

Dissertation

Asymptotiken für Ménage-Polynome

Thorsten Neuschel

Februar 2011

Betreuung: Prof. Dr. Wolfgang Gawronski

Fachbereich IV - Mathematik, Universität Trier

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zusammenfassung	1
2	Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome	8
3	Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken	20
4	Starke Asymptotiken	34
5	Schwache Asymptotiken	57

1 Einleitung und Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit handelt von Polynomen, welche aus der Betrachtung eines klassischen Problems der Kombinatorik, dem sogenannten *Ménage-Problem*, resultieren.

Unter dem *Ménage-Problem* versteht man folgende Frage:

„Wie viele Möglichkeiten gibt es für n Ehepaare an einem runden Tisch Platz zu nehmen, sodass sich Frauen und Männer abwechseln und niemand direkt neben seinem Ehepartner sitzt?“

Die Lösung dieses Problems ist gegeben durch die *Ménage-Zahlen* (vgl. [25])

$$2n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!, \quad n \geq 1.$$

Durch Vernachlässigung der Vorfaktoren ergeben sich die *reduzierten Ménage-Zahlen*

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!, \quad n \geq 1.$$

Die aus diesen Zahlen in natürlicher Weise resultierenden Polynome

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^n (t-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!, \quad t \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1,$$

heißen *Ménage-Polynome* (siehe etwa [15], S. 197, die Polynome $U_n(t)$ werden dort als *ménage hit polynomials* bezeichnet). Diese Polynome stellen die erzeugenden Funktionen gewisser Zahlenfolgen dar, welche sich aus der Interpretation des *Ménage-Problems* als ein sogenanntes *Rook-Problem* ergeben (zu diesem Begriff siehe etwa [15], S. 164).

Zur Motivation der Untersuchung dieser Polynome und der dabei verfolgten Ziele soll eine weitere klassische Aufgabe der Kombinatorik dienen, das *Rencontre-Problem*. Hinter diesem Problem verbirgt sich die folgende Frage:

„Wie viele Permutationen einer n -elementigen Menge gibt es, welche keine Fixpunkte besitzen?“

1 Einleitung und Zusammenfassung

Die Lösung dieses Problems ist gegeben durch die *Rencontre-Zahlen* (siehe etwa [15], S. 57 ff.)

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \quad n \geq 1.$$

Diese Zahlen geben (wiederum kombinatorisch motiviert) Anlass zur Betrachtung der Polynome

$$D_n(t) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(t-1)^k}{k!} = (-1)^n n! L_n^{(-n-1)}(t-1), \quad t \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1,$$

wobei mit $L_n^{(\alpha)}$ die *verallgemeinerten Laguerre-Polynome* bezeichnet werden (zu deren Definition siehe etwa [24], S. 100). Die Polynome $S_n(t) = D_n(t+1)$ sind wohlbekannt, denn sie stellen bis auf Vorfaktoren die Partialsummen der Exponentialreihe dar.

Im Jahre 1924 untersuchte Gabor Szegő die Folge der Partialsummen der Exponentialreihe auf ihr Wachstum und auf Eigenschaften ihrer Nullstellen (siehe [20]). Er zeigte unter anderem, dass die Nullstellen dieser Polynomfolge bei „geeigneter Skalierung“ gegen die Spur einer Kurve in der komplexen Ebene streben, wobei jeder Punkt dieser Kurve Häufungspunkt von Nullstellen ist. Die in diesem Kontext auftretende Kurve trägt heute den Namen *Szegő-Kurve* und ihre Spur wird durch die Gleichung

$$|z e^{1-z}| = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1,$$

beschrieben (siehe Abbildung 1.1).

Szegös Untersuchungen bildeten den Ursprung verschiedener Verallgemeinerungen. Es folgten etwa ähnliche Resultate über Partialsummen ganzer Funktionen (siehe z. B. [17]), und entsprechende Eigenschaften verallgemeinerter Laguerre-Polynome sind nach wie vor Forschungsgegenstand.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die in analoger Weise zum „Rencontre Fall“ aus den Ménage-Zahlen entstehenden Polynome zu studieren. Für diese Untersuchungen erweist es sich zuweilen als sinnvoll, die Sprache der hypergeometrischen Funktionen zu verwenden, was gleichzeitig einer „Klassifikation“ dieser Polynome dient.

Für die Ménage-Polynome gilt folgende Verbindungsformel

$$U_n(t) = 2(t-1)^n {}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4(1-t)} \right).$$

Es erscheint daher naheliegend, hypergeometrische Polynome der Form

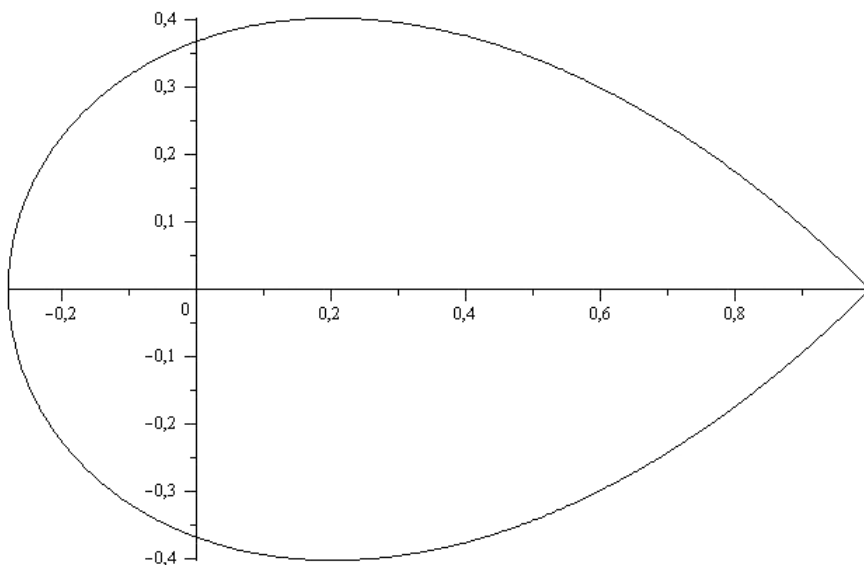


Abbildung 1.1: Die Spur der Szegő-Kurve.

$${}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ & \beta & \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k (\alpha)_k}{(\beta)_k k!} z^k$$

zu untersuchen, wobei α und β möglichst allgemein gehaltene komplexe Parameter sind und Ausdrücke der Art $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ stets das Pochhammer-Symbol bezeichnen. Lässt man diese große Freiheit bei der Wahl der Parameter α und β zu, so ergeben sich jedoch für die hier angestrebten Ziele „unerwünschte Nebeneffekte“. Im Fall $\alpha = \beta$ etwa reduzieren sich die Polynome zu gewissen Laguerre-Polynomen:

$${}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ & \alpha & \end{matrix} \middle| z \right) = n! z^n L_n^{(-2n)} \left(-\frac{1}{z} \right).$$

Obwohl das Verhalten letzterer Polynome bekannt ist, unterscheidet sich dieses jedoch grundsätzlich von dem Verhalten der Polynome ${}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix} \middle| z \right)$, welche für die Untersuchung der Ménage-Polynome vordergründig von Interesse sind (siehe etwa [8]). Auch etwa in der Theorie der klassischen Orthogonalpolynome tritt häufig die Situation auf, dass verschiedene Parameterfälle sehr unterschiedliche Techniken zu ihrer Untersuchung erfordern. In der vorliegenden Arbeit werden wir uns bei der Betrachtung der Parameter auf die Fälle $\Re(\alpha) > 0$ oder sogar $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ beschränken.

1 Einleitung und Zusammenfassung

Definition 1.1. Für $\Re(\alpha) > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heißen die Polynome

$${}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z\right)$$

die verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome. Im Falle $\alpha = 1$ schreiben wir auch

$$F_n(z) := {}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z\right)$$

und nennen F_n schlicht assoziierte Ménage-Polynome.

Polynome dieser Art treten außerhalb des hier vorgestellten Kontextes auch etwa in der Theorie der rationalen Approximation von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen auf (siehe [10], S. 66 ff.).

Grundlegende Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome werden in Kapitel 2 betrachtet. Dazu gehört eine Auswahl an Rekursionen, ersten asymptotischen Aussagen, Integraldarstellungen, Differentialgleichungen, Differentialgleichungssystemen und Verbindungen zu Tschebyscheff-, Laguerre-Polynomen und Besselfunktionen. Eine Identität, welche gleichzeitig eine Verbindung der assoziierten Ménage-Polynome zu Tschebyscheff-Polynomen erster Art T_n und zu modifizierten Besselfunktionen erster Art herstellt, ist die folgende (siehe Satz 2.9):

$$F_n\left(\frac{1}{2z}\right) = \frac{z}{e^z} T_n\left(\frac{d}{dz}\right) \frac{e^z}{z}.$$

Die Verbindung zu modifizierten Besselfunktionen erster Art I_n besteht darin, dass diese durch Anwendung des gleichen „Operators“ erzeugt werden:

$$I_n(z) = T_n\left(\frac{d}{dz}\right) I_0(z).$$

Im dritten Kapitel wird eine modifizierte Version der komplexen Laplace-Methode behandelt, welche gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für das Verhalten von verallgemeinerten Laplace-Transformierten in Gestalt parameterabhängiger komplexer Kurvenintegrale der Form

$$\int_{\mathcal{P}} e^{-np(t,z)} q(t,z) dt$$

1 Einleitung und Zusammenfassung

liefert, was sich als ein wichtiges Hilfsmittel für die tiefer gehende asymptotische Untersuchung herausstellt. Dabei ist zu betonen, dass eine Betrachtung unter diesem Gesichtspunkt bislang in der Literatur anscheinend nur in Form von Spezialfällen behandelt wurde.

Um die Hauptergebnisse der letzten beiden Kapitel beschreiben zu können, erklären wir die Spur einer geschlossenen, stetig differenzierbaren Jordankurve \mathcal{C} in der komplexen Ebene durch die Gleichung (siehe auch Abbildung 1.2)

$$\left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right| = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

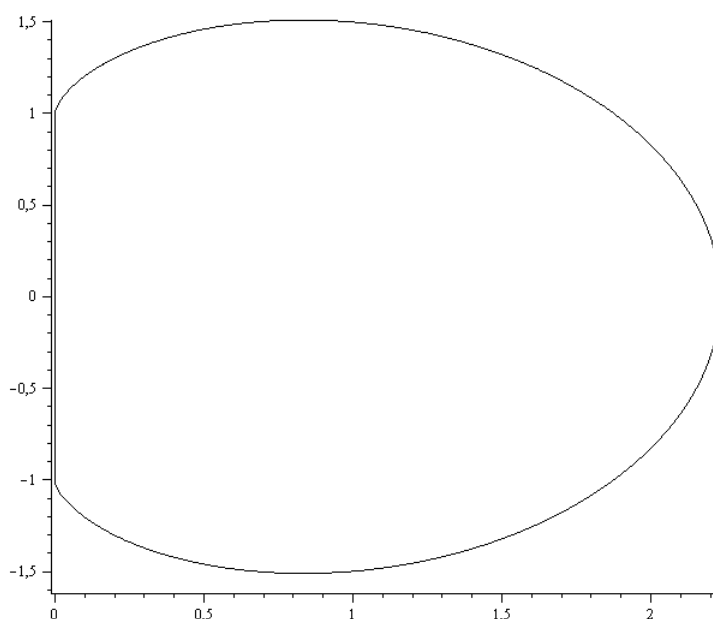


Abbildung 1.2: Die Spur der Kurve \mathcal{C} .

Für eine Definition der mehrdeutigen Ausdrücke in dieser Gleichung und für eine Untersuchung der Kurve siehe Lemma 5.1 sowie die dort vorangehenden Bemerkungen.

Betrachten wir die geeignet skalierten verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome mit fest gewähltem Parameter $\alpha \in \mathbb{N}$ der Form

$${}_3F_1 \left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n} \right),$$

1 Einleitung und Zusammenfassung

so werden in Kapitel 4, Satz 4.1, für große Werte des Grads n folgende Asymptotiken für die Folge dieser Polynome bewiesen:

$${}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ (z + \sqrt{z^2+1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right\}^n \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

gleichmäßig gültig bezüglich z auf jeder kompakten Teilmenge des Außenbereichs $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ der Kurve \mathcal{C} und

$${}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha \cos(\alpha\pi) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

gleichmäßig gültig bezüglich z auf jeder kompakten Teilmenge des Innenbereichs $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ der Kurve \mathcal{C} . Asymptotiken dieser Art werden gemeinhin als *starke Asymptotiken* bezeichnet.

Im letzten Kapitel wird unter Verwendung einiger Hilfsmittel aus der Potentialtheorie das Verhalten der Nullstellen der in Kapitel 4 betrachteten Polynomfolgen untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass die Menge der Häufungspunkte der Nullstellen genau durch die Spur der Kurve \mathcal{C} gegeben ist (siehe Lemma 5.3). Es zeigt sich in Satz 5.8, dass die assoziierten (normierten) Nullstellenmaße μ_n dieser Polynome im Sinne der schwach*-Konvergenz gegen das Equilibriummaß μ der Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ konvergieren. Ferner ist die Grenzverteilung der Nullstellen absolut stetig bezüglich des linearen Lebesguemaßes (Bogenmaß) auf der Spur von \mathcal{C} und kann explizit durch eine Dichtefunktion (oder Radon-Nikodym-Ableitung)

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} |D(z)| |dz|, \quad z \in \mathcal{C},$$

beschrieben werden, wobei D gegeben ist durch (siehe Satz 5.7)

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}-1}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

Derartige Aussagen über das Verhalten der Nullstellenmaße werden im Allgemeinen als *schwache Asymptotiken* bezeichnet (zu den Begriffen der starken und schwachen Asymptotik siehe etwa [2]).

1 Einleitung und Zusammenfassung

Es werden folgende Notationen in der Arbeit verwendet:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen,
$\mathbb{N} \cup \{0\}$	nichtnegative ganze Zahlen,
\mathbb{C}	komplexe Zahlen,
$\Re(z)$	Realteil der komplexen Zahl z ,
$\Im(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl z ,
$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 0 \Rightarrow \Im(z) \neq 0\}$.	

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

Ménage-Polynome

Zunächst wollen wir einige bekannte Eigenschaften der Ménage-Polynome

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^n (t-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!, \quad n \geq 1,$$

aus der Literatur zitieren.

Satz 2.1. *i) Für die Ménage-Polynome U_n gelten die folgenden Rekursionen*

$$U_n(t) = nU_{n-1}(t) + \frac{n}{n-2} (t-1)^2 U_{n-2}(t) - \frac{4}{n-2} (t-1)^n, \quad n \geq 3,$$

und

$$U_n(t) = (n-2+2t)U_{n-1}(t) - (t-1)U'_{n-1}(t) - (t-1)^2 U_{n-2}(t), \quad n \geq 3,$$

wobei $U_1(t) = 2t-1$ und $U_2(t) = 2t^2$.

ii) Für die Ménage-Polynome U_n und die modifizierten Besselfunktionen erster Art I_n (zu deren Definition siehe etwa [14], S. 248) gilt die Entwicklung

$$(1-x)^{-1} \exp(-2x(1-t)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^{-n} U_n(t) I_n(2tx-2x),$$

wobei $U_0(t) = 2$ gesetzt sei.

iii) Für die reduzierten Ménage-Zahlen $U_n = U_n(0)$ gilt die asymptotische Entwicklung

$$U_n \sim n! e^{-2} \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2! [n-1]_2} + \dots + \frac{(-1)^k}{k! [n-1]_k} + \dots \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei wir für natürliche Zahlen n und k setzen: $[n-1]_k = (n-1)(n-2) \cdots (n-k)$.

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

Beweis. Siehe [15], Kapitel 8, die Aussagen in *ii)* und *iii)* werden dort in den Aufgaben aufgeführt. \square

Eine Rekursion für assoziierte Ménage-Polynome findet sich in Satz 2.4. Für eine entsprechende Aussage zu *ii)* siehe Satz 2.10.

Nach Satz 2.1 Teil *iii)* gilt insbesondere

$$U_n(0) \sim n! e^{-2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Diese Aussage lässt sich leicht auf die ganze komplexe Ebene verallgemeinern.

Satz 2.2. *Für die Ménage-Polynome U_n gilt die Asymptotik*

$$U_n(t) \sim n! e^{2(t-1)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen der komplexen Ebene.

Beweis. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge und die Konstante $M > 0$ so gewählt, dass für alle $t \in K$ gilt: $|t - 1| \leq M$. Wir wollen zeigen:

$$\frac{U_n(t)}{n! e^{2(t-1)}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig bezüglich $t \in K$.

