) = 0$ für $x \leq t_n$,

(c) $\max_{[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ und

(d) $f_n(x_k^{r_n}) = Q_n(x_k^{r_n})$ $(k = 1, 2, \ldots, r_n)$.

Wir setzen $f_0 := 0$ und $t_0 := 1$.

Nun seien f_{n-1} und $x_1^{r_{n-1}}, x_2^{r_{n-1}}, \ldots, x_{r_{n-1}}^{r_{n-1}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert.

Da $Q_n(0) = 0$ ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $|Q_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ für alle $|x| < \epsilon$. Nun wählen wir Stützstellen

$$0 < x_1^{r_n} < x_2^{r_n} < \ldots < x_{r_n}^{r_n} < \min(\epsilon, t_{n-1})$$

und $0 < t_n < x_1^{r_n}$ beliebig und definieren f_n wie folgt:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq t_n \\ f_{n-1}(x), & x \geq t_{n-1} \\ Q_n(x_k^{r_n}), & x = x_k^{r_n} \ (k = 1, 2, \ldots, r_n) \\ \text{linear dazwischen.} & \end{cases}$$

Damit sind nun alle Elemente mit den verlangten Eigenschaften konstruiert.

3. Es gilt für alle $l, p \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\max_{[0,1]} |f_{l+p}(x) - f_l(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{l+k}(x) - f_{l+k-1}(x)| \leq \frac{1}{2^l}.$$

Auf Grund der Vollständigkeit von $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ existiert eine stetige Funktion f mit

$$f_n(x) \to f(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

Wir zeigen nun, dass f die geforderte Eigenschaft besitzt. Zunächst gilt offensichtlich $f(0) = 0$. Zum Nachweis der anderen Eigenschaft sei $g \in C([0,1])$ mit $g(0) = 0$ beliebig. Mit dem ersten Beweisteil existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$Q_{n_k}(x) \to g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty).$$

Nun berechnen wir das Interpolationspolynom $P_{r_{n_k}}$ vom Grad $\leq r_{n_k} - 1$ bezüglich der Stützstellen

$$x_1^{r_{n_k}}, x_2^{r_{n_k}}, \ldots, x_{r_{n_k}}^{r_{n_k}}.$$

Dieses Polynom erfüllt

$$gradP_{r_{n_k}} = r_{n_k} - 1 = gradQ_{n_k}$$

und

$$P_{r_{n_k}}(x_l^{r_{n_k}}) = Q_{n_k}(x_l^{r_{n_k}}) \ (l = 1, 2, \ldots, r_{n_k}).$$

Somit gilt $P_{r_{n_k}} = Q_{n_k}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die in obigem Satz konstruierten Stützstellen haben die „gemeinsame“ Nullstelle als Häufungspunkt. Damit eine Funktion g durch eine Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig approximiert werden kann, muss sie notwendigerweise an gewissen Häufungspunkten der Stützstellen mit f übereinstimmen, was wir in folgender Bemerkung festhalten.

6.10 Bemerkung: Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\begin{array}{lllll}
x_1^1 & & & & \\
x_1^2 & x_2^2 & & & \\
\vdots & & & & \\
x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

ein System von Stützstellen. Damit nun eine Teilfolge $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der zu

$$x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n \ (n \in \mathbb{N})$$

konstruierten Interpolationspolynomfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion g konvergieren kann, muss notwendigerweise $g(x_0) = f(x_0)$ für jeden Häufungspunkt x_0 der Menge $\{x_l^{n_k} : l = 1, 2, \ldots, n_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ gelten:
Es sei etwa

$$\lim_{j\to\infty} x_{l_j}^{n_{k_j}} = x_0.$$

Dann erhalten wir aus

$$\max_{[0,1]} |P_{n_k}(x) - g(x)| \to 0 \ (k \to \infty)$$

insbesondere

$$0 = \lim_{j\to\infty} P_{n_{k_j}}(x_{l_j}^{n_{k_j}}) - g(x_{l_j}^{n_{k_j}}) = \lim_{j\to\infty} f(x_{l_j}^{n_{k_j}}) - g(x_{l_j}^{n_{k_j}}) = f(x_0) - g(x_0),$$

also $f(x_0) = g(x_0)$.

Wir benötigen nun folgende Definition:

6.11 Definition: Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die erste Bairesche Funktionenklasse, d.h.

$$\mathfrak{F} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist punktweiser} \\ \text{Limes einer Folge von stetigen Funktionen}\}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass jede Funktion $g \in \mathfrak{F}$ - auch ohne die Einschränkung $g(0) = 0$ - wenigstens punktweise durch eine Folge von Interpolationspolynomen einer geeigneten Funktion approximierbar ist.
Hilfreich wird folgendes Lemma sein:

6.12 Lemma: *Es existiert eine Folge von Polynomen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften*

1. $Q_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$,
2. *für alle Funktionen $g \in \mathfrak{F}$ existiert eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit*
$$Q_{n_k}(x) \to g(x) \text{ für alle } x \in [0,1] \text{ und}$$
3. *$gradQ_n > gradQ_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, wobei $Q_0(x) := 1$ ist für alle $x \in [0,1]$.*

Beweis: Es sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ dichte Menge. Wir definieren

$$f_n(x) := \begin{cases} P_n(x), & \left|x - \frac{1}{n}\right| \geq \frac{1}{n} \\ 0, & x = \frac{1}{n} \\ \text{linear dazwischen.} \end{cases}$$

Mit Hilfe simultaner Approximation und Interpolation ist es möglich, ein Polynom Q_n mit folgenden Eigenschaften zu wählen:

1. $gradQ_n \geq gradQ_{n-1}$,
2. $Q_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ und
3. $\max_{[0,1]} |Q_n(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$.

Ähnlich wie im Beweis zu Satz 6.9, kann hierbei $gradQ_n > gradQ_{n-1}$ verlangt werden. Nun sei $g \in \mathfrak{F}$ beliebig. Wir wählen eine Folge stetiger Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass g punktweiser Limes dieser Folge ist. Anschließend wählen wir eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\max_{[0,1]} |P_{n_k}(x) - g_k(x)| < \frac{1}{k}$$

ist. Dann gilt für alle $x \in [0,1]$

$$|P_{n_k}(x) - g(x)| \leq \frac{1}{k} + |g_k(x) - g(x)| \to 0 \ (k \to \infty).$$

Wegen $|Q_{n_k}(0) - g(0)| \leq |Q_{n_k}(0) - f_{n_k}(0)| + |P_{n_k}(0) - g(0)| \to 0 \ (k \to \infty)$, ist nur noch für $x \in (0,1]$ die Konvergenz von $(Q_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $g(x)$ zu zeigen. Dazu wählen wir ein $x \in (0,1]$ und sodann eine natürliche Zahl k mit $\frac{2}{n_k} < x$. Dann gilt $f_{n_k}(x) = P_{n_k}(x)$ und somit

$$|Q_{n_k}(x) - g(x)| \leq |Q_{n_k}(x) - f_{n_k}(x)| + |P_{n_k}(x) - g(x)| \to 0 \ (k \to \infty).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir folgenden Satz:

6.13 Satz: *Es existieren eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und ein System von Stützstellen*

$$\begin{array}{lllll} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots \end{array}$$

so, dass für jede Funktion $g \in \mathfrak{F}$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass für die zu $x_1^{n_k}, x_2^{n_k}, \ldots, x_{n_k}^{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ konstruierten Interpolationspolynome P_{n_k} vom Grad höchstens $n_k - 1$ gilt

$$P_{n_k}(x) \to g(x) \text{ für alle } x \in [0,1] \ (k \to \infty).$$

Beweis: 1. Mit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Folge von Polynomen gemäß Lemma 6.12. Es gelte $gradQ_n = r_n - 1$, wobei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist.