Dafür hinreichend ist die gleichmäßige Gültigkeit der Grenzwertaussage

$$\left| \frac{1}{n!} U_n(t) - e^{2(t-1)} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Da für alle $t \in K$ die folgende Abschätzung gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2(t-1))^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2M)^k}{k!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

genügt es zu zeigen:

$$\left| \frac{1}{n!} U_n(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(2(t-1))^k}{k!} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig bezüglich $t \in K$.

Seien $n \geq 2$ und $t \in K$, dann gilt nach Definition der Polynome U_n

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n!} U_n(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(2(t-1))^k}{k!} \right| \\
&= \left| \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (t-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! - \sum_{k=0}^n \frac{(2(t-1))^k}{k!} \right| \\
&= \left| \sum_{k=2}^n \frac{(2(t-1))^k}{k!} \left(\frac{1}{n!} \frac{2n}{2n-k} \frac{(n-k)!}{2^k} (2n-k) \cdots (2n-2k+1) - 1 \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k}{k!} \left(1 - \frac{(2n-k-1) \cdots (2n-2k+1)}{(2n-2)(2n-4) \cdots (2n-2k+2)} \right) \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k}{k!} \left(1 - \prod_{j=0}^{k-2} \frac{2n-k-1-j}{2(n-1-j)} \right) \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k}{k!} \left(1 - \prod_{j=0}^{k-2} \frac{2n-k-1}{2(n-1)} \right) \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k}{k!} \left(1 - \left(\frac{2n-k-1}{2(n-1)} \right)^{k-1} \right) \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{(k-1)^2}{2n-2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2n-2} \sum_{k=2}^n \frac{(2M)^k (k-1)^2}{k!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Assoziierte Ménage-Polynome

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Eigenschaften der (verallgemeinerten) assoziierten Ménage-Polynome

$${}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k (\alpha)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} z^k$$

betrachtet, wobei die meisten dieser Eigenschaften lediglich für den wichtigsten Fall $\alpha = 1$ explizit formuliert werden. Wie in der Einleitung angedeutet, stellt es sich unter anderem heraus, dass diese Polynome enge Verbindungen zu Tschebyscheff-Polynomen erster Art, zu Laguerre-Polynomen und zu Besselfunktionen besitzen.

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

Eine der wichtigsten Eigenschaften ist jedoch die Charakterisierung der assoziierten Ménage-Polynome durch die Laplace-Transformierten der Tschebyscheff-Polynome erster Art T_n (zu deren Definition siehe etwa [24], S. 3).

Satz 2.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Re(\alpha) > 0$, dann gilt:*

i) *Für $z \in \mathbb{C}$ ist*

$${}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \middle| z\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_n(1-2zt) dt.$$

ii) *Für $\Re(z) > 0$ ist*

$${}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \middle| z\right) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\frac{1}{2z}}}{(2z)^\alpha} \int_{-1}^\infty e^{-\frac{y}{2z}} (y+1)^{\alpha-1} T_n(y) dy,$$

also ist insbesondere im Fall $\alpha = 1$

$${}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1 \middle| z\right) = \frac{(-1)^n}{2z} e^{-\frac{1}{2z}} \int_{-1}^\infty e^{-\frac{y}{2z}} T_n(y) dy.$$

Beweis. Es gilt bekanntlich

$$(\alpha)_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+k-1} dt,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} {}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \alpha \middle| z\right) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k (\alpha)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} z^k \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} (tz)^k dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_n(1-2zt) dt, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Identität

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} x^k = T_n(1 - 2x)$$

verwendet wurde. Dies zeigt die behauptete Formel in *i*).

Für den Beweis der zweiten Formel sei zunächst $z > 0$, dann folgt mittels der Substitution $t = \frac{y+1}{2z}$ und unter Verwendung der Identität $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

$$\begin{aligned} {}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid z\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_n(1 - 2zt) dt \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\frac{1}{2z}}}{(2z)^\alpha} \int_{-1}^\infty e^{-\frac{y}{2z}} (y+1)^{\alpha-1} T_n(y) dy. \end{aligned}$$

Eine Anwendung des Satzes von Morera zeigt, dass das Parameterintegral rechter Hand und damit die gesamte rechte Seite eine holomorphe Funktion der Variablen z auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ darstellt. Aus dem Identitätssatz holomorpher Funktionen folgt damit die behauptete Formel in *ii*). \square

Im Folgenden verwenden wir gemäß Definition 1.1 die Schreibweise

$$F_n(z) = {}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad 1 \mid z\right).$$

Satz 2.4. *Die assoziierten Ménage-Polynome F_n erfüllen die Rekursion*

$$F_n(z) = -4znF_{n-1}(z) + \frac{n}{n-2}F_{n-2}(z) - \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 3,$$

wobei $F_1(z) = -2z + 1$ und $F_2(z) = 16z^2 - 8z + 1$.

Beweis. Nach dem Identitätssatz holomorpher Funktionen genügt es, die behauptete Gleichheit für positives Argument zu zeigen. Es sei also $n \geq 3$ und $z > 0$. Nach Satz 2.3 und unter Verwendung der Identität (siehe [11], (2.43))

$$2T_n(y) = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dy} T_{n+1}(y) - \frac{1}{n-1} \frac{d}{dy} T_{n-1}(y)$$

gilt mit der Bezeichnung $T'_n(y) := \frac{d}{dy} T_n(y)$ die Rechnung

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

$$\begin{aligned}
F_{n-1}(z) &= \frac{(-1)^{n-1}}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_{n-1}(y) \, dy \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{4zn} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_n'(y) \, dy - \frac{(-1)^{n-1}}{4z(n-2)} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_{n-2}'(y) \, dy \\
&= \frac{1}{4zn} - \frac{1}{4zn} F_n(z) - \frac{1}{4z(n-2)} + \frac{1}{4z(n-2)} F_{n-2}(z),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt durch partielle Integration und unter Verwendung von $T_n(-1) = (-1)^n$ folgt. Durch Umstellen nach $F_n(z)$ ergibt sich die Behauptung. \square

Hypergeometrische Funktionen erfüllen oft gewisse Differentialgleichungen (siehe etwa [9], S. 136). Der Vollständigkeit halber erwähnen wir eine entsprechende Differentialgleichung, ein Differentialgleichungssystem und eine Rodriguesformel im Falle der assoziierten Ménage-Polynome (wobei diese Resultate im weiteren Verlauf nicht verwendet werden).

Satz 2.5. *Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ die folgende lineare Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$z^3 F_n'''(z) + (4z - 1)z F_n''(z) + \left((2 - n^2)z - \frac{1}{2} \right) F_n'(z) - n^2 F_n(z) = 0.$$

Beweis. Die Gestalt der Differentialgleichung ergibt sich formal aus [9], S. 136. Eine Verifikation etwa mittels der Definition zeigt dann die Behauptung. \square

Satz 2.6. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die assoziierten Ménage-Polynome F_n sind Lösungen des Differentialgleichungssystems*

$$\begin{pmatrix} F_n'(z) \\ F_{n-1}'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{z} + \frac{1}{2z^2} & \frac{-n}{2z^2(n-1)} \\ -\frac{n-1}{2z^2 n} & \frac{1}{2z^2} - \frac{n-1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n(z) \\ F_{n-1}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2z^2(n-1)} \\ \frac{-1}{2z^2 n} \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$$

Beweis. Im Falle $n = 2$ lässt sich die Behauptung leicht verifizieren. Es sei im Folgenden also $n \geq 3$. Nach dem Identitätssatz holomorpher Funktionen genügt es, die zwei behaupteten Gleichheiten für positives Argument $z > 0$ zu zeigen. Nach Satz 2.3 gilt

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

$$F_n(z) = \frac{(-1)^n}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_n(y) dy.$$

Daraus folgt unter Verwendung der Rekursion $2x T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$ (siehe dazu etwa [5], S. 994)

$$\begin{aligned} F'_n(z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2z^2} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_n(y) dy + \frac{(-1)^n}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} \left(\frac{y+1}{2z^2} \right) T_n(y) dy \\ &= -\frac{1}{z} F_n(z) + \frac{1}{2z^2} F_n(z) + \frac{1}{4z^2} \frac{(-1)^n}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} 2y T_n(y) dy \\ &= \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} \right) F_n(z) - \frac{1}{4z^2} \frac{(-1)^{n+1}}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_{n+1}(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{4z^2} \frac{(-1)^{n-1}}{2z} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y+1}{2z}} T_{n-1}(y) dy \\ &= \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} \right) F_n(z) - \frac{1}{4z^2} F_{n+1}(z) - \frac{1}{4z^2} F_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Drücken wir im letzten Ausdruck $F_{n+1}(z)$ mittels der Rekursion aus Satz 2.4 durch $F_n(z)$ und $F_{n-1}(z)$ aus, so ergibt sich

$$F'_n(z) = \left(\frac{n}{z} + \frac{1}{2z^2} \right) F_n(z) - \frac{n}{2z^2(n-1)} F_{n-1}(z) + \frac{1}{2z^2(n-1)},$$

was der ersten zu beweisenden Gleichung entspricht. Ersetzt man in dieser Gleichung n durch $n-1$, so erhält man

$$F'_{n-1}(z) = \left(\frac{n-1}{z} + \frac{1}{2z^2} \right) F_{n-1}(z) - \frac{n-1}{2z^2(n-2)} F_{n-2}(z) + \frac{1}{2z^2(n-2)}.$$

Drücken wir im letzten Ausdruck $F_{n-2}(z)$ wieder mittels der Rekursion aus Satz 2.4 durch $F_n(z)$ und $F_{n-1}(z)$ aus, so ergibt sich

$$F'_{n-1}(z) = -\frac{n-1}{2nz^2} F_n(z) + \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{n-1}{z} \right) F_{n-1}(z) - \frac{1}{2nz^2},$$

was der zweiten behaupteten Gleichung entspricht. □

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

Als nützlich erweisen sich zuweilen Darstellungen durch Rodriguesformeln.

Satz 2.7. Die assoziierten Ménage-Polynome F_n erfüllen die Rodriguesformel

$$F_n(z) = \frac{z^{2n+1}}{(-2n)_n} \left(\frac{d}{dz} \right)^n \left\{ z^{-n-1} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} -2n, & n, & 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z \right) \right\}, \quad n \geq 0.$$

Beweis. Siehe [9], S. 44, (4), setze $p = 2$, $q = 1$, $\sigma = -2n$, $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = 1$ und $\rho_1 = \frac{1}{2}$ dort. \square

Der nächste Satz stellt neben Satz 2.3 eine weitere Verbindung der assoziierten Ménage-Polynome zu Tschebyscheff-Polynomen erster Art T_n und darüber hinaus zu verallgemeinerten Laguerre-Polynomen her.

Satz 2.8. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$i) F_n(z) = \sum_{k=0}^n T_n^{(k)}(1) (-2z)^k,$$

wobei $T_n^{(k)}(1)$ die k -te Ableitung von T_n ausgewertet an der Stelle 1 bezeichnet.

$$ii) F_n(z) = (-z)^n \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (-1)^k (n-k)! k! L_k^{(-n-1)} \left(-\frac{1}{z} \right),$$

wobei $L_k^{(-n-1)}$ das k -te Laguerre-Polynom zum Parameter $\alpha = -n - 1$ bezeichnet.

Beweis.

i) Es gilt (vgl. [16], S. 33)

$$T_n^{(k)}(1) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n^2 - j^2}{2j + 1},$$

und aufgrund der Darstellung

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} z^k$$

genügt es, Folgendes zu zeigen:

$$\frac{(-n)_k (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} = (-2)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n^2 - j^2}{2j + 1}.$$

Dieses ergibt sich jedoch sofort aus einer elementaren Rechnung.

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

ii) a) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ folgende Summenformel

$$\sum_{\nu=0}^k \binom{2n}{2n-2\nu} \binom{-\nu-1}{-\nu+k} (-1)^\nu \nu! (n-\nu)! = \frac{n! \sqrt{\pi} (-1)^k \Gamma(n+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k) \Gamma(n)}.$$

Diese Identität ergibt sich für $b = \frac{1}{2} - n$ und $c = \frac{1}{2}$ aus der Gaußschen Formel (siehe etwa [13], S. 161)

$$\sum_{\nu=0}^k \frac{(-k)_\nu (b)_\nu}{(c)_\nu \nu!} = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-b+k)}{\Gamma(c+k) \Gamma(c-b)}.$$

b) Es gilt unter Verwendung der Summenformel aus a)

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{(\frac{1}{2})_k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n! (n)_k (-1)^k}{(\frac{1}{2})_k (n-k)!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n! \sqrt{\pi} (-1)^k \Gamma(n+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k) \Gamma(n) (n-k)!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^k \binom{2n}{2n-2\nu} \binom{-\nu-1}{-\nu+k} (-1)^\nu \nu! (n-\nu)! \frac{z^k}{(n-k)!} \\ &= \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu}^n \binom{2n}{2\nu} \binom{-\nu-1}{-\nu+k} (-1)^\nu \nu! (n-\nu)! \frac{z^k}{(n-k)!} \\ &= \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=0}^{\nu} \binom{2n}{2\nu} \binom{-n+\nu-1}{k} (-1)^{n-\nu} \nu! (n-\nu)! \frac{z^{n+k-\nu}}{(\nu-k)!} \\ &= (-z)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{2n}{2\nu} (-1)^\nu (n-\nu)! \nu! \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu-n-1}{k} \frac{1}{(\nu-k)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu-k} \\ &= (-z)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{2n}{2\nu} (-1)^\nu (n-\nu)! \nu! L_\nu^{(-n-1)} \left(-\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

□

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gilt für die modifizierten Besselfunktionen erster Art I_n die Beziehung

$$I_n(z) = T_n \left(\frac{d}{dz} \right) I_0(z).$$

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

Diese Identität folgt sofort induktiv aus den Rekursionen (siehe etwa [5], S. 928, 994)

$$I_{n+1}(z) = 2 \frac{d}{dz} I_n(z) - I_{n-1}(z),$$

$$T_{n+1}(z) = 2z T_n(z) - T_{n-1}(z).$$

Wir wollen eine vergleichbare Identität für die assoziierten Ménage-Polynome beweisen.

Satz 2.9. *Für die assoziierten Ménage-Polynome F_n gilt*

$$F_n \left(\frac{1}{2z} \right) = \frac{z}{e^z} T_n \left(\frac{d}{dz} \right) \frac{e^z}{z}, \quad n \geq 0, z \neq 0.$$

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt für $\Re(z) > 0$

$$F_n(z) = \frac{(-1)^n}{2z} e^{-\frac{1}{2z}} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{y}{2z}} T_n(y) dy.$$

Es sei für den Moment $T_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} t^k$. Damit folgt unter Verwendung eines Standardsatzes über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen zunächst für $z > 0$

$$\begin{aligned} F_n \left(\frac{1}{2z} \right) &= (-1)^n z e^{-z} \int_{-1}^{\infty} e^{-zt} T_n(t) dt \\ &= (-1)^n z e^{-z} \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \int_{-1}^{\infty} e^{-zt} t^k dt \\ &= (-1)^n z e^{-z} \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} (-1)^k \left(\frac{d}{dz} \right)^k \frac{e^z}{z} \\ &= (-1)^n \frac{z}{e^z} T_n \left(-\frac{d}{dz} \right) \frac{e^z}{z} \\ &= \frac{z}{e^z} T_n \left(\frac{d}{dz} \right) \frac{e^z}{z}. \end{aligned}$$

Mittels des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen folgt daraus die Behauptung. \square

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir auf eine Entwicklung eingehen, welche sich als eine Art erzeugende Funktion der assoziierten Ménage-Polynome interpretieren lässt. Die formale Herleitung geschieht mittels eines allgemeinen Zusammenhangs aus [7], S. 254,

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

wobei wir auf genauere Konvergenzuntersuchungen, welche sich aus einer Anwendung von Satz 2.2 und einer Asymptotik der modifizierten Besselfunktionen (siehe etwa [14], S. 256) ergäben, an dieser Stelle verzichten.