2. Nun konstruieren wir induktiv Stützstellen

$$x_1^{r_n} < x_2^{r_n} < \ldots < x_{r_n}^{r_n} \ (n \in \mathbb{N})$$

und stetige Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dabei gelte stets

(a) $x_1^{r_n} > \frac{1}{n}$,

(b) $f_n(x) = 0$ für $x \leq \frac{1}{n}$,

(c) $\max_{[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ und

(d) $f_n(x_k^{r_n}) = Q_n(x_k^{r_n})$ $(k = 1, 2, \ldots, r_n)$.

Wir setzten $f_0 := 0$.

Nun seien f_{n-1} und $x_1^{r_{n-1}}, x_2^{r_{n-1}}, \ldots, x_{r_{n-1}}^{r_{n-1}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert.

Da $Q_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $|Q_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ für alle $\left|x - \frac{1}{n}\right| < \epsilon$. Nun wählen wir Stützstellen

$$\frac{1}{n} < x_1^{r_n} < x_2^{r_n} < \ldots < x_{r_n}^{r_n} < \min\left(\frac{1}{n} + \epsilon, x_1^{r_{n-1}}\right)$$

beliebig und definieren f_n wie folgt:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{n} \\ f_{n-1}(x), & x \geq \min\left(\frac{1}{n} + \epsilon, x_1^{r_{n-1}}\right) \\ Q_n(x_k^{r_n}), & x = x_k^{r_n} \ (k = 1, 2, \ldots, r_n) \\ \text{linear dazwischen.} & \end{cases}$$

Damit sind nun alle Elemente mit den verlangten Eigenschaften konstruiert.

3. Es gilt für alle $l, p \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\max_{[0,1]} |f_{l+p}(x) - f_l(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{l+k}(x) - f_{l+k-1}(x)| \leq \frac{1}{2^l}.$$

Auf Grund der Vollständigkeit von $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ existiert eine stetige Funktion f mit

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \; (n \to \infty).$$

Wir zeigen nun, dass f die geforderte Eigenschaft besitzt. Dazu sei $g \in \mathfrak{F}$ beliebig. Mit dem ersten Beweisteil existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$Q_{n_k}(x) \to g(x) \text{ für alle } x \in [0,1] \; (k \to \infty).$$

Nun berechnen wir das Interpolationspolynom $P_{r_{n_k}}$ vom Grad höchstens $r_{n_k} - 1$ bezüglich der Stützstellen

$$x_1^{r_{n_k}}, x_2^{r_{n_k}}, \ldots, x_{r_{n_k}}^{r_{n_k}}.$$

Dieses Polynom erfüllt

$$grad P_{r_{n_k}} = r_{n_k} - 1 = grad Q_{n_k}$$

und

$$P_{r_{n_k}}(x_l^{r_{n_k}}) = Q_{n_k}(x_l^{r_{n_k}}) \; (l = 1, 2, \ldots, r_{n_k}).$$

Somit gilt $P_{r_{n_k}} = Q_{n_k}$. □

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die in obigem Satz konstruierten Stützstellen häufen sich an 0. Im nächsten Satz konstruieren wir Stützstellen x_k^n $(k = 1, 2, \ldots, n, \; n \in \mathbb{N})$, die immer dichter in $[0,1]$ liegen, und eine sehr glatte Funktion, so dass die Folge der Interpolationspolynome eine universelle Eigenschaft besitzt.

Zum Beweis benötigen wir folgendes Lemma:

6.14 Lemma: *Es seien m, n, μ natürliche Zahlen, $p \in [1, \infty)$, sowie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ eine beliebige Menge von n Punkten in $[0,1]$ und $\{a_\nu : \nu = 1, 2, \ldots, n\}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ferner seien $\epsilon, \delta > 0$ sowie eine Funktion $f \in C([0,1])$ gegeben. Dann existieren ein Polynom Q und eine messbare Menge $A \subset [0,1]$ mit $\lambda(A) < \delta$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $Q(x_\nu) = a_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

2. $Q^{(k)}(x_1) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, \mu)$,

3. $gradQ > m$,

4. $\left(\int_0^1 |Q(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$ *und*

5. $|Q(x) - f(x)| < \epsilon \ (x \in [0,1]\backslash A)$.

Beweis: Mit $e := \min\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |x_i - x_j|$ und

$$M := \left(\max_{[0,1]} |f(x)| + \max\{|a_\nu| : \nu = 1, 2, \ldots, n\} + \frac{1}{\delta} + \epsilon + 1\right) \max\{e\epsilon^p, 1\}$$

definieren wir

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), \ \ |x - x_\nu| > \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n} \text{ für alle } \nu = 1, 2, \ldots, n \\ a_\nu, \ \ x = x_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{linear dazwischen} \end{cases}$$

Damit gilt die Abschätzung $\max_{[0,1]} |f^*(x)| \leq M$, sowie $f^*(x) = f(x)$ auf

$$[0,1]\backslash A := [0,1]\backslash \bigcup_{\nu=1}^{n} \left[x_\nu - \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n}, x_\nu + \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n}\right].$$

Es gilt dabei

$$\lambda(A) = 2n \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n} < \delta.$$

Mit Hilfe simultaner Approximation und Interpolation ist es möglich, ein Polynom Q mit folgenden Eigenschaften zu wählen:

1. $gradQ > m$,

2. $Q\left(x_\nu\right) = a_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots n)$,