Satz 2.10. *Für die assoziierten Ménage-Polynome und die modifizierten Besselfunktionen erster Art gilt folgende Entwicklung*

$$\begin{aligned} e^{z w^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n 2^{2n}}{(n)_n} (I_n(w))^2 {}_3F_1\left(-n, \frac{n}{2}, 1 \mid z\right) \\ &= (I_0(w))^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (I_n(w))^2 {}_3F_1\left(-n, \frac{n}{2}, 1 \mid z\right). \end{aligned}$$

Beweis.

a) Wir zeigen zunächst die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k+n}}{k! (k+n)! (2n+1)_k} w^k = \frac{(2n)!}{w^n} (I_n(\sqrt{w}))^2.$$

Unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung der modifizierten Besselfunktionen erster Art gilt

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{w^n} (I_n(\sqrt{w}))^2 &= \frac{(2n)!}{4^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+n)! 2^{2k}} w^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+n)! 2^{2k}} w^k \right) \\ &= \frac{(2n)!}{4^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \frac{1}{(\nu+n)! (k-\nu+n)!} \right) \left(\frac{w}{4}\right)^k \\ &= \frac{(2n)!}{4^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (2n+k)!} \left(\sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \binom{2n+k}{n+k-\nu} \right) \left(\frac{w}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

Einsetzen des kombinatorischen Zusammenhangs

$$\sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \binom{2n+k}{n+k-\nu} = \binom{2n+2k}{n+k} = \frac{(2n+2k)!}{(n+k)! (n+k)!}$$

ergibt

$$\frac{(2n)!}{w^n} (I_n(\sqrt{w}))^2 = \frac{(2n)!}{4^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)!}{k! (2n+k)! (n+k)! (n+k)!} \left(\frac{w}{4}\right)^k,$$

2 Eigenschaften der Ménage-Polynome und der assoziierten Ménage-Polynome

und eine elementare Rechnung zeigt

$$\frac{(2n)!}{w^n} (I_n(\sqrt{w}))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_{k+n}}{k!(k+n)!(2n+1)_k} w^k.$$

b) Aus [7], S. 255, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n!(n)_n} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_{n+r}}{r!(2n+1)_r} w^r \right) {}_3F_1 \left(-n, \quad n, \quad 1 \mid z \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(\frac{1}{2})_m} (zw)^m.$$

Für $b_m := \frac{(\frac{1}{2})_m}{m!}$ ergibt sich unter Verwendung der Identität in a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2})_n 2^{2n}}{(n)_n} (I_n(\sqrt{w}))^2 {}_3F_1 \left(-n, \quad n, \quad 1 \mid z \right) = e^{zw},$$

woraus die Behauptung folgt.

□

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, das Verhalten komplexer Kurvenintegrale der Form

$$\int_{\mathcal{P}} e^{-np(t,z)} q(t,z) dt$$

für große Werte von $n \in \mathbb{N}$ asymptotisch zu beschreiben, wobei die Asymptotiken gleichmäßig auf kompakten Bereichen bezüglich eines Parameters z gelten sollen. Dabei bezeichnen p und q stetige komplexe Funktionen zweier komplexer Veränderlicher t und z , und für jeden Parameter z seien die Funktionen $p(\cdot, z)$ und $q(\cdot, z)$ als holomorph vorausgesetzt. Obwohl die Ganzzahligkeit der Größe n nicht zwingend notwendig ist, nehmen wir sie in die Formulierung auf, da das Ergebnis hier nur in dieser Form benötigt wird. Grundlage ist die klassische *Laplace-Methode* (siehe [13], S. 121 ff.), welche Aussagen über das asymptotische Verhalten von Kurvenintegralen der Form

$$\int_{\mathcal{P}} e^{-np(t)} q(t) dt$$

macht. Die Anwendung dieser Methode auf Integrale, welche von weiteren Parametern abhängig sind, liefert dann höchstens *punktweise* gültige Asymptotiken.

Zum Beweis einer „gleichmäßigen Version“ benötigen wir zwei Hilfsaussagen. Die erste davon stellt eine leichte Verallgemeinerung der aus der Funktionentheorie bekannten Isoliertheit der Nullstellen holomorpher Funktionen dar.

Lemma 3.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$, und $S \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge. Die Funktion*

$$p : G \times S \rightarrow \mathbb{C}$$

sei stetig und für alle $z \in S$ sei $p_z := p(\cdot, z)$ holomorph auf G . Ferner gelte $p_z(a) = 0$ und $p'_z(a) := \frac{d}{dt} p_z(t)|_{t=a} \neq 0$ für alle $z \in S$.

Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass gilt

$$p_z(t) \neq 0$$

für alle $t \in \mathcal{U}_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ und für alle $z \in S$ (wobei wir stets $\mathcal{U}_\epsilon(a) := \{t \in \mathbb{C} : |t - a| < \epsilon\}$ setzen).

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Beweis. Es sei $\delta > 0$ so klein gewählt, dass $\overline{\mathcal{U}_\delta(a)} \subset G$. Dann gilt

$$p_z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) (t-a)^n$$

für $t \in \mathcal{U}_\delta(a)$ und für alle $z \in S$ (der Konvergenzradius der Potenzreihe beträgt für jedes $z \in S$ mindestens δ).

Es sei die Funktion

$$g : G \times S \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch

$$g(t, z) := \begin{cases} \frac{p_z(t)}{t-a} & \text{falls } t \in G \setminus \{a\}, z \in S, \\ a_1(z) & \text{falls } t = a, z \in S. \end{cases}$$

Dann gilt $g_z(t) := g(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) (t-a)^{n-1}$ für $t \in \mathcal{U}_\delta(a)$ und für alle $z \in S$.

Unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel folgt

$$g_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}_\delta(a)} \frac{g_z(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}_\delta(a)} \frac{p_z(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-t)} d\zeta$$

für $t \in \mathcal{U}_\delta(a)$ und für alle $z \in S$. Aus dieser Darstellung folgt (mithilfe eines Standardsatzes über die Stetigkeit von Parameterintegralen) die Stetigkeit der Abbildung g auf $\mathcal{U}_\delta(a) \times S$. Ferner gilt

$$g_z(a) = p'_z(a) = a_1(z) \neq 0$$

für alle $z \in S$. Zu jedem $z \in S$ existieren demnach offene Umgebungen (offen in der Teilraumtopologie) $\mathcal{U}^{(z)} \subset S$, $\mathcal{V}^{(z)} \subset \mathcal{U}_\delta(a)$ mit $z \in \mathcal{U}^{(z)}$, $a \in \mathcal{V}^{(z)}$ und $g_w(t) \neq 0$ für alle $w \in \mathcal{U}^{(z)}$ und für alle $t \in \mathcal{V}^{(z)}$. Da $\bigcup_{z \in S} \mathcal{U}^{(z)}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge S ist, existieren $z_1, \dots, z_k \in S$ mit $\bigcup_{\nu=1}^k \mathcal{U}^{(z_\nu)} = S$. Für alle $z \in S$ und $t \in \bigcap_{\nu=1}^k \mathcal{V}^{(z_\nu)}$ gilt dann $g_z(t) \neq 0$.

Sei $\epsilon > 0$ so klein gewählt, dass $\mathcal{U}_\epsilon(a) \subset \bigcap_{\nu=1}^k \mathcal{V}^{(z_\nu)}$, dann gilt

$$p_z(t) = (t-a) g_z(t)$$

und

$$g_z(t) \neq 0$$

auf $\mathcal{U}_\epsilon(a) \times S$. Damit folgt

$$p_z(t) \neq 0$$

für alle $t \in \mathcal{U}_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ und für alle $z \in S$. □

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Lemma 3.2. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$, und $S \subset \mathbb{C}$ sei eine nichtleere kompakte Menge. Die Funktion*

$$p : G \times S \rightarrow \mathbb{C}$$

sei stetig und für alle $z \in S$ sei $p_z := p(\cdot, z)$ holomorph auf G . Ferner gelte $p_z(a) = 0$ und $p'_z(a) := \frac{d}{dt} p_z(t) |_{t=a} \neq 0$ für alle $z \in S$.

Dann existiert ein $\delta > 0$ und zu jedem $z \in S$ existiert eine offene zusammenhängende Umgebung $B_z \subset G$ des Punktes a , sodass die Abbildungen

$$p_z : B_z \rightarrow \mathcal{U}_\delta(0)$$

für jedes $z \in S$ konform sind.

Ferner sind die Abbildungen

$$q : \mathcal{U}_\delta(0) \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad q(u, z) := p_z^{-1}(u)$$

und

$$q' : \mathcal{U}_\delta(0) \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad q'(u, z) := \frac{d}{du} q(u, z)$$

stetig. Darüber hinaus existiert ein $\epsilon > 0$, sodass gilt

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) \subset \bigcap_{z \in S} B_z$$

und der Punkt 0 ist ein innerer Punkt der Menge

$$\bigcap_{z \in S} p_z(\mathcal{U}_\epsilon(a)).$$

Beweis.

i) Wir begründen zunächst, dass die Abbildung

$$p' : G \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad p'(t, z) := p'_z(t) := \frac{d}{dt} p_z(t)$$

stetig ist. Dazu sei $t_0 \in G$ beliebig und $\delta_1 > 0$ so gewählt, dass $\overline{\mathcal{U}_{\delta_1}(t_0)} \subset G$. Dann folgt unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel für $z \in S$ und $t \in \mathcal{U}_{\delta_1}(t_0)$

$$p'_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}_{\delta_1}(t_0)} \frac{p_z(\zeta)}{(\zeta - t)^2} d\zeta,$$

woraus sich die Stetigkeit mithilfe eines Standardsatzes über Stetigkeit von Parameterintegralen ergibt.

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

ii) Es sei $\epsilon_1 > 0$ so gewählt, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\alpha)$ $p_z(t) \neq 0$ für alle $t \in \overline{\mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)} \setminus \{a\}$ und für alle $z \in S$ (nach Lemma 3.1 möglich).
- $\beta)$ $p'_z(t) \neq 0$ für alle $t \in \overline{\mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)}$ und für alle $z \in S$ (nach Teil i) möglich, wobei die Begründung analog zur entsprechenden Begründung für $g_z(t)$ im Beweis zu Lemma 3.1 verläuft).

Ferner sei

$$\delta := \min_{\substack{|t-a|=\epsilon_1 \\ z \in S}} |p_z(t)|.$$

Für $z \in S$ und $w \in \mathcal{U}_\delta(0)$ gilt dann

$$|p_z(t)| \geq \delta > |w|$$

auf dem Kreis $|t-a| = \epsilon_1$. Aus dem Satz von Rouché folgt, dass für alle $z \in S$ und für alle $w \in \mathcal{U}_\delta(0)$ die Abbildungen $p_z(t)$ und $p_z(t) - w$ gleich viele Nullstellen in $\mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)$ besitzen, nach Bedingung α) also genau eine. Damit gilt für jedes $z \in S$:

Jedes $w \in \mathcal{U}_\delta(0)$ besitzt genau ein Urbild $t \in \mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)$ unter der Abbildung p_z .

Für $z \in S$ setzen wir

$$B_z := p_z^{-1}(\mathcal{U}_\delta(0)) \cap \mathcal{U}_{\epsilon_1}(a),$$

dann ist für jedes $z \in S$ die Abbildung

$$p_z : B_z \rightarrow \mathcal{U}_\delta(0)$$

bijektiv und holomorph, also konform (siehe etwa [4], S. 223), und für jedes $z \in S$ ist B_z ein Gebiet, welches den Punkt a enthält.

iii) Wir zeigen die Stetigkeit der Abbildung q auf $\mathcal{U}_\delta(0) \times S$. Sei dazu $(u_0, z_0) \in \mathcal{U}_\delta(0) \times S$ beliebig gewählt.

Annahme: Die Abbildung q ist nicht stetig im Punkt (u_0, z_0) .

Dann gibt es eine Folge $(u_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{U}_\delta(0) \times S$ mit den Eigenschaften

$$(u_n, z_n) \rightarrow (u_0, z_0)$$

und

$$q(u_n, z_n) \not\rightarrow q(u_0, z_0),$$

für $n \rightarrow \infty$.

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Aus $q(u_n, z_n) \in \mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(q(u_{n_k}, z_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, für deren Grenzwert x gilt

$$x \in \overline{\mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)} \setminus \{q(u_0, z_0)\}.$$

Ferner gilt unter Verwendung der Stetigkeit der Abbildung p

$$p_{z_0}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{z_{n_k}}(q(u_{n_k}, z_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = u_0.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$|p_{z_0}(t)| \geq \delta$$

für alle $t \in \partial \mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)$ muss der Grenzwert x im Inneren der Menge $\overline{\mathcal{U}_{\epsilon_1}(a)}$ liegen.

Aus der eindeutigen Bestimmtheit des Urbildes von u_0 unter der Abbildung p_{z_0} folgt

$$x = q(u_0, z_0),$$

was ein Widerspruch ist.

Die Stetigkeit der Funktion q' folgt daraus mit der gleichen Argumentation wie in Teil *i*).

iv) Es gilt

$$a \in M_1 := \bigcap_{z \in S} B_z = \bigcap_{z \in S} q_z(\mathcal{U}_\delta(0)).$$

Um die Existenz eines $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft $\mathcal{U}_\epsilon(a) \subset M_1$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass a ein innerer Punkt der Menge

$$M_2 := \bigcap_{z \in S} q_z(\mathcal{U}_{\delta/2}(0))$$

ist.

Annahme: Der Punkt a ist kein innerer Punkt von M_2 .

Dann gibt es eine Folge (t_n) aus G mit $t_n \notin M_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $z_n \in S$ mit $t_n \notin q_{z_n}(\mathcal{U}_{\delta/2}(0))$. Da für alle $z \in S$ die Eigenschaft $a \in q_z(\mathcal{U}_{\delta/2}(0))$ gilt, schneidet die gerade Verbindungslinie von t_n nach a den Rand von $q_{z_n}(\mathcal{U}_{\delta/2}(0))$ in einem Punkt \tilde{t}_n . Notwendigerweise gilt dann auch $\tilde{t}_n \rightarrow a$, für $n \rightarrow \infty$. Ferner gibt es zu jedem \tilde{t}_n ein $u_n \in \partial \mathcal{U}_{\delta/2}(0)$ mit $q_{z_n}(u_n) = \tilde{t}_n$. Aufgrund der Kompaktheit von $\partial \mathcal{U}_{\delta/2}(0) \times S$ besitzt die Folge

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

(u_n, z_n) eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}, z_{n_k}) mit Grenzwert $(u_0, z_0) \in \partial\mathcal{U}_{\delta/2}(0) \times S$. Aus der Stetigkeit von q folgt dann

$$q_{z_0}(u_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} q_{z_{n_k}}(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{t}_{n_k} = a,$$

was aufgrund von $q_{z_0}(0) = a$ im Widerspruch zur Konformität von q_{z_0} auf $\mathcal{U}_\delta(0)$ steht. Damit ist a innerer Punkt von $M_2 \subset M_1$.

Die Aussage, dass der Punkt 0 ein innerer Punkt von $\bigcap_{z \in S} p_z(\mathcal{U}_\epsilon(a))$ ist, folgt durch eine analoge Argumentation. □

Kommen wir jetzt zum Hauptziel dieses Kapitels: Eine Version der komplexen Laplace-Methode, welche kompakte asymptotische Entwicklungen liefert. Die Grundlage ist eine Modifikation der klassischen Laplace-Methode, wie sie in [13], S. 121 ff., dargestellt wird.

Als Integrationswege betrachten wir ohne Einschränkung stückweise glatte (nicht geschlossene) Jordankurven, wobei die Ableitung einer Parametrisierung auf einem offenen „Glattheitsintervall“ eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss dieses Intervalls zulasse und dort nirgends verschwinde. Für eine solche Kurve \mathcal{P} mit Anfangspunkt a und Endpunkt b , sowie für Teilkurven, verwenden wir folgende Notation:

$(a, b)_{\mathcal{P}}$ bezeichne die Spur der Kurve \mathcal{P} ohne Anfangs- und Endpunkt,

$[a, b]_{\mathcal{P}}$ bezeichne die Spur der Kurve \mathcal{P} mit Anfangs- und Endpunkt,

$[a, b)_{\mathcal{P}}$ und $(a, b]_{\mathcal{P}}$ seien entsprechend erklärt.

Satz 3.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $S \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge. Für die stückweise glatte Jordankurve \mathcal{P} mit Anfangspunkt a und nicht notwendigerweise endlichem Endpunkt b gelte $[a, b)_{\mathcal{P}} \subset G$. Die Funktionen*

$$p, q : G \times S \rightarrow \mathbb{C}$$

seien stetig und $p_z := p(\cdot, z)$ und $q_z := q(\cdot, z)$ seien holomorph auf G für alle $z \in S$. Im Anfangspunkt a seien die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen p_z und q_z für $z \in S$ gegeben durch

$$p_z(t) = p_z(a) + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z) (t-a)^{\mu+\nu}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad z \in S, \quad b_0(z) \neq 0 \text{ auf } S,$$

$$q_z(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(z) (t-a)^{\nu+\lambda-1}, \quad \lambda \in \mathbb{N}, \quad z \in S, \quad c_0(z) \neq 0 \text{ auf } S.$$

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Für alle Punkte $t \in (a, b)_{\mathcal{P}}$ gelte die Realteilbedingung

$$\inf_{z \in S} \Re(p_z(t) - p_z(a)) > 0,$$

und es existiere eine positive untere Schranke für diesen Ausdruck für $t \rightarrow b$ auf \mathcal{P} .