3. $Q^{(k)}(x_1) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, \mu)$ und

4. $\max_{[0,1]} |Q(x) - f^*(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dazu bezeichnen wir mit

$$L_k(x) := \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

das k-te Lagrange-Polynom und definieren

$$\tilde{L}_k(x) := \left(\frac{x - x_1}{x_k - x_1}\right)^{\mu} L_k(x) \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\tilde{L}_1(x) := 1 - \tilde{L}_2(x) - \ldots - \tilde{L}_n(x)$. Dann ist $\tilde{L}_i(x_i) = 1, \;\; \tilde{L}_i(x_k) = 0 \; (i \neq k)$ und $\tilde{L}_i^{(r)}(x_1) = 0 \; (r = 1, 2, \ldots, \mu)$. Jetzt sei

$$M := \sum_{k=1}^{n} \max_{[0,1]} |\tilde{L}_k(x)|.$$

Nun wählen wir ein Polynom P_1 mit $P_1^{(k)}(x_1) = 0 \; (k = 1, 2, \ldots, \mu)$ mit $gradP_1 > m$ und

$$\max_{[0,1]} |P_1(x) - f^*(x)| < \frac{\epsilon}{4(1 + M)}.$$

Nun sei

$$Q(x) := P_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (f^*(x_k) - P_1(x_k)) \tilde{L}_k(x).$$

Dann gilt $Q(x_k) = a_k, \;\; Q^{(k)}(x_1) = 0 \; (k = 1, 2, \ldots, \mu)$ und

$$|Q(x) - f^*(x)| \leq |P_1(x) - f^*(x)| + \max_{[0,1]} |f^*(x) - P_1(x)| \sum_{k=1}^{n} \max_{[0,1]} |\tilde{L}_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 |Q(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 |Q(x) - f^*(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad + \left(\int_0^1 |f^*(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu - \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n}}^{x_\nu + \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n}} |f^*(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \left(\sum_{\nu=1}^{n} 2 \frac{e\epsilon^p}{4^p M^p n}\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Für $x \in [0,1] \backslash A$ erhalten wir

$$|Q(x) - f(x)| = |Q(x) - f^*(x)| \leq \max_{[0,1]} |Q(x) - f^*(x)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Folgendes Lemma erweist sich ebenfalls als sehr nützlich:

6.15 Lemma: *Es seien* $0 < a < b < 1$ *und* $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ *sowie* $y_1, y_2, \ldots y_n \in \mathbb{R}$ *beliebig. Dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq a \\ 0, \ x \geq b \\ y_k, \ x = x_k \ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

und für jedes $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *gilt mit* $y_0 := 0 =: y_{n+1}, \ x_0 := a, \ x_{n+1} := b$ *und einer Konstanten* K_μ*, die nicht von* x_i *bzw.* y_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ *abhängt*

$$\max_{[0,1]} |f^{(\mu)}(x)| \leq K_\mu \max_{1 \leq i \leq n+1} |y_i - y_{i-1}| \cdot \max_{1 \leq i \leq n+1} \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right)^\mu .$$

Beweis:

1. Es sei
$$t(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases} .$$
Damit definieren wir $g(x) := t(x)t(1-x)$ und
$$h(x) := \frac{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t}.$$
Dann gilt $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ und h ist unendlich oft differenzierbar. Weiter erhalten wir für $\Phi_a(x) := h(ax)$ für alle $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $a, x > 0$ mit $0 < ax < 1$:
$$\begin{aligned} \left|\Phi_a^{(\mu)}(x)\right| &= \left| \frac{a^\mu}{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t} g^{(\mu-1)}(ax) \right| \leq \frac{\max_{[0,1]} \left|g^{(\mu-1)}(x)\right|}{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t} a^\mu =: \\ &=: K_\mu a^\mu. \end{aligned}$$
Hierbei hängt K_μ nicht von a ab.

2. Nun seien für $1 \leq i \leq n+1$
$$\phi_i(x) := y_{i-1} + (y_i - y_{i-1})\, h \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)$$
und
$$f(x) := \phi_i(x), \ x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$
Dann gilt $f(x_{i-1}) = \phi_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = \phi_{i-1}(x_{i-1})$ und f ist unendlich oft differenzierbar.

3. Abschließend erhalten wir aus dem ersten Beweisteil die Abschätzung

$$\max_{[x_{i-1},x_i]} |\phi_i^{(\mu)}(x)| \leq K_\mu \frac{|y_i - y_{i-1}|}{(x_i - x_{i-1})^\mu},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt ein Beweis des folgenden Satzes:

6.16 Satz: *Es sei $p \in [1, \infty)$ beliebig. Dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und ein System von Stützstellen*

$$\begin{array}{lllll} x_1^1 & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots \end{array}$$

mit $\max_{1\leq \nu < n} |x_{\nu+1}^n - x_\nu^n| \to 0$ und $x_1^n \to 0$ sowie $x_n^n \to 1$ $(n \to \infty)$, so dass die zu $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n$ $(n \in \mathbb{N})$ konstruierten Interpolationspolynome P_n die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Für jede Funktion $g \in L_p$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$P_{n_k} \to g \text{ in } L_p \ (k \to \infty).$$

2. *Für jede messbare Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit*

$$P_{n_k}(x) \to g(x) \text{ f.s. in } [0,1] \ (k \to \infty).$$

Beweis: Zunächst sei $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Polynome mit rationalen Koeffizienten.

1. Wir setzen $f_0 := 0$. Nun seien für ein $n \in \mathbb{N}$ für $k = 1, 2, \ldots n-1$ konstruiert:

   (a) $m_k \in \mathbb{N}$,

(b) eine unendlich oft differenzierbare Funktion f_k,

(c) $x_1^{m_k} < x_2^{m_k} < \ldots < x_{m_k}^{m_k}$ und

(d) $A_k \subset [0,1]$.

Hierbei gelte stets

(a) $\max_{[0,1]} |f_k^{(\mu)}(x) - f_{k-1}^{(\mu)}(x)| < \frac{K_\mu}{2^k}$ $(\mu = 0,1,\ldots,k)$

(b) $\max_{1\leq\nu<m_k} |x_{\nu+1}^{m_k} - x_\nu^{m_k}| \leq \frac{1}{k}$, $x_1^{m_k} < \frac{1}{k}$ und $x_{m_k}^{m_k} > 1 - \frac{1}{k}$

(c) $f_k(x) = 0$ $\left(x \geq r_k + \frac{1-r_k}{2} \text{ mit } r_k := x_{m_k-1}^{m_k-1} + \frac{1-x_{m_k-1}^{m_k-1}}{2}\right)$

(d) $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ $(x \leq r_k)$

(e) $\lambda(A_k) < \frac{1}{k}$

(f) $\left(\int_0^1 |Q_k(x) - P_k^*(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{k}$, sowie

(g) $|Q_k(x) - P_k^*(x)| < \frac{1}{k}$ $(x \in [0,1]\backslash A_k)$, wobei Q_k das Interpolationspolynom von f_k bezüglich der Stützstellen $x_1^{m_k}, x_2^{m_k}, \ldots x_{m_k}^{m_k}$ vom Grad $\leq m_k - 1$ ist.

Wir konstruieren nun m_n, f_n sowie A_n und $x_1^{m_n}, x_2^{m_n}, \ldots, x_{m_n}^{m_n}$:
Dazu seien $x_1^{m_n}, x_2^{m_n}, \ldots, x_n^{m_n}$ so gewählt, dass $x_1^{m_n} < \frac{1}{n}$, $x_n^{m_n} > 1 - \frac{1}{n}$, $\max_{1\leq\nu<n} |x_{\nu+1}^{m_n} - x_\nu^{m_n}| \leq \frac{1}{n}$ und $x_\nu^{m_n} \neq x_\mu^{m_l}$ für alle $\nu = 1,2,\ldots,n$, $\mu = 1,2,\ldots m_l$ und $l = 1,2,\ldots n-1$ ist.
Wir definieren $a_{n\nu} := f_{n-1}(x_\nu^{m_n})$ $(\nu = 1,2,\ldots n)$. Dann wählen wir gemäß Lemma 6.14 mit $r_n := x_{m_n-1}^{m_n-1} + \frac{1-x_{m_n-1}^{m_n-1}}{2}$ ein Polynom $Q =: Q_n$ und eine Menge A_n mit $\lambda(A_n) < \frac{1}{2^n}$ so, dass gilt

(a) $gradQ_n > gradQ_{n-1}$,

(b) $Q_n(x_\nu^{m_n}) = a_{n\nu}$ $(\nu = 1,2,\ldots n)$

(c) $Q_n(r_n) = 0$ und $Q_n^{(k)}(r_n) = 0$, $(k = 1,2,\ldots,n)$,

(d) $\left(\int_0^1 |Q_n(x) - P_n^*(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n}$ und

(e) $|Q_n(x) - P_n^*(x)| < \frac{1}{n}$ $(x \in [0,1]\backslash A_n)$.

Weiter setzen wir $m_n := gradQ_n + 1$.

Da $Q_n(r_n) = 0$ ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $|Q_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ für alle x mit $|x - r_n| < \epsilon$. Da $Q_n^{(k)}(r_n) = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ ist, folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{Q_n(r_n + h) - Q_n(r_n)}{h^n} = 0.$$

Es existiert also ein $0 < \delta < \min\left\{\epsilon, r_n + \frac{1-r_n}{2}\right\}$, so dass für alle $0 < h < \delta$ gilt

$$|Q_n(r_n + h) - Q_n(r_n)| < \frac{h^n}{2^n(m_n - n)^n}.$$

Zudem sei δ so klein, dass Q_n in $[r_n, r_n+\delta)$ monoton, ohne Einschränkung monoton wachsend, ist.

Nun wählen wir $r_n = x_{n+1}^{m_n} < x_{n+2}^{m_n} < \ldots < x_{m_n}^{m_n} = r_n + \delta$ äquidistant. Dann erhalten wir insbesondere für $0 \le \mu \le n$

$$\begin{aligned} \frac{\left|Q_n(x_{\nu+1}^{m_n}) - Q_n(x_\nu^{m_n})\right|}{\left(x_{\nu+1}^{m_n} - x_\nu^{m_n}\right)^\mu} &\le \left(\frac{m_n - n}{\delta}\right)^n (Q_n(r_n + \delta) - Q_n(r_n)) < \\ &< \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Nun wählen wir mit Lemma 6.15 eine unendlich oft differenzierbare Funktion f_n mit

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), \ x \le r_n \\ 0, \ x \ge r_n + \frac{1-r_n}{2} \\ Q_n(x_\nu^{m_n}), \ x = x_\nu^{m_n} \ (\nu = n+1, n+2, \dots, m_n) \end{cases}$$

und

$$\max_{[0,1]} |f_n^{(\mu)}(x) - f_{n-1}^{(\mu)}(x)| \le \frac{K_\mu}{2^n} \ (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Damit sind alle Folgen konstruiert.

2. Es gilt für alle $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $l, p \in \mathbb{N}$ mit $l \ge \mu$ die Abschätzung

$$\max_{[0,1]} |f_{l+p}^{(\mu)}(x) - f_l^{(\mu)}(x)| \le \sum_{k=1}^{p} \max_{[0,1]} |f_{l+k}^{(\mu)}(x) - f_{l+k-1}^{(\mu)}(x)| \le \frac{K_\mu}{2^l}.$$

Da $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ vollständig ist, existiert eine stetige Funktion f mit

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

Diese Funktion ist zudem unendlich oft differenzierbar, da $(f_n^{(\mu)})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes μ gleichmäßig in $[0,1]$ konvergiert.

3. Wir berechnen nun das Interpolationspolynom P_{m_n} vom Grad kleiner als m_n von f bezüglich $x_1^{m_n}, x_2^{m_n}, \dots x_{m_n}^{m_n}$. Dieses Polynom erfüllt

$$P_{m_n}(x_\nu^{m_n}) = f(x_\nu^{m_n}) = f_n(x_\nu^{m_n}) = Q_n(x_\nu^{m_n}) \ (\nu = 1, 2, \dots, m_n).$$

Damit gilt $P_{m_n} = Q_n$.

4. Nun sei eine Funktion $g \in L_p$ gegeben. Wir wählen eine Teilfolge $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\left(\int_0^1 |P^*_{n_k}(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{k}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |Q_{n_k}(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 |Q_{n_k}(x) - P^*_{n_k}(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left(\int_0^1 |P^*_{n_k}(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \\ &< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k} \to 0 \ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Damit konvergiert $(Q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also $(P_{m_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ in L_p gegen g.

5. Zum Abschluss sei g nun eine beliebige messbare Funktion. Mit Hilfe des Satzes 5.1 können wir eine Teilfolge $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und Mengen B_k wählen mit $\lambda(B_k) < \frac{1}{2^k}$, so dass für alle $x \in [0,1]\backslash B_k$ gilt

$$|P^*_{n_k}(x) - g(x)| < \frac{1}{k}.$$

Wir definieren $C_k := A_k \cup B_k$ und

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} C_l.$$

Dann gilt $\lambda(C_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$, sowie

$$\lambda(C) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \lambda(C_l) = 0.$$

Nun sei $x \in [0,1]\backslash C$ beliebig. Dann existiert ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $x \in [0,1]\backslash C_k$. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} |Q_{n_k}(x) - g(x)| &< |Q_{n_k}(x) - P^*_{n_k}(x)| + |P^*_{n_k}(x) - g(x)| < \\ &< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k} \to 0 \ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

6.17 Bemerkungen:

1. Bereits in [11] bemerkt Herzog, dass nicht zu jedem System von Stützstellen eine stetige Funktion existiert, so dass die Interpolationspolynome in L_p dicht sind. So konvergieren die zu den Nullstellen der Legendre-Polynome konstruierten Interpolationspolynome jeder stetigen Funktion f gegen f in L_2.

2. Obiger Satz beinhaltet jedoch auch eine Aussage über Universalität bezüglich fast sicherer Konvergenz. Wie bereits erwähnt, existiert zu jedem System von Stützstellen eine stetige Funktion f, so dass die Folge der Interpolationspolynome an fast jedem Punkt divergiert. Dabei ist aber im Allgemeinen keine „maximale Divergenz“ im Sinne von Punkt 2 des obigen Satzes möglich. Da die zu den Nullstellen der Legendre-Polynome konstruierten Interpolationspolynome jeder stetigen Funktion f gegen f in L_2 konvergieren, konvergieren sie insbesondere stochastisch gegen f. Die fast sichere Konvergenz einer Teilfolge der Interpolationspolynome gegen eine andere Funktion g würde ebenfalls die stochastische Konvergenz gegen g implizieren. Da der stochastische Limes eindeutig ist, folgt $g = f$.