Ferner gebe es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die parameterabhängigen komplexen Kurvenintegrale

$$I(n, z) := \int_{\mathcal{P}} e^{-n p_z(t)} q_z(t) dt$$

für $n \geq N$ und $z \in S$ absolut konvergieren, und der Ausdruck

$$\int_{\mathcal{P}} e^{-N \Re(p_z(t))} |q_z(t)| |dt|$$

sei als Funktion der Veränderlichen z auf S beschränkt.

Dann besitzt $I(n, z)$ eine vollständige asymptotische Entwicklung der Form

$$I(n, z) = \int_{\mathcal{P}} e^{-n p_z(t)} q_z(t) dt \approx e^{-n p_z(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\nu + \lambda}{\mu}\right) \frac{a_{\nu}(z)}{n^{(\nu + \lambda)/\mu}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Diese Entwicklung gilt gleichmäßig bezüglich $z \in S$ und die ersten Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_0(z) = \frac{c_0(z)}{\mu(b_0(z))^{\lambda/\mu}}, \quad a_1(z) = \left(\frac{c_1(z)}{\mu} - \frac{(\lambda + 1)b_1(z)c_0(z)}{\mu^2 b_0(z)} \right) \frac{1}{(b_0(z))^{(\lambda+1)/\mu}}.$$

(Zur Definition des Zweigs der Potenzen mit Basis $b_0(z)$ siehe den ersten Teil des Beweises.)

Beweis.

i) Es sei

$$\omega := \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \in \mathcal{P}}} \arg(t - a)$$

fest, aber nicht notwendigerweise aus dem Intervall $(-\pi, \pi]$ gewählt. Aus der Reihenentwicklung für p_z folgt

$$p_z(t) - p_z(a) = b_0(z) (t - a)^{\mu} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}(z)}{b_0(z)} (t - a)^{\nu} \right).$$

Aufgrund der vorausgesetzten Realteilbedingung gibt es demnach zu jedem $z \in S$ ein eindeutig bestimmtes $\omega_0(z) := \arg b_0(z)$, sodass gilt

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

$$|\omega_0(z) + \mu\omega| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Stetigkeit der Funktion p folgt die Stetigkeit der Funktionen b_0 und ω_0 auf der Menge S .

Im Folgenden seien alle Potenzen von $b_0(z)$ mit diesem Argument gebildet, etwa:

$$(b_0(z))^{1/\mu} := \exp((\log |b_0(z)| + i\omega_0(z))/\mu).$$

Diese Potenzen stellen stetige Funktionen der Veränderlichen z auf S dar.

ii) Es sei

$$v_z(t) := p_z(t) - p_z(a)$$

für $z \in S$ und $t \in G$. Wir wählen im Folgenden $\arg(v_z(t))$ derart, dass gilt

$$\arg(v_z(t)) \rightarrow \omega_0(z) + \mu\omega, \quad t \rightarrow a, \quad t \in (a, b)_{\mathcal{P}},$$

und auf \mathcal{P} sei $\arg(v_z(t))$ durch stetige Fortsetzung erklärt (beachte, dass $v_z(t) \neq 0$ für alle $z \in S$ und $t \in (a, b)_{\mathcal{P}}$). Aufgrund der vorausgesetzten Realteilbedingung gilt dann für alle $t \in (a, b)_{\mathcal{P}}$

$$\sup_{z \in S} |\arg(v_z(t))| < \frac{\pi}{2}.$$

Mit diesem Zweig des Arguments seien im Folgenden alle Potenzen mit Basis $v_z(t)$ für $t \in (a, b)_{\mathcal{P}}$ gebildet.

Aus der Stetigkeit von p auf $G \times S$ folgt etwa unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel die Stetigkeit der Funktion

$$\frac{p_z(t) - p_z(a)}{(t - a)^\mu}$$

auf $G \times S$, woraus sich sofort die Stetigkeit der Funktion

$$g_z(t) := g(t, z) := \frac{1}{b_0(z)} \frac{p_z(t) - p_z(a)}{(t - a)^\mu} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu(z)}{b_0(z)} (t - a)^\nu$$

auf $G \times S$ ergibt.

Aufgrund von $g_z(a) = 0$ für alle $z \in S$ gibt es ein $\rho > 0$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{\substack{z \in S \\ t \in \mathcal{U}_\rho(a)}} |g_z(t)| < \frac{1}{2}.$$

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

Es sei

$$w(t, z) := (b_0(z))^{1/\mu} (t - a) (1 + g_z(t))^{1/\mu}, \quad t \in \mathcal{U}_\rho(a), \quad z \in S,$$

wobei der Ausdruck $(1 + g_z(t))^{1/\mu}$ als der Wert des Hauptzweigs der komplexen Potenz $x^{1/\mu}$ auf \mathbb{C}_- an der Stelle $x = 1 + g_z(t)$ zu verstehen ist.

Dann ist

$$w : \mathcal{U}_\rho(a) \times S \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig und für jedes $z \in S$ ist $w_z := w(\cdot, z)$ holomorph auf $\mathcal{U}_\rho(a)$. Ferner ist

$$w_z(a) = 0, \quad \frac{d}{dt} w_z(t) \Big|_{t=a} = (b_0(z))^{1/\mu} \neq 0$$

auf S , und es gilt

$$(w_z(t))^\mu = v_z(t)$$

für $t \in \mathcal{U}_\rho(a)$ und $z \in S$.

Die Anwendung von Lemma 3.2 auf die Funktion w ergibt:

Es existiert ein $\delta > 0$ und es existieren offene zusammenhängende Umgebungen $B_z \subset \mathcal{U}_\rho(a)$ des Punktes a , sodass die Funktionen

$$w_z : B_z \rightarrow \mathcal{U}_\delta(0)$$

für alle $z \in S$ konform sind. Ferner gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) \subset \bigcap_{z \in S} B_z,$$

und die Funktionen

$$\begin{aligned} h : \mathcal{U}_\delta(0) \times S &\rightarrow \mathbb{C}, & h_z(u) &:= h(u, z) = w_z^{-1}(u), \\ h' : \mathcal{U}_\delta(0) \times S &\rightarrow \mathbb{C}, & h'_z(u) &:= \frac{d}{du} h(u, z) \end{aligned}$$

sind stetig.

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

iii) Es sei $k \in (a, b)_{\mathcal{P}}$ so gewählt, dass $[a, k]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{U}_\epsilon(a)$ gilt. Dann ist für alle $z \in S$

$$\mathcal{U}_{|w_z(k)|}(0) \subset \mathcal{U}_\delta(0),$$

und aus $w_z(k) \neq 0$ auf S folgt

$$\min_{z \in S} |w_z(k)| > 0.$$

Für jedes $z \in S$ kann der Abschnitt $[a, k]_{\mathcal{P}}$ so deformiert werden, dass das Bild dieses Abschnitts $w_z([a, k]_{\mathcal{P}})$ eine gerade Strecke zwischen den Punkten 0 und $w_z(k)$ ergibt. Unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes folgt

$$\int_{[a, k]_{\mathcal{P}}} e^{-n p_z(t)} q_z(t) dt \stackrel{t=h_z(s)}{=} e^{-n p_z(a)} \int_0^{w_z(k)} e^{-n s^\mu} q_z(h_z(s)) h'_z(s) ds,$$

wobei der Integrationsweg des letzten Integrals eine gerade Strecke ist. Die Funktion

$$f : \mathcal{U}_\delta(0) \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_z(s) := f(s, z) := q_z(h_z(s)) h'_z(s)$$

ist stetig und für $z \in S$ ist f_z auf $\mathcal{U}_\delta(0)$ holomorph. Damit besitzt f_z eine Darstellung der Form (für den Wert von λ siehe die Voraussetzungen)

$$f_z(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(z) s^{\nu+\lambda-1}, \quad s \in \mathcal{U}_\delta(0), \quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{[a, k]_{\mathcal{P}}} e^{-n p_z(t)} q_z(t) dt &= e^{-n p_z(a)} \int_0^{w_z(k)} e^{-n s^\mu} f_z(s) ds \\ &\stackrel{s=u^{1/\mu}}{=} e^{-n p_z(a)} \int_0^{v_z(k)} e^{-n u} f_z(u^{1/\mu}) \frac{1}{\mu} u^{1/\mu-1} du, \end{aligned}$$

wobei der Integrationsweg des letzten Integrals wieder eine gerade Strecke ist und die komplexe Potenz $u^{1/\mu}$ als Hauptzweig auf \mathbb{C}_- erklärt ist. Sei $\tilde{\delta} := \delta^\mu$, dann besitzt die Funktion

$$\tilde{f} : (\mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(0) \cap \{u \in \mathbb{C} \mid \Re(u) > 0\}) \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}_z(u) := \tilde{f}(u, z) := \frac{1}{\mu} f_z(u^{1/\mu}) u^{1/\mu-1}$$

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

eine Entwicklung der Form

$$\tilde{f}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z) u^{(\nu+\lambda-\mu)/\mu},$$

wobei sich die Koeffizienten $a_{\nu}(z)$ aus den Koeffizienten $b_{\nu}(z)$ und $c_{\nu}(z)$ ergeben. Die ersten davon sind gegeben durch

$$a_0(z) = \frac{c_0(z)}{\mu(b_0(z))^{\lambda/\mu}}, \quad a_1(z) = \left(\frac{c_1(z)}{\mu} - \frac{(\lambda+1)b_1(z)c_0(z)}{\mu^2 b_0(z)} \right) \frac{1}{(b_0(z))^{(\lambda+1)/\mu}}.$$

(Zur Berechnung der Koeffizienten siehe auch [13], S. 123.)

Ferner sind die Koeffizienten $a_{\nu}(z)$ mit denen von f durch die Beziehung

$$d_{\nu}(z) = \mu a_{\nu}(z)$$

verknüpft.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$F_m(s, z) := \sum_{\nu=m}^{\infty} d_{\nu}(z) s^{\nu-m}, \quad s \in \mathcal{U}_{\delta}(0), \quad z \in S.$$

Dann gilt für $s \neq 0$

$$F_m(s, z) = s^{-m-\lambda+1} \left(f_z(s) - \sum_{\nu=0}^{m-1} d_{\nu}(z) s^{\nu+\lambda-1} \right),$$

und für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $z \in S$ ist $F_m(\cdot, z)$ holomorph als Funktion der Veränderlichen s auf $\mathcal{U}_{\delta}(0)$. Für festes $m \in \mathbb{N}_0$ überträgt sich (etwa unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel) die Stetigkeit von f auf der Menge $\mathcal{U}_{\delta}(0) \times S$ auf die Funktion F_m , sodass gilt:

Die Funktion F_m ist für festes $m \in \mathbb{N}_0$ stetig auf $\mathcal{U}_{\delta}(0) \times S$, und damit ist sie auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathcal{U}_{\delta}(0) \times S$ beschränkt.

Es sei ferner für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\tilde{F}_m(u, z) := \sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}(z) u^{(\nu-m)/\mu}, \quad z \in S, \quad u \in \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(0) \cap \{u \in \mathbb{C} \mid \Re(u) \geq 0\},$$

dann gilt $\tilde{F}_m(u, z) = \frac{1}{\mu} F_m(u^{1/\mu}, z)$. Demnach ist die Funktion \tilde{F}_m für jedes feste $m \in \mathbb{N}_0$ auf jeder kompakten Teilmenge von $(\mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(0) \cap \{u \in \mathbb{C} \mid \Re(u) \geq 0\}) \times S$ beschränkt. Ferner gilt

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

$$\tilde{f}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(z) u^{(\nu+\lambda-\mu)/\mu} + u^{(m+\lambda-\mu)/\mu} \tilde{F}_m(u, z)$$

für $z \in S$ und $u \in \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(0) \cap \{u \in \mathbb{C} \mid \Re(u) > 0\}$. Damit folgt für $m \in \mathbb{N}_0$ und $z \in S$

$$\int_0^{v_z(k)} e^{-nu} \tilde{f}_z(u) du = \sum_{\nu=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_\nu(z)}{n^{(\nu+\lambda)/\mu}} - \epsilon_{m,1}(n, z) + \epsilon_{m,2}(n, z),$$

wobei unter Verwendung der unvollständigen Gammafunktion (zu deren Definition siehe etwa [13], S. 45) gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{m,1}(n, z) &:= \sum_{\nu=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{\mu}, v_z(k)n\right) \frac{a_\nu(z)}{n^{(\nu+\lambda)/\mu}}, \\ \epsilon_{m,2}(n, z) &:= \int_0^{v_z(k)} e^{-nu} u^{(m+\lambda-\mu)/\mu} \tilde{F}_m(u, z) du. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\sup_{z \in S} |\arg(v_z(k))| < \frac{\pi}{2}$ folgt mittels der Asymptotik der unvollständigen Gammafunktion (siehe [13], S. 110)

$$\epsilon_{m,1}(n, z) = \mathcal{O}\left(e^{-nv_z(k)}/n\right) = \mathcal{O}\left(e^{-n\eta}/n\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig bezüglich $z \in S$ für ein η mit der Eigenschaft $0 < \eta \leq \Re(v_z(k))$ auf S .

Ferner gilt

$$\begin{aligned} |\epsilon_{m,2}(n, z)| &\stackrel{u=v_z(k)\tau}{=} \left| \int_0^1 e^{-nv_z(k)\tau} (v_z(k)\tau)^{(m+\lambda-\mu)/\mu} \tilde{F}_m(v_z(k)\tau, z) v_z(k) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{-n\Re(v_z(k))\tau} \tau^{(m+\lambda-\mu)/\mu} \left| (v_z(k))^{(m+\lambda)/\mu} \tilde{F}_m(v_z(k)\tau, z) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung

$$\left| (v_z(k))^{(m+\lambda)/\mu} \tilde{F}_m(v_z(k)\tau, z) \right| \leq K$$

für eine geeignete von z unabhängige Konstante $K > 0$ folgt

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

$$\begin{aligned}
 |\epsilon_{m,2}(n, z)| &\leq K \int_0^1 e^{-n\eta\tau} \tau^{(m+\lambda-\mu)/\mu} d\tau \\
 &\stackrel{\tau=s/n\eta}{=} K \int_0^{n\eta} e^{-s} s^{(m+\lambda-\mu)/\mu} (n\eta)^{-(m+\lambda)/\mu} ds \\
 &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{(m+\lambda)/\mu}}\right), \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

gleichmäßig bezüglich $z \in S$. Insgesamt folgt daraus

$$\int_{[a,k]_{\mathcal{P}}} e^{-np_z(t)} q_z(t) dt = e^{-np_z(a)} \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_{\nu}(z)}{n^{(\nu+\lambda)/\mu}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{(m+\lambda)/\mu}}\right) \right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in S$.

iv) Nach Voraussetzung gibt es ein $\kappa > 0$ mit der Eigenschaft

$$\Re(p_z(t) - p_z(a)) \geq \kappa > 0$$

für alle $z \in S$ und für alle $t \in [k, b]_{\mathcal{P}}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left| \int_{[k,b]_{\mathcal{P}}} e^{-np_z(t)} q_z(t) dt \right| \leq \left| e^{-np_z(a)} \right| e^{(N-n)\kappa} e^{N\Re(p_z(a))} \int_{[k,b]_{\mathcal{P}}} e^{-N\Re(p_z(t))} |q_z(t)| |dt|.$$

Aus den Voraussetzungen ergibt sich, dass der Ausdruck

$$\int_{[k,b]_{\mathcal{P}}} e^{-N\Re(p_z(t))} |q_z(t)| |dt|$$

als Funktion der Veränderlichen z auf S beschränkt ist. Es folgt für eine geeignete Konstante \tilde{K}

$$\left| \int_{[k,b]_{\mathcal{P}}} e^{-np_z(t)} q_z(t) dt \right| \leq \tilde{K} \left| e^{-np_z(a)} \right| e^{-n\kappa},$$

woraus schließlich folgt

3 Eine komplexe Laplace-Methode für gleichmäßige Asymptotiken

$$\int_{[k,b]_{\mathcal{P}}} e^{-np_z(t)} q_z(t) dt = e^{-np_z(t)} \mathcal{O}(e^{-n\kappa}), \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig bezüglich $z \in S$. Insgesamt ergibt sich daraus die Behauptung.

□

Abschließend sei erwähnt, dass auch die *komplexe Sattelpunktmethode* (so wie sie etwa in [13], S. 125, dargestellt ist), welche sich als eine Anwendung der komplexen Laplace-Methode auffassen lässt, durch Satz 3.1 eine „gleichmäßige Modifikation“ erfährt. Wir verzichten an dieser Stelle jedoch auf die Formulierung einer „gleichmäßigen Version“ dieser Methode, da wir im Folgenden lediglich von dem Ergebnis in Satz 3.1 Gebrauch machen werden.