6.3 Interpolation in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass zu jeder transzendenten Funktion ein Stützstellensystem

$$\begin{array}{lllll} z_0^0 & & & & \\ z_0^1 & z_1^1 & & & \\ \vdots & & & & \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

existiert, so dass die zugehörige Folge der Interpolationspolynome in $H(\mathbb{C})$ dicht ist.

6.18 Satz: *Es sei ϕ eine beliebige transzendente Funktion. Dann existiert ein Stützstellensystem*

$$\begin{array}{lllll} z_0^0 & & & & \\ z_0^1 & z_1^1 & & & \\ \vdots & & & & \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

so, dass $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})$ dicht ist, wobei Q_n das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad kleiner oder gleich n bezeichnet, welches mit ϕ an $z_0^n,{}_{,1}^{n},\dots,z_n^n$ übereinstimmt.

Beweis: 1. Es sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $H(\mathbb{C})$ dichte Folge von Polynomen mit $gradP_n = r_n$, wobei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist. Die Funktionen $\phi - P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sind transzendent. Jede dieser Funktionen nimmt also in jeder Umgebung von ∞ jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft als Funktionswert an. Wir definieren damit für $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n := \begin{cases} P_n, & \text{falls } \phi - P_n \text{ nicht 0 als Ausnahmewert hat} \\ P_n + \frac{1}{n}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist Q_n ein Polynom vom Grad n und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen

$$\sup_{\mathbb{C}} |Q_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht. Außerdem hat $\phi - Q_n$ nicht den Ausnahmewert 0.

2. Nun definieren wir

$$z_0^{(r_n)}, z_1^{(r_n)}, \dots, z_{r_n}^{(r_n)} \ (n \in \mathbb{N})$$

so, dass $z_i^{(r_n)} \neq z_j^{(r_n)}$ $(i \neq j)$ und $(\phi - Q_n)(z_i^{(r_n)}) = 0$ ist. Dies ist möglich, da $\phi - Q_n$ nicht 0 als Ausnahmewert hat. Es folgt also, dass $\phi(z_i^{(r_n)}) = Q_n(z_i^{(r_n)})$ $(i = 0, 1, \dots, r_n,\ n \in \mathbb{N})$ ist und somit Q_n das Interpolationspolynom von ϕ bezüglich $z_0^{(r_n)}, z_1^{(r_n)}, \dots, z_{r_n}^{(r_n)}$ ist.

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

6.4 Zum Satz von Korovkin

Im nächsten Satz konstruieren wir eine Folge von linearen positiven Operatoren $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sogar stetig sind, so dass für jedes Polynom mit $P(0) = 0$, insbesondere also für $P(x) = x^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, gilt

$$L_n P(x) \to P(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty),$$

es aber sehr viele Funktionen $f \in C([0,1])$ gibt, so dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ dicht ist. Im Folgenden bezeichnen wir mit $C_0([0,1])$ die Menge aller stetigen Funktionen f mit $f(0) = 0$.

6.19 Satz: *Es gibt eine Folge stetiger linearer positiver Operatoren $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes Polynom P mit $P(0) = 0$ gilt*

$$L_n P(x) \to P(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

Ferner gibt es eine in $(C_0([0,1]), \|.\|_\infty)$ residuale Teilmenge von Funktionen f, so dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ dicht ist.

Beweis: 1. Mit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung aller Polynome mit rationalen Koeffizienten. Dabei gelte $Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu$. Wir definieren

$$M_n := 2^{n+1} \max_{\nu\le n} |a_\nu^{(n)}|.$$

Nun wählen wir für $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. Hierbei gelte für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < x_0^{(n+1)} < x_1^{(n+1)} < \ldots < x_{n+1}^{(n+1)} < x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < 1.$$

Außerdem sei $x_n^{(n)} < \frac{1}{M_n(n+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Damit erhalten wir für $k = 1, 2, \ldots$

$$M_n \sum_{\nu=0}^{n} \left(x_\nu^{(n)}\right)^k < M_n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{M_n(n+1)^2} < \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{6.1}$$

2. Nun definieren wir L_n $(n \in \mathbb{N})$ durch

$$L_n f(x) = B_n f(x) + M_n \sum_{\nu=0}^{n} f(x_\nu^{(n)}) x^v \quad (f \in C([0,1]))\,.$$

Hierbei bezeichnet $B_n f$ das n-te Bernsteinpolynom von f. Wegen der Positivität von B_n und wegen $M_n > 0$ ist L_n positiv. Offensichtlich ist L_n auch linear. Außerdem erhalten wir für jedes Polynom $P(x) = \sum_{\mu=1}^{K} p_\mu x^v$ aus (6.1), dass gilt

$$\begin{aligned}
\max_{[0,1]} |L_n P(x) - P(x)| &\leq \max_{[0,1]} |B_n P(x) - P(x)| + \\
&\quad + \max_{[0,1]} \left| \sum_{\mu=1}^{K} p_\mu M_n \sum_{\nu=0}^{n} (x_\nu^{(n)})^\mu x^\nu \right| \leq \\
&\leq \max_{[0,1]} |B_n P(x) - P(x)| + \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^{K} |p_\mu| M_n \sum_{\nu=0}^{n} (x_\nu^{(n)})^\mu \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

3. Nun konstruieren wir eine Folge von stetigen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zunächst sei $f_0 := 0$. Jetzt sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits f_k $(0 \leq k \leq n-1)$ konstruiert. Dabei gelte stets

$$\max_{[0,x_k^{(k)}]} |f_k(x)| < \frac{1}{2^k},$$

$f(x_\nu^{(k)}) M_k = a_\nu^{(k)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$ sowie $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ für $x \geq x_0^{(k-1)}$.

Wir konstruieren nun f_n.

Wir definieren

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, \ x = 0 \\ \frac{a_\nu^{(n)}}{M_n}, \ x = x_\nu^{(n)} \ (\nu = 0, 1, \ldots, n) \\ f_{n-1}(x), \ x \geq x_0^{(n-1)} \\ \text{linear dazwischen.} \end{cases}$$

Wegen $\left|\frac{a_\nu^{(n)}}{M_n}\right| < \frac{1}{2^n}$ und $f_n(0) = 0$ gilt damit auch

$$\max_{[0,x_n^{(n)}]} |f_n(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Die restlichen Anforderungen sind offensichtlich ebenfalls erfüllt.