4 Starke Asymptotiken

Das vierte Kapitel handelt von starken Asymptotiken für geeignet skalierte verallgemeinerte assoziierte Ménage-Polynome

$${}_3F_1\left(-n, n, \alpha \mid \frac{z}{2n}\right)$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{N}$.

Aus Symmetriegründen genügt es, die Betrachtungen auf die abgeschlossene obere Halbebene

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$$

zu beschränken. Die Untersuchung auf der unteren Halbebene verläuft gänzlich analog.

Im Folgenden sei stets

$$[i, -i] := \{i - 2it \mid t \in [0, 1]\},$$

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

und

$$\overline{\mathbb{D}}^c := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus [i, -i] & \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c \\ z & \mapsto z + \sqrt{z^2 + 1} \end{cases}$$

sei definiert als die Umkehrfunktion der Abbildung

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{D}}^c & \rightarrow \mathbb{C} \setminus [i, -i] \\ w & \mapsto \frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right), \end{cases}$$

welche das Äußere des Einheitskreises konform auf das Gebiet $\mathbb{C} \setminus [i, -i]$ abbildet derart, dass der unendlich ferne Punkt in sich übergeht.

4 Starke Asymptotiken

Ferner setzen wir für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg(w) \in [0, 2\pi),$$

und für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ sei im Folgenden stets

$$a(z) := \arg(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Durch obige Festlegung ist auch die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus [i, -i] & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \sqrt{z^2 + 1} \end{cases}$$

eindeutig definiert und holomorph.

Zunächst leiten wir eine Integraldarstellung für die skalierten verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome her, wobei stets $\alpha \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt sei.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ seien die Wege $J_1(z)$, $J_2(z)$ definiert durch:

$$\begin{aligned} J_1(z) : w_1(t) &:= i\pi + it(a(z) - \pi), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ J_2(z) : w_2(t) &:= t + ia(z), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Lemma 4.1. *Für $n \in \mathbb{N}$ und für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ mit $\arg(z) \in [0, \pi]$ gilt*

$$\begin{aligned} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ \frac{1}{2} & & 2n \end{matrix} \middle| \frac{z}{2n} \right) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z} \right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \\ &\quad \times \int_{K(z)} e^{-n \frac{\cosh(w)}{z}} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \cosh(nw) \sinh(w) dw, \end{aligned}$$

mit $K(z) := J_1(z) + J_2(z)$, wobei die Addition der Wege so erklärt ist, dass $K(z)$ entsteht, indem zunächst der Weg $J_1(z)$ und anschließend der Weg $J_2(z)$ durchlaufen wird.

Beweis. Unter Anwendung des Satzes 2.3 gilt die Rechnung

4 Starke Asymptotiken

$$\begin{aligned}
 {}_3F_1\left(-n, \frac{n}{2}, \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_n\left(1 - \frac{zt}{n}\right) dt \\
 &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_n\left(\frac{zt}{n} - 1\right) dt \\
 &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \int_{K_1(z)} e^{-\frac{ny}{z}} (y+1)^{\alpha-1} T_n(y) dy,
 \end{aligned}$$

wobei der Weg $K_1(z)$ gegeben ist durch

$$K_1(z) : y_1(t) := \frac{zt}{n} - 1, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Aufgrund der Invarianz des Kurvenintegrals gegenüber orientierungserhaltenden Umparametrisierungen kann der Integrationsweg $K_1(z)$ durch den Integrationsweg $K_2(z)$ ersetzt werden, wobei dieser gegeben ist durch

$$K_2(z) : y_2(t) := zt - 1, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Daraus folgt

$${}_3F_1\left(-n, \frac{n}{2}, \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \int_{K_2(z)} e^{-\frac{ny}{z}} (y+1)^{\alpha-1} T_n(y) dy.$$

Im Folgenden sei die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus [-1, 1] & \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c \\ y & \mapsto y + \sqrt{y^2 - 1} \end{cases}$$

definiert als die Umkehrfunktion der Abbildung

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{D}}^c & \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \\ t & \mapsto \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right), \end{cases}$$

welche das Äußere des Einheitskreises konform auf das Gebiet $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ abbildet.

Für $y \in \mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$ erklären wir

$$\operatorname{arcosh}(y) := \log(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

wobei der Zweig des Logarithmus festgelegt ist durch die Forderung

$$\Im(\log(y + \sqrt{y^2 - 1})) \in (0, 2\pi).$$

4 Starke Asymptotiken

Auf dem Schnitt $[-1, \infty)$ seien die Werte der Abbildung arcosh derart erklärt, dass das Intervall $[-1, 1]$ auf die Strecke mit Anfangspunkt $i\pi$ und Endpunkt 0 , und das Intervall $(1, \infty)$ auf $(0, \infty)$ abgebildet wird (unter Beachtung der „natürlichen“ Orientierung). Durch diese Festlegung ist die Funktion arcosh auf ganz \mathbb{C} eindeutig definiert und holomorph auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$.

Der Weg $K_3(z)$ sei gegeben durch (siehe auch Abbildung 4.1)

$$K_3(z) : w_3(t) := \operatorname{arcosh}(zt - 1), \quad 0 \leq t < \infty.$$

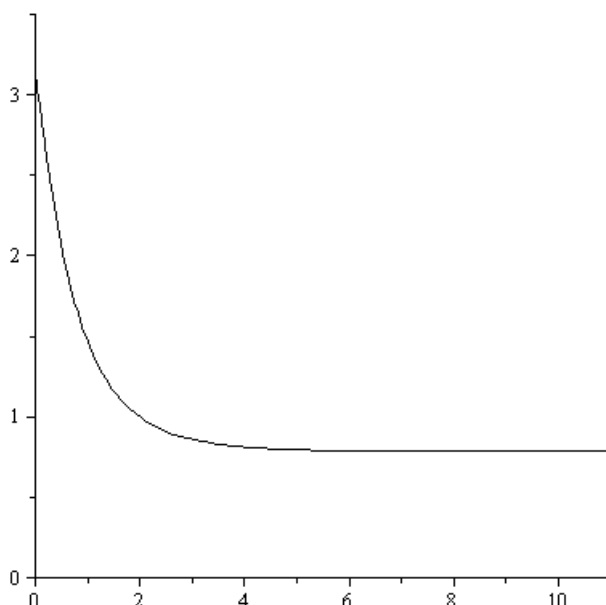


Abbildung 4.1: Der Anfangsabschnitt der Kurve $K_3(z)$ für den Spezialfall $z = 1 + i$.

Mittels der Substitution $y = \cosh(w)$ und der Identität $T_n(\cosh(w)) = \cosh(nw)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \int_{K_2(z)} e^{-\frac{ny}{z}} (y+1)^{\alpha-1} T_n(y) dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \int_{K_3(z)} e^{-n\frac{\cosh(w)}{z}} (\cosh(w)+1)^{\alpha-1} \cosh(nw) \sinh(w) dw. \end{aligned}$$

Durch eine Standardargumentation mittels des Cauchyschen Integralsatzes wollen wir im Folgenden zeigen, dass der Integrationsweg $K_3(z)$ des letzten Integrals durch den in der Behauptung definierten Weg $K(z)$ ersetzt werden kann.

4 Starke Asymptotiken

In den Fällen $\arg(z) = 0$ und $\arg(z) = \pi$ ist dafür nichts zu zeigen, da in diesen Fällen die Spuren und der Durchlaufsinne der Kurven $K_3(z)$ und $K(z)$ übereinstimmen.

Für $t > 0$ seien die Wege A_t , B_t und L_t definiert durch

$$\begin{aligned} A_t &: \gamma_1(s) := \operatorname{arcosh}(zs - 1), \quad 0 \leq s \leq t, \\ B_t &: J_1(z) + \tilde{B}_t, \end{aligned}$$

wobei der Weg \tilde{B}_t gegeben ist durch

$$\tilde{B}_t : \gamma_2(s) := s + ia(z), \quad 0 \leq s \leq \Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1)),$$

und L_t bezeichne die Strecke mit Anfangspunkt $\Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1)) + ia(z)$ und Endpunkt $\operatorname{arcosh}(zt - 1)$. Setzen wir abkürzend

$$h(w) := e^{-n \frac{\cosh(w)}{z}} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \cosh(nw) \sinh(w),$$

so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für $t > 0$

$$\int_{\tilde{B}_t} h(w)dw + \int_{L_t} h(w)dw - \int_{A_t} h(w)dw = 0.$$

Ferner gilt

$$\int_{\tilde{B}_t} h(w)dw \rightarrow \int_{K(z)} h(w)dw, \quad t \rightarrow \infty,$$

und

$$\int_{A_t} h(w)dw \rightarrow \int_{K_3(z)} h(w)dw, \quad t \rightarrow \infty.$$

Demnach genügt es zu zeigen, dass gilt

$$\left| \int_{L_t} h(w)dw \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Aufgrund der bezüglich $t > 0$ gleichmäßigen Beschränktheit der Länge des Weges L_t (etwa durch die Konstante 2π) reicht es dafür schon, Folgendes zu zeigen:

$$\max_{\zeta \in L_t} |h(\zeta)| = \max_{\zeta \in L_t} \left| e^{-n \frac{\cosh(\zeta)}{z}} (\cosh(\zeta) + 1)^{\alpha-1} \cosh(n\zeta) \sinh(\zeta) \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

4 Starke Asymptotiken

α) Es sei zunächst $\arg(z) \in (0, \frac{\pi}{2})$, dann ist (unter Beachtung der Definition von $a(z)$)

$$0 < a(z) < \arg(z) < \frac{\pi}{2},$$

und etwa durch Differentiation ergibt sich, dass der Ausdruck $\Im(\operatorname{arcosh}(zt - 1))$ als Funktion der Veränderlichen $t \in [0, \infty)$ streng monoton gegen den Wert $\arg(z)$ fällt. Sei $t_0 > 0$ so groß gewählt, dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$\Im(\operatorname{arcosh}(zt - 1)) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

dann folgt für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in L_t} |h(\zeta)| &= \max_{\zeta \in L_t} \left| e^{-n \frac{\cosh(\zeta)}{z}} (\cosh(\zeta) + 1)^{\alpha-1} \cosh(n\zeta) \sinh(\zeta) \right| \\ &\leq \max_{\zeta \in L_t} \left\{ e^{-n \Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right)} (|\cosh(\zeta)| + 1)^{\alpha-1} |\cosh(n\zeta)| |\sinh(\zeta)| \right\} \\ &\leq 2^{\alpha-1} \max_{\zeta \in L_t} \left\{ e^{-n \Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right)} e^{(\alpha+n)\Re(\zeta)} \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt für $t \geq t_0$ und $\zeta \in L_t$

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right) &= \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cosh(\Re(\zeta)) \cos(\Im(\zeta)) - \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\zeta)) \\ &\geq -\Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\zeta)) \\ &\geq -\Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(a(z)), \end{aligned}$$

und unter Beachtung von $\Re(\zeta) = \Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))$ und $a(z) \in (0, \frac{\pi}{2})$ folgt

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in L_t} |h(\zeta)| &\leq 2^{\alpha-1} \exp\left(n \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))) \sin(a(z)) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + n)\Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für $t \rightarrow \infty$.

β) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ mit $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$, dann fällt der Ausdruck $\Im(\operatorname{arcosh}(zt - 1))$ als Funktion der Veränderlichen $t \in [0, \infty)$ streng monoton gegen den Wert $\frac{\pi}{2}$. Es sei $t_0 > 0$, dann gilt für $t \geq t_0$ und für $\zeta \in L_t$

4 Starke Asymptotiken

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right) &= \frac{1}{|z|} \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\zeta)) \\ &\geq \frac{1}{|z|} \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\operatorname{arcosh}(zt_0 - 1))),\end{aligned}$$

und unter Beachtung von $\Re(\zeta) = \Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))$ und $\sin(\Im(\operatorname{arcosh}(zt_0 - 1))) > 0$ folgt für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}\max_{\zeta \in L_t} |h(\zeta)| &\leq 2^{\alpha-1} \max_{\zeta \in L_t} \left\{ e^{-n\Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right)} e^{(\alpha+n)\Re(\zeta)} \right\} \\ &\leq 2^{\alpha-1} \exp\left(-n\frac{1}{|z|} \sinh(\Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))) \sin(\Im(\operatorname{arcosh}(zt_0 - 1)))\right. \\ &\quad \left.+ (\alpha + n)\Re(\operatorname{arcosh}(zt - 1))\right) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

für $t \rightarrow \infty$.

$\gamma)$ Es sei $\arg(z) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, dann ist

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z) < a(z) < \pi,$$

und $\Im(\operatorname{arcosh}(zt - 1))$ fällt als Funktion der Veränderlichen $t \in [0, \infty)$ streng monoton gegen den Wert $\arg(z)$. Sei $t_0 > 0$ so groß gewählt, dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$\Im(\operatorname{arcosh}(zt - 1)) < a(z).$$

Es ergibt sich für $t \geq t_0$ und für $\zeta \in L_t$

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right) &= \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cosh(\Re(\zeta)) \cos(\Im(\zeta)) - \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\zeta)) \\ &\geq -\Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(\Im(\zeta)) \\ &\geq -\Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\zeta)) \sin(a(z)),\end{aligned}$$

und damit folgt für $t \geq t_0$

4 Starke Asymptotiken

$$\begin{aligned}
\max_{\zeta \in L_t} |h(\zeta)| &\leq 2^{\alpha-1} \max_{\zeta \in L_t} \left\{ e^{-n\Re\left(\frac{\cosh(\zeta)}{z}\right)} e^{(\alpha+n)\Re(\zeta)} \right\} \\
&\leq 2^{\alpha-1} \exp\left(n\Im\left(\frac{1}{z}\right) \sinh(\Re(\operatorname{arcosh}(zt-1))) \sin(a(z))\right. \\
&\quad \left.+ (\alpha+n)\Re(\operatorname{arcosh}(zt-1))\right) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

für $t \rightarrow \infty$.

Insgesamt folgt daraus die Behauptung. □

Im Hinblick auf die Anwendbarkeit von Satz 3.1 unterziehen wir die Darstellung aus Lemma 4.1 zusätzlich einer leichten Modifikation.

Im Folgenden sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus [i, -i] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch

$$f(w, z, n) := e^{-n\left(\frac{\cosh(w)}{z} - w\right)} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \sinh(w).$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ seien die Wege $\check{J}_1(z)$, $\check{J}_2(z)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
\check{J}_1(z) : \check{w}_1(t) &:= -i\pi - it(a(z) - \pi), \quad 0 \leq t \leq 1, \\
\check{J}_2(z) : \check{w}_2(t) &:= -t - ia(z), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Lemma 4.2. Für $n \in \mathbb{N}$ und für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ mit $\arg(z) \in [0, \pi]$ gilt

$$\begin{aligned}
{}_3F_1\left(-n, \begin{matrix} n, \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{z}{2n}\right) &= \frac{(-1)^n}{2\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \left\{ \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw + \int_{J_2(z)} f(w, z, n) dw \right. \\
&\quad \left. + \int_{\check{J}_1(z)} f(w, z, n) dw + \int_{\check{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \right\}.
\end{aligned}$$

4 Starke Asymptotiken

Beweis. Nach Lemma 4.1 gilt

$$\begin{aligned}
 {}_3F_1\left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \\
 &\quad \times \int_{K(z)} e^{-n\frac{\cosh(w)}{z}} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \cosh(nw) \sinh(w) dw \\
 &= \frac{(-1)^n}{2\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha e^{-\frac{n}{z}} \left\{ \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw + \int_{J_2(z)} f(w, z, n) dw \right. \\
 &\quad + \int_{J_1(z)} e^{-n\left(\frac{\cosh(w)}{z} + w\right)} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \sinh(w) dw \\
 &\quad \left. + \int_{J_2(z)} e^{-n\left(\frac{\cosh(w)}{z} + w\right)} (\cosh(w) + 1)^{\alpha-1} \sinh(w) dw \right\}.
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution $w \mapsto -w$ in den letzten beiden Integralen ergibt sich sofort die Behauptung. □

Lemma 4.2 liefert eine Darstellung der in Frage stehenden Polynome als Summe gewisser Parameterintegrale. Um dem Hauptziel dieses Kapitels näher zu kommen, wollen wir nun schrittweise das Verhalten jedes dieser Summanden asymptotisch kontrollieren. Dafür wird sich die Anwendung von Satz 3.1 als wichtiges Hilfsmittel herausstellen.