Zudem erhalten wir

$$\max_{[x_n^{(n)}, x_0^{(n-1)}]} |f_n(x)| \leq \max \left\{ \left| f_n(x_n^{(n)}) \right|, \left| f_{n-1}(x_0^{(n-1)}) \right| \right\} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\max_{[0,1]}|f_n(x)-f_{n-1}(x)| &= \max_{[0,x_0^{(n-1)}]}|f_n(x)-f_{n-1}(x)| \leq \\ &\leq \max_{[0,x_0^{(n-1)}]}|f_n(x)| + \max_{[0,x_0^{(n-1)}]}|f_{n-1}(x)| < \frac{1}{2^{n-2}},\end{aligned}$$

und deshalb gilt für alle $l, p \in \mathbb{N}$

$$\max_{[0,1]}|f_{l+p}(x)-f_l(x)| \leq \sum_{k=1}^{p}|f_{l+k}(x)-f_{l+k-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{l-2}}.$$

Damit existiert eine stetige Funktion f^* mit

$$f_n \to f^* \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

Diese Funktion erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f^*(x_\nu^{(n)})M_n = a_\nu^{(n)} \ (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{6.2}$$

4. Wir zeigen nun, dass $(L_n f^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1])$ dicht ist. Dazu sei eine stetige Funktion g gegeben.

   Wir wählen eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

   $$Q_{n_k} \to g - f^* \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty).$$

   Aus (6.2) erhalten wir

   $$L_{n_k}f^*(x) = B_{n_k}f^*(x) + \sum_{\nu=0}^{n_k} f^*(x_\nu^{(n_k)})M_{n_k}x^\nu = B_{n_k}f^*(x) + Q_{n_k}(x),$$

   also

   $$L_{n_k}f^*(x) \to f^*(x)+g(x)-f^*(x) = g(x), \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty).$$

   Damit ist die Dichtheit gezeigt.

5. Da $(L_n P)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes Polynom P mit $P(0) = 0$ konvergiert, und die Menge dieser Polynome in $C_0([0,1])$ dicht ist, folgt mit Proposition 6 aus [10], dass die Menge der für $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ universellen Funktionen entweder residual oder leer ist. Da wir eine universelle Funktion konstruiert haben, folgt die Residualität in $C_0([0,1])$.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir wandeln in folgendem Satz die in obigem Satz konstruierten Operatoren L_n unter Beibehaltung der universellen Eigenschaften derart ab, dass sie zwar nicht mehr linear, aber immer noch positiv sind und sogar für jedes Polynom P gilt

$$L_nP(x) \to P(x), \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

6.20 Satz: *Es gibt eine Folge stetiger positiver Operatoren* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *so dass für jedes Polynom* P *gilt*

$$L_nP(x) \to P(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty),$$

und eine in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ *residuale Teilmenge von Funktionen* f, *so dass* $(L_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ *dicht ist.*

Beweis:

1. Es seien $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und M_n wie im Beweis zum Satz 6.19. Wir wählen eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_n^* := 2^{2r_n} \geq M_n$.

2. Nun definieren wir L_n $(n \in \mathbb{N})$ durch

$$L_nf(x) = B_nf(x) + \sum_{\nu=0}^{n} f(x_\nu^{(n)}) f\left(\frac{1}{2}\right)^{2r_n} x^\nu \quad (f \in C([0,1])) .$$

Wegen der Positivität von B_n ist L_n positiv. Außerdem erhalten wir für jedes Polynom $P(x) = \sum_{\mu=0}^{K} p_\mu x^\mu$, dass gilt

$$\begin{aligned}
\max_{[0,1]} |L_nP(x) - P(x)| &\leq \max_{[0,1]} |B_nP(x) - P(x)| + \\
&\quad + \max_{[0,1]} \left| \sum_{\mu=0}^{K} \sum_{\lambda=0}^{K} p_\mu p_\lambda \sum_{\nu=0}^{n} (x_\nu^{(n)})^\mu \frac{1}{2^{\lambda+2r_n}} x^\nu \right| \leq \\
&\leq \max_{[0,1]} |B_nP(x) - P(x)| + \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{K} \sum_{\lambda=0}^{K} |p_\mu p_\lambda| \frac{n+1}{2^{2r_n}} \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

3. Jetzt sei f^* eine analog zum Beweis zu Satz 6.19 konstruierte Funktion mit $f^*\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ und

$$f^*(x_\nu^{(n)}) M_n^* = a_\nu^{(n)} \ (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Wir zeigen, dass $(L_n f^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1])$ dicht ist. Dazu sei eine in $[0,1]$ stetige Funktion g gegeben.
Wir wählen eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q_{n_k}(x) \to g(x) - f^*(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \; (k \to \infty).$$

Wir erhalten aus (6.3)

$$L_{n_k} f^*(x) = B_{n_k} f^*(x) + \sum_{\nu=0}^{n_k} f^*(x_\nu^{(n_k)}) M_{n_k}^* x^\nu = B_{n_k} f^*(x) + Q_{n_k}(x),$$

also

$$L_{n_k} f^*(x) \to f^*(x) + g(x) - f^*(x) = g(x), \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \; (k \to \infty).$$

Damit ist die Dichtheit gezeigt.

4. Da $(L_n P)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes Polynom P konvergiert, und die Menge der Polynome in $C([0,1])$ dicht ist, folgt mit Proposition 6 aus [10], dass die Menge der für $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ universellen Funktionen entweder residual oder leer ist. Da wir eine universelle Funktion konstruiert haben, folgt die Residualität.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Im nächsten Satz zeigen wir, dass sich lineare (nicht positive) Operatoren ähnlich verhalten können.

6.21 Satz: *Es gibt eine Folge stetiger linearer Operatoren $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes Polynom P gilt*

$$L_n P(x) \to P(x) \textit{ gleichmäßig auf } [0,1] \; (n \to \infty),$$

und eine in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ residuale Teilmenge von Funktionen f, so dass $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ dicht ist.

Beweis: 1. Es sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in obigem Satz. Weiter sei $M_n \in \mathbb{N}$ mit

$$M_n \geq 2^n \max_{\nu\leq n} |a_\nu^{(n)}| + 1.$$

Wir konstruieren Zahlen $x_\mu^{(n,\nu)}$ $(\mu = 0,1,\ldots M_\nu,\ \nu = 0,1,2,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N})$. Dabei gelte für alle $n > 1$

$$\begin{aligned} & 0 < x_0^{(n,0)} < x_1^{(n,0)} < \ldots < x_{M_0}^{(n,0)} < \\ & < x_0^{(n,1)} < x_1^{(n,1)} < \ldots < x_{M_1}^{(n,1)} < \ldots < x_{M_n}^{(n,n)} < x_0^{(n-1,0)} \ldots < 1 \end{aligned}$$

und $x_\mu^{(n,\nu)} - x_{\mu-1}^{(n,\nu)} < \frac{1}{(n+1)^2 M_n}$. Damit folgt insbesondere für $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} (x_\mu^{(n,\nu)})^k - (x_{\mu-1}^{(n,\nu)})^k &= (x_\mu^{(n,\nu)} - x_{\mu-1}^{(n,\nu)}) \sum_{l=0}^{k-1} (x_\mu^{(n,\nu)})^l (x_{\mu-1}^{(n,\nu)})^{k-1-l} < \\ &< \frac{k}{(n+1)^2 M_n}. \end{aligned}$$