Lemma 4.3. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \Im(z) \geq 0\},$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{J_2(z)} f(w, z, n) dw &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 + \sqrt{1 + z^2})^{\alpha-1} z \left(\frac{\sqrt{1 + z^2}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times (z + \sqrt{z^2 + 1})^n e^{-n\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),
 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

4 Starke Asymptotiken

Beweis. Für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ und $w \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\varphi_z(w) := \frac{\cosh(w)}{z} - w.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dw} \varphi_z(w) = \frac{\sinh(w)}{z} - 1,$$

woraus sich ergibt, dass die Funktion $\frac{d}{dw} \varphi_z(w)$ bei festem z genau eine einfache Nullstelle im Streifen

$$\{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) > 0, \Im(w) \in (0, 2\pi)\}$$

besitzt. Diese liegt an der Stelle $w = \operatorname{arsinh}(z)$, wobei wir für $z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i]$ definieren

$$\operatorname{arsinh}(z) := \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) := \log|z + \sqrt{z^2 + 1}| + i \arg(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Der Logarithmus im Ausdruck $\log|z + \sqrt{z^2 + 1}|$ ist als der natürliche reelle Logarithmus zu verstehen und der Ausdruck $\arg(z + \sqrt{z^2 + 1})$ wurde zu Anfang dieses Kapitels definiert.

Wir untersuchen das Verhalten der Funktion $\Re(\varphi_z(w))$ auf dem Weg $J_2(z)$. Es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \Re(\varphi_z(w_2(t))) &= \Re(\varphi_z(t + ia(z))) = \Re \left\{ \frac{\cosh(t + ia(z))}{z} \right\} - t \\ &= -t + \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)) \cosh(t) - \Im \left(\frac{1}{z} \right) \sin(a(z)) \sinh(t). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Re(\varphi_z(w_2(t))) &= -1 + \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)) \sinh(t) - \Im \left(\frac{1}{z} \right) \sin(a(z)) \cosh(t) \\ &= -1 + \Re \left\{ \frac{\sinh(t + ia(z))}{z} \right\}. \end{aligned}$$

Daran lässt sich erkennen, dass die Funktion $\frac{d}{dt} \Re(\varphi_z(w_2(t)))$ für festes z (aus der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \Im(z) \geq 0\}$ gewählt) auf dem Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wächst und an der Stelle $t = \Re(\operatorname{arsinh}(z))$ verschwindet.

Das bedeutet für die Funktion $\Re(\varphi_z(w_2(t)))$, dass sie auf dem Intervall $[0, \Re(\operatorname{arsinh}(z)))$ streng monoton fällt, an der Stelle $t = \Re(\operatorname{arsinh}(z))$ ein Minimum annimmt, und auf dem Intervall $(\Re(\operatorname{arsinh}(z)), \infty)$ streng monoton wächst.

4 Starke Asymptotiken

Demnach ist der Weg $J_2(z)$ für jedes z gerade so eingerichtet, dass er durch einen Sattelpunkt der Funktion $\varphi_z(w)$ führt, wobei die Funktion $\Re(\varphi_z(w))$ genau an dieser Stelle ein Minimum annimmt.

Durch Aufspalten des Weges $J_2(z)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_{J_2(z)} f(w, z, n) dw &= \int_0^{\Re(\operatorname{arsinh}(z))} f(t + ia(z), z, n) dt + \int_{\Re(\operatorname{arsinh}(z))}^{\infty} f(t + ia(z), z, n) dt \\
 &= \int_0^1 f((1-t)\Re(\operatorname{arsinh}(z)) + ia(z), z, n) \Re(\operatorname{arsinh}(z)) dt \\
 &\quad + \int_0^{\infty} f(t + \Re(\operatorname{arsinh}(z)) + ia(z), z, n) dt \\
 &=: I_1(n, z) + I_2(n, z).
 \end{aligned}$$

Die Anwendung von Satz 3.1 auf die Integrale $I_1(n, z)$ und $I_2(n, z)$ liefert jeweils eine bezüglich z auf der Menge K gleichmäßig gültige Asymptotik der folgenden Form ($\omega = 0$, $\mu = 2$ und $\lambda = 1$ dort)

$$\begin{aligned}
 I_1(n, z) &= e^{-n\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z} - \operatorname{arsinh}(z)\right)} \left(\sqrt{\pi} \frac{a_0(z)}{\sqrt{n}} - \frac{a_1(z)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right), \\
 I_2(n, z) &= e^{-n\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z} - \operatorname{arsinh}(z)\right)} \left(\sqrt{\pi} \frac{a_0(z)}{\sqrt{n}} + \frac{a_1(z)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right),
 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$.

Die Eigenschaft, dass die ersten Koeffizienten $a_0(z)$ übereinstimmen und sich die zweiten Koeffizienten $a_1(z)$ genau um das Vorzeichen unterscheiden, liegt an der Konstruktion des Integrationswegs $J_2(z)$ (siehe dazu auch [13], S. 125-127). Insgesamt ergibt sich für die Summe der Integrale die bezüglich z auf K gleichmäßig gültige Asymptotik

$$I_1(n, z) + I_2(n, z) = e^{-n\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z} - \operatorname{arsinh}(z)\right)} \left(2\sqrt{\pi} \frac{a_0(z)}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right),$$

für $n \rightarrow \infty$.

Für die Berechnung des Koeffizienten $a_0(z)$ betrachten wir das Integral $I_2(n, z)$. Es gilt die Darstellung

4 Starke Asymptotiken

$$\begin{aligned}
 I_2(n, z) &= \int_0^{\infty} e^{-n\left\{\frac{1}{z} \cosh(t+\operatorname{arsinh}(z))-t-\operatorname{arsinh}(z)\right\}} \\
 &\quad \times (\cosh(t+\operatorname{arsinh}(z))+1)^{\alpha-1} \sinh(t+\operatorname{arsinh}(z)) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-np_z(t)} q_z(t) dt,
 \end{aligned}$$

wobei unter Verwendung der Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen gilt

$$\begin{aligned}
 p_z(t) &= \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cosh(t) + \sinh(t) - t - \operatorname{arsinh}(z), \\
 q_z(t) &= \left(\sqrt{1+z^2} \cosh(t) + z \sinh(t) + 1\right)^{\alpha-1} \left(\sqrt{1+z^2} \sinh(t) + z \cosh(t)\right).
 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt sind, beobachten wir für eine geeignete von z unabhängige Konstante $M > 0$ die Abschätzungen

$$|q_z(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

für $t \geq 0$, und

$$\Re\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right) \geq 0$$

auf K .

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} e^{-n\Re(p_z(t))} |q_z(t)| dt \\
 &\leq M \int_0^{\infty} \exp\left(-n\left(\Re\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right) \cosh(t) + \sinh(t) - t - \Re(\operatorname{arsinh}(z))\right) + \alpha t\right) dt \\
 &\leq M e^{n\Re(\operatorname{arsinh}(z))} \int_0^{\infty} e^{-n(\sinh(t)-t)+\alpha t} dt,
 \end{aligned}$$

woraus die absolute Konvergenz der Parameterintegrale für $n \geq 1$ folgt. Weiter gilt für eine geeignete Konstante $\tilde{M} > 0$

4 Starke Asymptotiken

$$\int_0^{\infty} e^{-\Re(p_z(t))} |q_z(t)| dt \leq \tilde{M} \int_0^{\infty} e^{-\sinh(t) + (\alpha+1)t} dt,$$

was die Beschränktheit des Parameterintegrals linker Hand auf K zeigt.

Es ergibt sich in den Bezeichnungen von Satz 3.1

$$\begin{aligned} p_z(0) &= \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} - \operatorname{arsinh}(z), \\ b_0(z) &= \frac{\sqrt{1+z^2}}{2z}, \quad \mu = 2, \\ c_0(z) &= \left(1 + \sqrt{1+z^2}\right)^{\alpha-1} z, \quad \lambda = 1. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$a_0(z) = \frac{c_0(z)}{\mu(b_0(z))^{\lambda/\mu}} = \frac{z}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{1+z^2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

woraus sich wegen $c_0(z) \neq 0$ die Behauptung ergibt. □

Lemma 4.4. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \right\},$$

dann gilt

$$\int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw + \int_{\tilde{J}_1(z)} f(w, z, n) dw = \frac{e^{\frac{n}{z}} (-1)^n \Gamma(2\alpha)}{n^{2\alpha}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} 2 \cos(\alpha\pi) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

Beweis. Es gilt unter Verwendung der Parametrisierung

$$w_1(t) = i\pi + it(a(z) - \pi), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw &= i(a(z) - \pi) \int_0^1 f(w_1(t), z, n) dt \\ &= (a(z) - \pi) \int_0^1 e^{-np_z(t)} q_z(t) dt, \end{aligned}$$

4 Starke Asymptotiken

wobei unter Verwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen gilt

$$\begin{aligned} p_z(t) &= -\frac{1}{z} \cos(t(a(z) - \pi)) - i\pi - it(a(z) - \pi), \\ q_z(t) &= (1 - \cos(t(a(z) - \pi)))^{\alpha-1} \sin(t(a(z) - \pi)). \end{aligned}$$

Für $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$\Re(p_z(t)) = -\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(t(a(z) - \pi)),$$

woraus folgt, dass die Funktion $\Re(p_z(t))$ für festes z mit $\arg(z) \in [0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wächst für $0 \leq t \leq 1$. Es ergibt sich in den Bezeichnungen von Satz 3.1 ($\omega = 0$ dort)

$$\begin{aligned} p_z(0) &= -\frac{1}{z} - i\pi, \\ b_0(z) &= -i(a(z) - \pi), \quad \mu = 1, \\ c_0(z) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} (a(z) - \pi)^{2\alpha-1}, \quad \lambda = 2\alpha. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$a_0(z) = \frac{c_0(z)}{\mu(b_0(z))^{\lambda/\mu}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{(-1)^\alpha}{a(z) - \pi},$$

und somit ergibt sich unter Anwendung von Satz 3.1 (wobei die Verifikation aller Voraussetzungen des Satzes aufgrund der Kompaktheit des Integrationswegs leicht ist)

$$\int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw = e^{-n(-\frac{1}{z} - i\pi)} \left(\Gamma(2\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{(-1)^\alpha}{n^{2\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right) \right)$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

Durch eine analoge Begründung folgt

$$\int_{\check{J}_1(z)} f(w, z, n) dw = e^{-n(-\frac{1}{z} + i\pi)} \left(\Gamma(2\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{(-1)^\alpha}{n^{2\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right) \right)$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. □

4 Starke Asymptotiken

Lemma 4.5. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\},$$

dann gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$ gilt

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw \right| \leq M,$$

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_1(z)} f(w, z, n) dw \right| \leq M.$$

Beweis. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$ (siehe Beweis zu Lemma 4.4)

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw \right| \leq (\pi - a(z)) \int_0^1 e^{-n\Re\left(\frac{1}{z}\right)(1-\cos\{t(\pi-a(z))\})} \\ \times |1 - \cos\{t(\pi - a(z))\}|^{\alpha-1} |\sin\{t(\pi - a(z))\}| dt.$$

Unter Verwendung der Abschätzung

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) (1 - \cos\{t(\pi - a(z))\}) \geq 0$$

folgt

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw \right| \leq (\pi - a(z)) 2^{\alpha-1} \leq \pi 2^{\alpha-1}.$$

Eine analoge Begründung für das zweite Integral liefert die Behauptung. □

Lemma 4.6. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\},$$

dann gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$ gilt

4 Starke Asymptotiken

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) \, dw \right| \leq M \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n,$$

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_1(z)} f(w, z, n) \, dw \right| \leq M \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n.$$

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$. Unter Verwendung der Parametrisierung

$$w(t) = ia(z) + it(\pi - a(z)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

gilt

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) \, dw \right| &\leq \left| e^{-\frac{n}{z}(\pi - a(z))} \right| e^{-n\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z))} \\ &\times \int_0^1 \exp \left\{ -n \left(\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z) + t(\pi - a(z))) - \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) \right) \right\} \\ &\times |1 + \cos(a(z) + t(\pi - a(z)))|^{\alpha-1} |\sin(a(z) + t(\pi - a(z)))| \, dt. \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z) + t(\pi - a(z))) - \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) \geq 0$$

folgt

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) \, dw \right| \leq \pi 2^{\alpha-1} \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n.$$

Wieder liefert eine analoge Begründung für das zweite Integral die Behauptung. □

Lemma 4.7. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in [0, \pi]\},$$

dann gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$ gilt

4 Starke Asymptotiken

$$\left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \right| \leq M \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n.$$

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$. Unter Verwendung der Parametrisierung

$$w(t) = -ia(z) - t, \quad t \geq 0,$$

gilt

$$\begin{aligned} & \left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \right| \\ &= \left| e^{-\frac{n}{z}} \int_0^\infty e^{-n \left(\frac{\cosh(w(t))}{z} - w(t) \right)} (\cosh(w(t)) + 1)^{\alpha-1} \sinh(w(t)) dt \right| \\ &\leq \left| e^{-\frac{n}{z}} \right| \int_0^\infty e^{-np_z(t)} |\cosh(w(t)) + 1|^{\alpha-1} |\sinh(w(t))| dt, \end{aligned}$$

mit

$$p_z(t) = t + \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)) \cosh(t) - \Im \left(\frac{1}{z} \right) \sin(a(z)) \sinh(t).$$

Durch Differentiation ergibt sich für $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} p_z(t) = 1 + \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)) \sinh(t) - \Im \left(\frac{1}{z} \right) \sin(a(z)) \cosh(t) \geq 0,$$

woraus folgt, dass die Funktion $p_z(t)$ für festes z auf dem Intervall $[0, \infty)$ monoton wächst.

Weiter gilt für $t \geq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq p_z(t) - p_z(0) &= t + \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)) \cosh(t) - \Im \left(\frac{1}{z} \right) \sin(a(z)) \sinh(t) \\ &\quad - \Re \left(\frac{1}{z} \right) \cos(a(z)). \end{aligned}$$

4 Starke Asymptotiken

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\tilde{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \right| &\leq \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n e^{\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z))} \\ &\times \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(t + \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) \cosh(t) - \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sin(a(z)) \sinh(t) \right) \right\} \\ &\times |\cosh(w(t)) + 1|^{\alpha-1} |\sinh(w(t))| dt. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |\cosh(-t - ia(z)) + 1| &= |\cosh(t + ia(z)) + 1| \leq 1 + |\cosh(t + ia(z))| \\ &\leq 1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \leq 2e^t \end{aligned}$$

und

$$|\sinh(-t - ia(z))| \leq e^t.$$

Die Konstanten m_1 und m_2 seien definiert durch:

$$\begin{aligned} m_1 &:= \min_{z \in K} \left\{ \frac{1}{2} \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) - \frac{1}{2} \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sin(a(z)) \right\} > 0 \\ m_2 &:= \min_{z \in K} \left\{ \frac{1}{2} \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) + \frac{1}{2} \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sin(a(z)) \right\}, \end{aligned}$$

dann gilt für $t \geq 0$

$$t + \Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z)) \cosh(t) - \Im\left(\frac{1}{z}\right) \sin(a(z)) \sinh(t) \geq t + m_1 e^t + m_2 e^{-t}.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{n}{z}} \int_{\tilde{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \right| &\leq \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|^n e^{\Re\left(\frac{1}{z}\right) \cos(a(z))} \\ &\times 2^{\alpha-1} \int_0^\infty \exp \{ -t - m_1 e^t - m_2 e^{-t} \} e^{\alpha t} dt. \end{aligned}$$

4 Starke Asymptotiken

Aus der Beschränktheit des Ausdrucks $e^{\Re(\frac{1}{z})\cos(a(z))}$ auf K und der Endlichkeit des letzten Integrals folgt die Behauptung. □

Lemma 4.8. *Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von*

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in [0, \pi]\},$$

dann gilt

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))}}{(z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}}} \right| < 1.$$

Beweis. Aus Stetigkeitsgründen genügt es zu zeigen, dass für alle $z \in K$ gilt

$$\left| e^{\frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} (z + \sqrt{z^2 + 1})^{-1} \right| < \left| e^{\frac{1}{z} \cos(a(z))} \right|.$$

Dies ist gleichwertig mit der Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle $z \in K$:

$$\Re \left\{ \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z} - \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \right\} < \Re \left\{ \frac{1}{z} \cos(a(z)) \right\}.$$

Um diese Ungleichung zu verifizieren, definieren wir für $t \geq 0$

$$p_z(t) := \Re \left(\frac{\cosh(w(t))}{z} - w(t) \right)$$

mit $w(t) = t + ia(z)$.

Dann gilt für $t \geq 0$

$$p_z(\Re(\operatorname{arsinh}(z))) = p_z(\log |z + \sqrt{z^2 + 1}|) = \Re \left\{ \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z} - \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \right\}$$

und

$$p_z(0) = \Re \left\{ \frac{1}{z} \cos(a(z)) \right\}.$$

Im Beweis von Lemma 4.3 wurde gezeigt, dass die Funktion $p_z(t)$ für festes z auf dem Intervall $[0, \Re(\operatorname{arsinh}(z))]$ streng monoton fällt, woraus die Behauptung folgt. □

4 Starke Asymptotiken

Damit sind alle vorbereitenden Lemmata zusammengetragen. Durch eine analoge Beweisführung (oder durch Spiegelung) folgt die Gültigkeit der Aussagen aus Lemma 4.1 bis Lemma 4.8 entsprechend auch für die abgeschlossene untere Halbebene.