Wir definieren L_n^* durch

$$(L_n^* f)(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} f(x_\mu^{(n,\nu)}) x^\nu.$$

Dann ist L_n^* linear. Außerdem erhalten wir für $f(x) = x^k$ wegen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} (x_\mu^{(n,\nu)})^k \right| &= \left| \sum_{\mu=0}^{\frac{M_n-1}{2}} (x_{2\mu+1}^{(n,\nu)})^k - (x_{2\mu}^{(n,\nu)})^k \right| < \\ &< \sum_{\mu=0}^{\frac{M_n-1}{2}} \frac{k}{(n+1)^2 M_n} < \frac{k}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

dass gilt

$$\begin{aligned} |(L_n^* f)(x)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{M_\nu} (-1)^{\mu+1} (x_\mu^{(n,\nu)})^k x^\nu \right| \le \sum_{\nu=0}^{n} \left| \sum_{\mu=0}^{M_\nu} (-1)^{\mu+1} (x_\mu^{(n,\nu)})^k \right| < \\ &< \frac{k}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität folgt deshalb auch für jedes Polynom P, dass

$$L_n^* P(x) \to 0, \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty)$$

gilt. Damit ist $L_n := B_n + L_n^*$ linear und für jedes Polynom P gilt

$$\begin{aligned} \max_{[0,1]} |L_n P(x) - P(x)| &\le \max_{[0,1]} |B_n P(x) - P(x)| + \\ &\quad + \max_{[0,1]} |L_n^* P(x)| \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

2. Wir konstruieren nun eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zunächst sei $f_0 := 0$ und für ein $n \in \mathbb{N}$ sei f_k $(k \leq n-1)$ bereits konstruiert, so dass $\max_{[0,x_{M_k}^{(k,k)}]} |f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}$ und $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ für $x \geq x_0^{(k-1,0)}$ ist. Zudem gelte

$$\sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} f_k(x_\mu^{(k,\nu)}) = a_\nu^{(k)} \ (\nu = 0, 1, \ldots, k).$$

Wir konstruieren nun f_n durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), \ x \geq x_0^{(n-1,0)} \\ 0, \ x = 0 \\ (-1)^{\mu+1} \frac{a_\nu^{(n)}}{M_n+1}, \ x = x_\mu^{(n,\nu)} \ (\mu = 0, 1, \ldots, M_n, \ \nu = 0, 1, \ldots, n) \\ \text{linear dazwischen.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} f_n(x_\mu^{(n,\nu)}) = \frac{a_\nu^{(n)}}{M_n+1} \sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1}(-1)^{\mu+1} = a_\nu^{(n)}.$$

Da $2^n |a_\nu^{(n)}| < M_n$ ist, folgt $\frac{|a_\nu^{(n)}|}{M_n} < \frac{1}{2^n}$ und somit folgt

$$\max_{[0,x_{M_n}^{(n,n)}]} |f_n(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Außerdem erhalten wir aus

$$\max_{[0,x_0^{(n-1,0)}]} |f_n(x)| \leq \max \left\{ \max_{[0,x_{M_n}^{(n,n)}]} |f_n(x)|, \left| f_{n-1}\left(x_0^{(n-1,0)}\right) \right| \right\} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

dass gilt

$$\begin{aligned} \max_{[0,1]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| &= \max_{[0,x_0^{(n-1,0)}]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \\ &\leq \max_{[0,x_0^{(n-1,0)}]} |f_n(x)| + \max_{[0,x_0^{(n-1,0)}]} |f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\max_{[0,1]} |f_{l+p}(x) - f_l(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{l+k}(x) - f_{l+k-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{l-2}}.$$

Damit existiert eine stetige Funktion f^* mit

$$f_n(x) \to f^*(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (n \to \infty).$$

3. Wir berechnen nun $L_n^* f^*$.

   Es gilt

$$\begin{aligned} L_n^* f^*(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} f^*(x_\mu^{(n,\nu)}) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{M_n} (-1)^{\mu+1} f_n(x_\mu^{(n,\nu)}) x^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu = Q_n(x). \end{aligned}$$

4. Außerdem ist $(L_n f^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1])$ dicht. Dazu sei g eine beliebige, in $[0,1]$ stetige Funktion. Wir wählen eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass gilt

$$Q_{n_k}(x) \to g(x) - f^*(x), \text{ gleichmäßig auf } [0,1] \ (k \to \infty).$$

   Dann gilt für $k \to \infty$

$$\begin{aligned} L_{n_k} f^*(x) &= B_{n_k} f^*(x) + L_{n_k}^* f^*(x) = B_{n_k} f^*(x) + Q_{n_k}(x) \to \\ &\to f^*(x) + g(x) - f^*(x) = g(x) \text{ gleichmäßig auf } [0,1]. \end{aligned}$$

5. Da $(L_n P)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes Polynom P konvergiert, und die Menge der Polynome in $C([0,1])$ dicht ist, folgt mit Proposition 6 aus [10], dass die Menge der für $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ universellen Funktionen entweder residual oder leer ist. Da wir eine universelle Funktion konstruiert haben, folgt die Residualität.

Damit ist der Satz bewiesen. □

7 Eine „Birkhoff-ähnliche“ universelle Funktion

Ein von Mortini mündlich kommuniziertes Ergebnis stellt die Existenz einer ganzen Funktion $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sicher, so dass die Funktionenfolge

$$\left(\phi\left(e^{\frac{z}{n}} + n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht ist.

Wir werden dieses Resultat im folgenden Satz auf andere Funktionen als die Exponentialfunktion erweitern:

7.1 Satz: *Es sei $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine an 0 holomorphe Funktion mit $\Phi'(0) \neq 0$. Dann existiert eine ganze Funktion $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass die Funktionenfolge*

$$\left(\phi\left(\Phi\left(\frac{z}{n}\right) + n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $H(\mathbb{C})$ dicht ist.

Beweis: Mit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine Abzählung aller Polynome, deren Koeffizienten rationalen Real- und Imaginärteil haben.

1. Da $\Phi'(0) \neq 0$ ist, ist Φ in einer Umgebung von 0 schlicht. Es sei $w_0 := \Phi(0)$. Dann existieren Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\delta_2 < 1$, so dass Φ in $U_{\delta_1}(0) := \{z : |z| < \delta_1\}$ schlicht ist und $\Phi(U_{\delta_1}(0)) \supset \overline{U_{\delta_2}(w_0)}$. Mit Φ^{-1} bezeichnen wir eine in $\overline{U_{\delta_2}(w_0)}$ holomorphe Funktion mit $(\Phi^{-1} \circ \Phi)(z) = z$ $(z \in U_{\delta_1}(0))$.