Um das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren zu können, erklären wir die Spur einer Kurve \mathcal{C} durch die Gleichung

$$\left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right| = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Für eine Definition der mehrdeutigen Ausdrücke in dieser Gleichung und für eine Untersuchung der Kurve siehe Lemma 5.1 sowie die dort vorangehenden Bemerkungen.

Die Kurve \mathcal{C} ist eine geschlossene, stetig differenzierbare Jordankurve (wobei wir die Kurve positiv orientiert verstehen), und ihr Außenbereich $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ und Innenbereich $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ lassen sich charakterisieren durch

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right| > 1 \right\}$$

sowie

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right| < 1 \right\}.$$

Satz 4.1. *Es sei $\alpha \in \mathbb{N}$, dann gelten folgende Asymptotiken für die verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome:*

i) *Für jede nichtleere kompakte Teilmenge $K \subset \mathcal{A}(\mathcal{C})$ gilt*

$$\begin{aligned} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ \frac{1}{2} & & 2n \end{matrix} \middle| \frac{z}{2n} \right) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right\}^n \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

ii) *Für jede nichtleere kompakte Teilmenge $K \subset \mathcal{I}(\mathcal{C})$ gilt*

$${}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ \frac{1}{2} & & 2n \end{matrix} \middle| \frac{z}{2n} \right) = \left(\frac{2}{n} \right)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z} \right)^\alpha \cos(\alpha \pi) \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

4 Starke Asymptotiken

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die Behauptungen für kompakte Teilmengen von

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in [0, \pi]\}$$

zu beweisen.

Mit der Abkürzung

$$c_n(z) = \frac{(-1)^n}{2\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n}{z}\right)^\alpha$$

folgt aus Lemma 4.2

$$\begin{aligned} {}_3F_1\left(-n, \frac{n}{2}, \alpha \mid \frac{z}{2n}\right) &= c_n(z)e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_1(z)} f(w, z, n) dw + c_n(z)e^{-\frac{n}{z}} \int_{J_2(z)} f(w, z, n) dw \\ &\quad + c_n(z)e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_1(z)} f(w, z, n) dw + c_n(z)e^{-\frac{n}{z}} \int_{\check{J}_2(z)} f(w, z, n) dw \\ &=: I_1(n, z) + I_2(n, z) + I_3(n, z) + I_4(n, z). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 gilt

$$I_2(n, z) = H_n(z) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich z auf einer beliebigen kompakten Teilmenge von

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in [0, \pi]\},$$

wobei

$$\begin{aligned} H_n(z) &:= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ (z + \sqrt{z^2+1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right\}^n. \end{aligned}$$

i) 1) Es sei zunächst K eine nichtleere kompakte Teilmenge von

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \cap \left\{z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

dann ergibt eine Anwendung von Lemma 4.5

4 Starke Asymptotiken

$$\frac{I_1(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

und ebenso

$$\frac{I_3(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

Ferner folgt aus einer Kombination von Lemma 4.7 und Lemma 4.8

$$\frac{I_4(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

2) Es sei nun K eine nichtleere kompakte Teilmenge von

$$A(\mathcal{C}) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \right\},$$

dann ergibt sich aus einer Kombination von Lemma 4.6 und Lemma 4.8

$$\frac{I_1(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

und ebenso

$$\frac{I_3(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

Wie unter 1) folgt auch in diesem Fall die Gültigkeit von

$$\frac{I_4(n, z)}{H_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$.

Daraus ergibt sich die Behauptung unter *i*).

ii) Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) \cap \{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in [0, \pi] \}.$$

4 Starke Asymptotiken

Aus der geometrischen Gestalt und der Lage von $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ (siehe auch Lemma 5.1) ergibt es sich leicht, dass K somit eine kompakte Teilmenge der folgenden Menge ist:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] \mid \arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

Es folgt dann aus Lemma 4.4

$$\begin{aligned} I_1(n, z) + I_3(n, z) &= \frac{1}{n^\alpha} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{z^\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \cos(\alpha\pi) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha \cos(\alpha\pi) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= G_n(z) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$, wobei der zweite Schritt aus einer Anwendung der Legendreschen Verdopplungsformel für die Gammafunktion folgt, und $G_n(z)$ definiert ist durch

$$G_n(z) := \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha \cos(\alpha\pi).$$

Ferner gilt, da das Kompaktum K gänzlich im Inneren der Kurve \mathcal{C} liegt,

$$\sup_{z \in K} \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \right| < 1$$

und nach Lemma 4.8 damit auch

$$\sup_{z \in K} \left| e^{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos(a(z))} \right| < 1.$$

Daraus folgt

$$\frac{I_2(n, z)}{G_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sowie unter Verwendung von Lemma 4.7

$$\frac{I_4(n, z)}{G_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig bezüglich $z \in K$, woraus insgesamt die Behauptung folgt.

□

5 Schwache Asymptotiken

In diesem Kapitel wird das Verhalten der Nullstellen der in Kapitel 4 betrachteten skalierten verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome untersucht.

Begriffe und Hilfsmittel

Bevor wir zu den Ergebnissen des Kapitels kommen, werden einige Begriffe und Hilfsmittel aus der Analysis und der Potentialtheorie in lockerem Zusammenhang aufgeführt.

Zunächst stellen wir zwei klassische Sätze von G. Szegő zur Verfügung.

Satz 5.1. *Gegeben seien zwei Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Form*

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k z^k,$$
$$Q(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k z^k,$$

mit der Eigenschaft, dass alle Nullstellen des Polynoms P dem Betrage nach kleiner als $r > 0$ sind und alle Nullstellen des Polynoms Q dem Betrage nach nicht größer als $\rho > 0$ sind. Dann sind alle Nullstellen des „Kompositionspolynoms“

$$R(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_k z^k$$

dem Betrage nach kleiner als $r\rho$.

Beweis. Siehe [21], Satz 3'. □

Um den folgenden Satz bequem formulieren zu können, führte Szegő den Begriff der *Abbildungskonstante* ein:

Es sei \mathcal{C} eine geschlossene Jordansche Kurve in der komplexen x -Ebene. Wir bilden das Außengebiet von \mathcal{C} konform auf das Äußere eines Kreises um den Nullpunkt der z -Ebene ab derart, dass der unendlich ferne Punkt in sich übergeht und die Abbildungsfunktion in der Umgebung des unendlich fernen Punkts eine Entwicklung von der Form

5 Schwache Asymptotiken

$$z = x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \cdots$$

zulässt. Der Radius γ dieses Kreises ist durch \mathcal{C} eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen γ als die *Abbildungskonstante* von \mathcal{C} .

Damit gilt folgender Satz:

Satz 5.2. *Es seien für eine unendliche Folge von Indizes*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$$

die Polynome

$$P_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \cdots + a_n^{(n)}x^n \quad (a_n^{(n)} \neq 0; n = n_\nu; \nu = 1, 2, 3, \dots)$$

definiert (sämtliche Grenzübergänge sind im Folgenden unter Zugrundelegung einer solchen Indexfolge gemeint) und die Polynomfolge

$$P_n(x) \quad (n = n_\nu; \nu = 1, 2, 3, \dots)$$

sei gleichmäßig konvergent in jedem abgeschlossenen Bereiche, der ganz im Innern einer geschlossenen Jordanschen Kurve \mathcal{C} liegt. Von \mathcal{C} machen wir die Voraussetzung, dass sie aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken bestehe. Es sei γ die Abbildungskonstante von \mathcal{C} . Es soll endlich die (im Innern von \mathcal{C} notwendig reguläre) analytische Funktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

nicht identisch verschwinden. Dann gilt:

i)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n^{(n)}|^{1/n} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

ii) Gilt in i) das Gleichheitszeichen, dann ist jeder Punkt der Kurve \mathcal{C} Häufungspunkt der Nullstellen der Polynome $P_n(x)$.

Beweis. Siehe [23]. □

Die Voraussetzung in Satz 5.2, dass \mathcal{C} aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken bestehe, ist erfüllt, falls bis auf endlich viele Ausnahmen jeder Punkt der Kurve eine offene Umgebung besitzt, in der \mathcal{C} analytisch ist.

5 Schwache Asymptotiken

Da wir im Folgenden einige Ergebnisse aus der Potentialtheorie benötigen, erinnern wir kurz an die Definitionen. Dabei halten wir uns im Wesentlichen an die Darstellung in [18].

Es sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathcal{M}(E)$ die Menge aller (Borel-)Wahrscheinlichkeitsmaße auf E . Für ein Maß $\nu \in \mathcal{M}(E)$ ist das *logarithmische Potential* definiert durch

$$U^\nu(z) := \int \log |z - t|^{-1} d\nu(t),$$

welches auf \mathbb{C} eine superharmonische und außerhalb des Trägers des Maßes ν eine harmonische Funktion darstellt. Der Träger eines Maßes ist definiert als die Menge aller Punkte mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung positives Maß besitzt. Die *Energie* eines solchen Potentials ist erklärt durch

$$I(\nu) := \int \int \log |z - t|^{-1} d\nu(t) d\nu(z).$$

Ferner ist die sogenannte *Robinsche Konstante* für E gegeben durch

$$V(E) := \inf_{\nu \in \mathcal{M}(E)} I(\nu).$$

Die Zahl

$$\text{cap } E := e^{-V(E)}$$

heißt *logarithmische Kapazität* der Menge E . Ist $\text{cap } E > 0$, so existiert (etwa nach [18], S. 27) ein eindeutig bestimmtes Maß $\nu_E \in \mathcal{M}(E)$ mit der Eigenschaft

$$I(\nu_E) = V(E).$$

Dieses Maß heißt das *Equilibriummaß* für die Menge E .

Im Folgenden sei \mathcal{K} eine geschlossene Jordankurve in der komplexen Ebene \mathbb{C} . Das Innengebiet von \mathcal{K} sei mit $\mathcal{I}(\mathcal{K})$ und das Außengebiet sei mit $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ bezeichnet, wobei wir das Außengebiet $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ als Teilmenge von \mathbb{C} betrachten, sodass der unendlich ferne Punkt nicht dazugehört. Ist der Punkt z in der Spur der Kurve \mathcal{K} enthalten, so verwenden wir dafür zuweilen die Schreibweise $z \in \mathcal{K}$. Unter einer *Greenschen Funktion mit Polstelle im Unendlichen* des Gebiets $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ verstehen wir eine auf $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ definierte Funktion $g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty)$ ist nichtnegativ und harmonisch in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$,
- ii) $g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty) \rightarrow 0$, für $z \rightarrow \zeta$, $z \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$, für alle $\zeta \in \mathcal{K}$ außerhalb einer Teilmenge der Spur von \mathcal{K} mit verschwindender Kapazität,
- iii) $g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty) - \log |z| \rightarrow -\log(\text{cap } \overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})})$, $|z| \rightarrow \infty$.

5 Schwache Asymptotiken

Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert stets eine eindeutig bestimmte Funktion mit den drei geforderten Eigenschaften. Die obige Definition einer Greenschen Funktion bleibt unter wesentlich allgemeineren Bedingungen sinnvoll, jedoch werden wir sie lediglich für Außengebiete Jordanscher Kurven benötigen. In dieser speziellen Situation ist die Betrachtung einer Ausnahmemenge mit verschwindender Kapazität in der zweiten Eigenschaft nicht nötig, da jeder Randpunkt des Außengebiets *regulär* ist (siehe dazu etwa [18], S. 53-54). Ferner gelten dann die folgenden Zusammenhänge (siehe etwa [18]):

Satz 5.3. *i) Der Träger des Equilibriummaßes für die Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})}$ ist in der Spur der Kurve \mathcal{K} enthalten.*

ii) Bezeichnet γ die Abbildungskonstante der Kurve \mathcal{K} , so gilt

$$V(\overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})}) = -\log(\text{cap } \overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})}) = -\log(\gamma).$$

iii) Der Zusammenhang zwischen dem logarithmischen Potential des Equilibriummaßes μ für $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})}$ und der Greenschen Funktion $g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{U}^\mu(z) = -\log(\text{cap } \overline{\mathcal{I}(\mathcal{K})}) - g_{\mathcal{A}(\mathcal{K})}(z, \infty), \quad z \in \mathcal{A}(\mathcal{K}).$$

Zur Berechnung einer lokalen Dichte eines Equilibriummaßes benötigen wir folgenden Satz (siehe [18], S. 211):

Satz 5.4. *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und μ bezeichne das Equilibriummaß für K mit Träger S . Der Durchschnitt von S mit einem Gebiet sei durch eine Jordankurve γ der Klasse $C^{1+\delta}$ für ein $\delta > 0$ darstellbar. Dann ist die Einschränkung von μ auf γ absolut stetig bezüglich des linearen Lebesguemaßes (Bogenmaß) auf γ und es gilt*

$$d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n_+}(z) + \frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n_-}(z) \right) |dz|, \quad z \in \gamma,$$

wobei $\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n_+}$ und $\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n_-}$ Ableitungen in Richtung der zwei Normalen der Kurve γ bezeichnen.

Eine Jordankurve $\gamma = \gamma(t)$, $0 < t < 1$, liegt hier laut Definition in der Klasse $C^{1+\delta}$ für ein $\delta > 0$, falls γ stetig differenzierbar mit nicht verschwindender Ableitung auf $(0, 1)$ ist, und die Ableitung dort eine Lipschitzbedingung bezüglich des Exponenten δ erfüllt (mit endlicher positiver Konstante L):

$$|\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| \leq L |t_1 - t_2|^\delta.$$

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel stellt der *Carlesonsche Eindeutigkeitssatz* dar (siehe [18], S. 123).

5 Schwache Asymptotiken

Satz 5.5. *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge mit positiver Kapazität und es bezeichne Ω die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Sind μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, deren Träger in $\partial\Omega$ enthalten sind, und stimmen ihre Potentiale U^μ und U^ν in Ω überein, so gilt*

$$\mu = \nu.$$

Schließlich wollen wir noch an zwei wichtige Begriffe erinnern.

Es sei P_n ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Unter dem *assozierten (normierten) Nullstellenmaß* verstehen wir ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{C} , welches genau an den Nullstellen des Polynoms P_n die Masse $\frac{1}{n}$ besitzt. Der in diesem Kontext übliche Konvergenzbegriff von Maßen ist der Begriff der *schwach*-Konvergenz*.

Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Borelmaßen, deren Träger alle in K enthalten sind. Ferner sei ν ein weiteres Borelmaß mit Träger in K . Dann heißt die Folge $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen das Maß ν im *schwach*-Sinne*, wenn für alle auf K stetigen Funktionen f gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\nu_n = \int f \, d\nu.$$

Für eine beliebige Folge von Borelmaßen $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bedeutet die *schwach*-Konvergenz* gegen ein Borelmaß ν , dass obige Definition für ein beliebiges Kompaktum angewandt wird, welches alle Träger der Maße ν_n und ν enthält. Gibt es keine kompakte Menge, welche alle Träger enthält, so ist es stets möglich, auf die Riemannschen Zahlenkugel als geeignetes Kompaktum auszuweichen (siehe etwa [18], S. 2-3).

Schwache Asymptotik der Nullstellen und Eigenschaften der Grenzverteilung

Schon für die Formulierung der starken Asymptotik der verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome in Satz 4.1 spielte die Spur der Kurve \mathcal{C} samt ihres Innen- und Außen- gebiets eine wichtige Rolle. Dort hatten wir auf eine genaue Angabe der definierenden Abbildung und auf eine Untersuchung verzichtet. Zu Anfang dieses Abschnitts wollen wir eine rigorose Definition nachholen.

Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus [i, -i] & \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c \\ z & \mapsto z + \sqrt{z^2 + 1} \end{cases}$$

sei wie am Anfang des vierten Kapitels erklärt. Sie ist dann eindeutig definiert und konform. Auf dem Schnitt $[i, -i]$ seien die Werte so erklärt, dass die Strecke von i nach $-i$ auf die Kurve γ mit

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi,$$

abgebildet wird (mit den offensichtlichen Orientierungen), wodurch die daraus entstehende Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z + \sqrt{z^2 + 1} \end{cases}$$

eindeutig definiert ist.

Im Folgenden sei die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\varphi(z) := (z + \sqrt{z^2 + 1}) \exp \left\{ \frac{-2}{z + \sqrt{z^2 + 1} - 1} - 1 \right\}.$$

Eine elementare Rechnung zeigt

$$\varphi(z) = (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

5 Schwache Asymptotiken

wobei der Wert des letzten Ausdrucks im Falle $z = 0$ durch den entsprechenden Wert des definierenden Ausdrucks der Abbildung φ gegeben sei.