2. Nun definieren wir $a_n := n + w_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Da $\delta_2 < 1$ ist, sind die Mengen $\overline{U_{\delta_2}(a_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt. Mit den Definitionen

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{\delta_2}(a_n)}$$

und

$$q(z) := Q_n(n\Phi^{-1}(z - a_n + w_0)) \ (z \in \overline{U_{\delta_2}(a_n)})$$

ist E eine Arakelian-Menge (vgl. [24]) und q auf E holomorph.

3. Wir verwenden nun zweimal den Satz von Arakelian. Zu der in E holomorphen Funktion
$$\delta(z) := \frac{1}{n} \ (z \in \overline{U_{\delta_2}(a_n)})$$
existiert zunächst eine ganze Funktion g, so dass
$$|\delta(z) - g(z)| < 1 \ (z \in E)$$
ist. Insbesondere gilt also $Reg(z) - \delta(z) < 1$. Dann existiert eine ganze Funktion h mit
$$\left| \frac{q(z)}{\exp(g(z) - 1)} - h(z) \right| < 1 \ (z \in E).$$
Die Funktion $\phi(z) := h(z) \exp(g(z) - 1)$ ist ganz und erfüllt
$$|q(z) - \phi(z)| < |\exp(g(z) - 1)| = \exp(Reg(z) - 1) < \exp(\delta(z)).$$
Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$
$$\max_{|z-a_n| \leq \delta_2} \left| \phi(z) - Q_n(n\Phi^{-1}(z - a_n + w_0)) \right| < \frac{1}{n}.$$
Durch eine Substitution erhalten wir zunächst
$$\max_{|z| \leq \delta_2} \left| \phi(z + a_n) - Q_n(n\Phi^{-1}(z + w_0)) \right| < \frac{1}{n},$$
was durch die Substitution $w = \Phi^{-1}(z + w_0) =: g(z)$ in
$$\max_{w \in g(\{z:|z| \leq \delta_2\})} |\phi(\Phi(w) - w_0 + a_n) - Q_n(nw)| < \frac{1}{n}$$
übergeht. Da g an 0 holomorph ist mit $g(0) = \Phi^{-1}(w_0) = 0$, existiert ein $\delta_3 > 0$ mit
$$U_{\delta_3}(0) \subset g\left(\{z : |z| \leq \delta_2\}\right).$$
Durch die abschließende Substitution $z = nw$ erhalten wir insbesondere
$$\max_{U_{n\delta_3}(0)} \left| \phi\left(\Phi\left(\frac{z}{n}\right) - w_0 + a_n\right) - Q_n(z) \right| < \frac{1}{n}.$$

4. Nun sei ein Kompaktum $K \in \mathfrak{M}$ und eine Funktion $f \in A(K)$ gegeben. Mit dem Satz von Mergelian existiert eine Teilfolge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit
$$\max_K |Q_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{1}{k}.$$

Nun sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $K \subset U_{n\delta_3}(0)$ ist für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $k \geq N$

$$\begin{aligned}\max_K \left| \phi\left(\Phi\left(\frac{z}{n_k}\right) + n_k\right) - f(z)\right| \leq \\ &\leq \max_{U_{n_k\delta_3}(0)} \left|\phi\left(\Phi\left(\frac{z}{n_k}\right) - w_0 + a_{n_k}\right) - Q_{n_k}(z)\right| + \\ &+ \max_K |Q_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Literatur

[1] N. U. ARAKELIAN: Uniform and tangential approximations by analytic functions.
Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 3 (1968), 273-286 [Russisch].

[2] S. N. BERNSTEIN: Quelques remarques sur l'interpolation.
Math. Ann. 79 (1918), 1-12.

[3] G. D. BIRKHOFF: Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières.
C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[4] J.B. CONWAY: Functions of one complex variable.
Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin (1973).

[5] P.J. DAVIS: Interpolation & Approximation.
Dover Publications, New York (1975).

[6] P. ERDÖS, P. VÉRTESI: On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes.
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 36 (1980), 71-89.

[7] X.-X. GAN, K.R. STROMBERG: On approximate antigradients.
Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), 1201-1209.

[8] X.-X. GAN, K.R. STROMBERG: On universal primitive functions.
Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 151-161.

[9] D. GAIER: Vorlesungen über Approximation im Komplexen.
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Maas. (1980).

[10] K.-G. GROSSE-ERDMANN: Universal families and hypercyclic operators.
Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 345-381.

[11] G. HERZOG: On universal functions and interpolation.
Analysis 11 (1991), 21-26.

[12] K. JÄNICH: Einführung in die Funktionentheorie.
Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1980).

[13] I. JOÓ: On the divergence of eigenfunction expansions.
Ann. Uni. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 32 (1989), 3-36.

[14] V.I. KRYLOV: Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of Chebyshev's polynomial for absolutely continuous functions and functions of bounded variation.
Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 107 (1956), 362-365 [Russisch].

[15] W. LUH: On universal functions.
Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 19. Fourier analysis and approximation theory, Budapest (Hungary), (1976).

[16] W. LUH: Über cluster sets analytischer Funktionen.
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 33 (1979), 137-142.

[17] W. LUH: Entire functions with various universal properties.
Complex Variables Theory Appl. 31 (1996), 87-96.

[18] W. LUH, V.A. MARTIROSIAN, J. MÜLLER: Restricted T-universal functions on multiply connected domains.
Acta Math. Hungar. 97 (2002), 173-181.

[19] W. LUH: Geometrische Funktionentheorie.
Skriptum an der Universität Trier (WS 05/06).

[20] W. LUH: Analysis I-IV.
Skriptum an der Universität Trier (WS 02/03-SoSe 04).

[21] J. MARCINKIEWICZ: Sur les nombres dérivés.
Fund. Math. 24 (1935), 305-308.

[22] J. MARCINKIEWICZ: Sur la divergence des polynomes d'interpolation.
Acta Sci. Math. Szeged 8 (1937), 131-135.

[23] S. N. MERGELIAN: Uniform approximations to functions of a complex variable.
Uspekhi Matem. Nauk 7 (1952), 31-122 [Russisch]. Englische Übersetzung in: Amer. Math. Soc. Transl. 3 (1962), 294-391.

[24] M. NIESS: Beweis und Anwendungen des Satzes von Arakelian.
Diplomarbeit an der Universität Trier (2005).

[25] M. NIESS: Universelle Funktionen mit zusätzlichen Eigenschaften.
Dissertation an der Universität Trier (2005).

[26] C. RUNGE: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.
Acta Math. 6 (1885), 228-244.

[27] M. RUZICKA: Analysis III.
Skriptum an der Universität Freiburg (2006).

[28] A. VOGT: Universelle Marcinkiewicz-Funktionen.
Diplomarbeit an der Universität Trier (2007).

[29] P. ZAPPA: On universal holomorphic functions.
Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 2 (1988), 345-352.