Wir setzen

$$Sp(\mathcal{C}) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} \right| = 1 \right\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{C}) &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} \right| > 1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} \right| > 1 \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{C}) &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} \right| < 1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus [i, -i] : \left| (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}} \right| < 1 \right\}. \end{aligned}$$

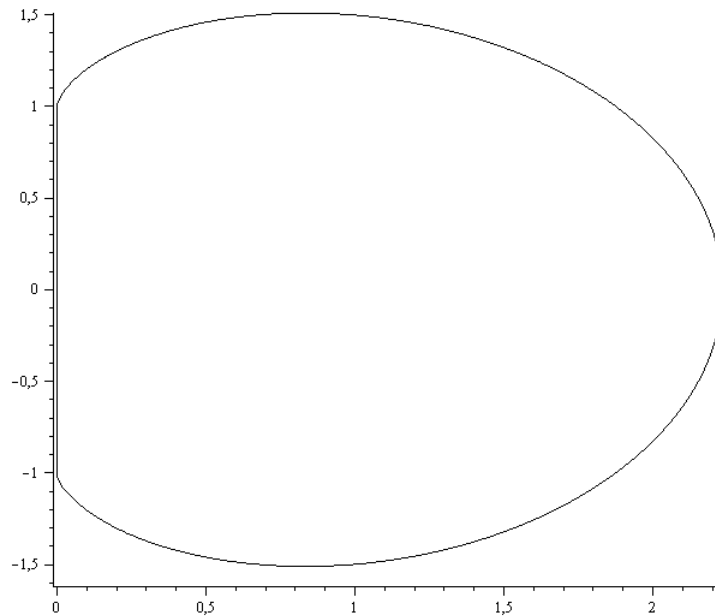


Abbildung 5.1: Die Spur der Kurve \mathcal{C} .

5 Schwache Asymptotiken

Lemma 5.1. *Die Menge $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ist ein Gebiet und die Abbildung*

$$\begin{cases} \varphi : \mathcal{A}(\mathcal{C}) & \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c, \\ \varphi(z) = (z + \sqrt{z^2 + 1}) e^{-\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}} \end{cases}$$

ist konform. Ferner ist $Sp(\mathcal{C})$ die Spur einer geschlossenen, stetig differenzierbaren Jordankurve \mathcal{C} , deren Außengebiet durch $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ und deren Innengebiet durch $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ gegeben ist (siehe Abbildung 5.1).

Beweis. Die Abbildungen f_1 , f_2 und f_3 seien erklärt durch

$$\begin{cases} f_1 : \mathbb{C} \setminus [i, -i] & \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c, \\ s = f_1(z) = z + \sqrt{z^2 + 1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 : \overline{\mathbb{D}}^c & \rightarrow \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \Re(t) > -\frac{1}{2}\}, \\ t = f_2(s) = \frac{1}{s-1}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} f_3 : \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \Re(t) > -\frac{1}{2}\} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ w = f_3(t) = \frac{t+1}{t} e^{-2t-1}. \end{cases}$$

Die Abbildungen f_1 und f_2 sind bekanntlich konform.

Es sei

$$G := \left\{ t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \Re(t) > -\frac{1}{2} \text{ und } |f_3(t)| > 1 \right\}.$$

Wir zeigen die Gebietseigenschaft der Menge G und die Konformität der Abbildung

$$f_3|_G : G \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^c.$$

Dazu betrachten wir auf der Menge $\tilde{G} := G \cup \{0\}$ die Abbildung

$$\begin{cases} \tilde{f}_3 : \tilde{G} & \rightarrow \mathbb{D}, \\ \tilde{f}_3(t) = \frac{t}{t+1} e^{2t+1}. \end{cases}$$

5 Schwache Asymptotiken

Dann ist

$$\tilde{G} = \{t \in \mathbb{C} : \Re(t) > -\frac{1}{2} \text{ und } |\tilde{f}_3(t)| < 1\}.$$

Aus einer Untersuchung des Wachstumverhaltens (etwa mittels Differentiation) der reellwertigen Funktion $|\tilde{f}_3(t)|$ auf den Strahlen mit Parameterdarstellung

$$t_1(r) = -\frac{1}{2} + r e^{i\theta}, \quad r \geq 0, \text{ für festes } \theta \text{ mit } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

sowie auf den Halbkreisen mit Darstellung

$$t_2(\theta) = -\frac{1}{2} + r e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ für festes } r \geq 0,$$

lässt sich der einfache Zusammenhang sowie die Beschränktheit der Menge \tilde{G} folgern. Es handelt sich bei \tilde{G} demnach um ein nichtleeres, beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet. Ferner gilt für den Rand des Gebiets \tilde{G}

$$\partial\tilde{G} \subset \{t \in \mathbb{C} : \Re(t) > -1 \text{ und } |\tilde{f}_3(t)| = 1\}$$

sowie auch

$$\partial\tilde{G} \subset \left\{ t \in \mathbb{C} : \Re(t) \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

Die Ableitung der auf der offenen Halbebene $\{t \in \mathbb{C} : \Re(t) > -1\}$ holomorphen Funktion \tilde{f}_3 verschwindet genau in den Punkten $t_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ und $\bar{t}_0 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$, welche einfache Nullstellen sind. Aufgrund der Gleichung

$$|\tilde{f}_3(t)| = 1$$

für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $\Re(t) = -\frac{1}{2}$, ergibt sich unter Verwendung einer lokalen Beschreibung holomorpher Funktionen (siehe etwa [3], S. 9), dass der Rand $\partial\tilde{G}$ aus den Spuren zweier (stetig differenzierbarer) Jordanbögen besteht, welche genau in den Punkten t_0 und \bar{t}_0 orthogonal aufeinander treffen. Eine dieser Kurven ist durch die direkte Verbindungsstrecke der Punkte t_0 und \bar{t}_0 gegeben, die zweite Kurve verläuft bis auf die Randpunkte gänzlich in der Halbebene $\{t \in \mathbb{C} : \Re(t) > -\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 5.2). Zusammenfassend können wir den Rand $\partial\tilde{G}$ als die Spur einer geschlossenen Jordankurve auffassen.

Für jedes $t \in \partial\tilde{G}$ und $w \in \mathbb{D}$ gilt nun

$$|\tilde{f}_3(t)| = 1 > |w|.$$

5 Schwache Asymptotiken

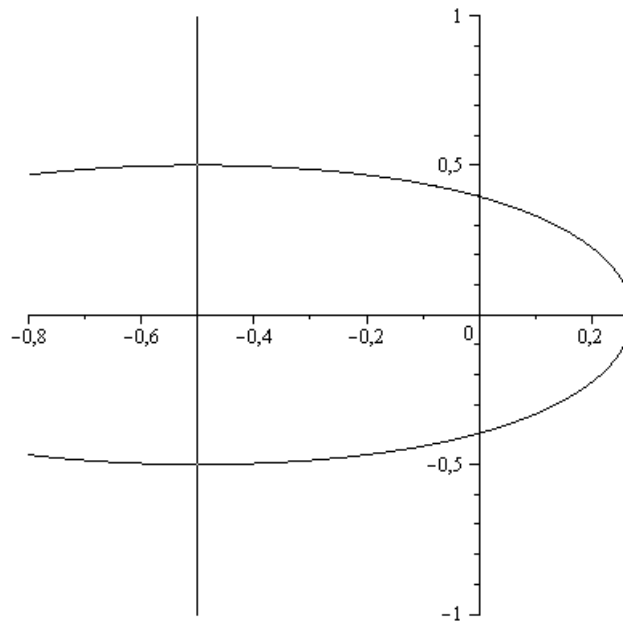


Abbildung 5.2: Das von Niveaulinien berandete Gebiet \tilde{G} .

Aus einer Anwendung des Satzes von Rouché folgt, dass für jedes feste $w \in \mathbb{D}$ die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $\tilde{f}_3(t) - w$ und $\tilde{f}_3(t)$ im Gebiet \tilde{G} übereinstimmen. Aus der Gestalt von $\tilde{f}_3(t)$ ergibt sich jedoch sofort, dass $\tilde{f}_3(t)$ genau eine Nullstelle in \tilde{G} besitzt, woraus die Konformität der Abbildung

$$\tilde{f}_3|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{D}$$

resultiert. Nach einem Satz von Carathéodory (siehe etwa [6], S. 367) stellt die stetige Fortsetzung der Abbildung \tilde{f}_3 nach $\overline{\tilde{G}}$ einen Homöomorphismus dar (also eine stetige bijektive Abbildung, deren Umkehrfunktion ebenfalls stetig ist), welcher das Kompaktum $\overline{\tilde{G}}$ auf den abgeschlossenen Einheitskreis abbildet.

Es folgt, dass die ursprünglich betrachtete Menge G ein beschränktes Gebiet ist und es ergibt sich, dass die Abbildung

$$f_3|_G : G \rightarrow \mathbb{D}^c$$

konform ist. Ferner stellt die stetige Fortsetzung von $f_3|_G$ nach $\overline{G} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus dar, unter welchem der Rand $(\partial G) \setminus \{0\} = \partial \tilde{G}$ auf den Rand des Einheitskreises abgebildet wird. Aus den Beziehungen

$$\varphi = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus [i, -i]$$

und

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(G)$$

folgt unter Verwendung der Gebietstreue holomorpher Funktionen einerseits, dass die Menge $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ein Gebiet ist und andererseits, dass die Abbildung φ das Gebiet $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ konform auf $\overline{\mathbb{D}^c}$ abbildet.

Ferner lässt sich leicht feststellen, dass eine Annäherung an den Schnitt $[i, -i]$ innerhalb des Gebiets $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ lediglich aus der linken Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$ heraus möglich ist. Dies ermöglicht eine stetige Fortsetzung der Abbildung

$$f_2 \circ f_1 : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \rightarrow G$$

nach $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$, welche den Rand $\partial\mathcal{A}(\mathcal{C})$ homöomorph auf die Jordankurve $(\partial G) \setminus \{0\}$ abbildet.

Die durch diese stetige Fortsetzung induzierte Festlegung der Werte der Abbildung f_1 auf dem Schnitt $[i, -i]$ entspricht der Definition der Abbildung f_1 auf \mathbb{C} zu Anfang dieses Kapitels.

Es folgt, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{D}^c}$$

eine Fortsetzung nach $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$ besitzt (welche wir wieder mit φ bezeichnen), sodass die entstehende Abbildung

$$\varphi : \overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbb{D}^c$$

einen Homöomorphismus darstellt, unter welchem der Rand $\partial\mathcal{A}(\mathcal{C})$ auf den Rand des Einheitskreises abgebildet wird.

Aus der Identität $Sp(\mathcal{C}) = \partial\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ergibt sich schließlich, dass $Sp(\mathcal{C})$ als Spur einer geschlossenen Jordankurve aufgefasst werden kann, deren Außengebiet durch $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ und deren Innengebiet durch $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ gegeben ist.

Im Folgenden betrachten wir die zur Abbildung φ gehörige Umkehrabbildung

$$\psi : \mathbb{D}^c \rightarrow \overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$$

und die Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow Sp(\mathcal{C}),$$

5 Schwache Asymptotiken

definiert durch

$$\gamma(t) = \psi(e^{it}).$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen θ_0 und θ_1 aus dem Intervall $(0, 2\pi)$ mit $\gamma(\theta_0) = i$ und $\gamma(\theta_1) = -i$.

Es gilt ferner für $z \in \mathcal{C}$ mit $z \neq \pm i$, dass die Abbildung φ eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt z besitzt, wobei eine elementare Rechnung zeigt

$$\varphi'(z) = \varphi(z) \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1} - 1} \neq 0.$$

Es sei $\theta \in [0, 2\pi]$ mit der Eigenschaft $\psi(e^{i\theta}) = z$, dann besitzt die Abbildung ψ eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt $e^{i\theta}$ mit nicht verschwindender Ableitung. Daraus folgt die stetige Differenzierbarkeit der Parametrisierung γ auf der Menge $[0, 2\pi] \setminus \{\theta_0, \theta_1\}$ und es gilt für alle $t \in [0, 2\pi] \setminus \{\theta_0, \theta_1\}$

$$\gamma'(t) = i \left(\sqrt{(\gamma(t))^2 + 1} - 1 \right).$$

An dieser Darstellung wird ersichtlich, dass die Abbildung γ' eine stetige Fortsetzung auf das ganze Intervall $[0, 2\pi]$ zulässt, woraus die stetige Differenzierbarkeit der Parametrisierung γ folgt. Aus $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$ ergibt sich die Behauptung. □

Um im Folgenden von der Kurve \mathcal{C} sprechen zu können, versehen wir ihre Spur mit positiver Orientierung. Kommen wir nun zu potentialtheoretischen Eigenschaften der Kurve \mathcal{C} .

Satz 5.6. *i) Die Greensche Funktion $g(z) = g_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(z, \infty)$ des Außenbereichs der Kurve \mathcal{C} mit Polstelle im Unendlichen ist gegeben durch*

$$g(z) = \log |\varphi(z)|, \quad z \in \mathcal{A}(\mathcal{C}).$$

ii) Für die logarithmische Kapazität der Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ gilt

$$\text{cap } \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})} = \frac{e}{2}.$$

5 Schwache Asymptotiken

iii) Das logarithmische Potential des Equilibriummaßes μ der Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\mu(z) &= \log\left(\frac{2}{e}\right) - \log|\varphi(z)| \\ &= \Re\left(\frac{2}{z + \sqrt{z^2 + 1} - 1}\right) - \log|z + \sqrt{z^2 + 1}| + \log\left(\frac{2}{e}\right) + 1, \quad \text{für } z \in \mathcal{A}(\mathcal{C}), \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{U}^\mu(z) = \log\left(\frac{2}{e}\right), \quad \text{für } z \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}.$$

Beweis.

i) Folgt unmittelbar aus Lemma 5.1, siehe dazu etwa [18], S. 109.

ii) Aus i) folgt

$$-\log\left(\text{cap}\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}\right) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} (\log|\varphi(z)| - \log|z|).$$

Aus einer elementaren Rechnung ergibt sich sofort mithilfe der konkreten Gestalt der Abbildung φ

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\log|\varphi(z)| - \log|z|) = \log\left(\frac{2}{e}\right),$$

woraus die Behauptung folgt.

iii) Unter Verwendung von Satz 5.3 folgt aus i) für $z \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\mu(z) &= \log\left(\frac{2}{e}\right) - g(z) \\ &= \log\left(\frac{2}{e}\right) - \log|\varphi(z)| \\ &= \Re\left(\frac{2}{z + \sqrt{z^2 + 1} - 1}\right) - \log|z + \sqrt{z^2 + 1}| + \log\left(\frac{2}{e}\right) + 1. \end{aligned}$$

Die Gleichheit

$$\mathcal{U}^\mu(z) = \log\left(\frac{2}{e}\right)$$

auf $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ folgt allgemein aus *ii*) und Lemma 5.1 (siehe etwa [18], S. 52-54).

□

Im Folgenden sei

$$\psi : \mathbb{D}^c \rightarrow \overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$$

die zur Abbildung φ gehörige Umkehrabbildung (siehe Lemma 5.1). Ferner bezeichne λ das Equilibriumaß des Einheitskreises $\partial\mathbb{D}$, welches durch das normierte lineare Lebesguemaß (Bogenmaß) auf $\partial\mathbb{D}$ gegeben ist.

Satz 5.7. *Das Equilibriumaß μ der Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ lässt sich als das Bildmaß von λ unter der Abbildung ψ charakterisieren. Ferner ist μ absolut stetig bezüglich des linearen Lebesguemaßes (Bogenmaß) auf der Spur der Kurve \mathcal{C} und eine Dichtefunktion (Radon-Nikodym-Ableitung) ist gegeben durch*

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} |D(z)| |dz|, \quad z \in \mathcal{C},$$

wobei D definiert ist durch

$$D(z) = \frac{2(z + \sqrt{z^2 + 1})}{(z + \sqrt{z^2 + 1} - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1} - 1}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

Dabei ist die Definition der Ausdrücke $z + \sqrt{z^2 + 1}$ und $\sqrt{z^2 + 1}$ auf der Spur der Kurve \mathcal{C} zu Anfang dieses Kapitels zu beachten.

Beweis.

- i*) Wir bezeichnen das Bildmaß von λ unter der Abbildung ψ mit $\nu = \lambda^\psi$. Sei $z \in \mathcal{C}$ mit $z \neq \pm i$. Dann besitzt die Abbildung φ eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt z und eine elementare Rechnung zeigt (siehe auch den Beweis zu Lemma 5.1)

$$|\varphi'(z)| = \left| \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1} - 1} \right|.$$

5 Schwache Asymptotiken

Es sei $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ mit der Eigenschaft $\psi(e^{i\theta_0}) = z$, dann besitzt die Abbildung ψ eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt $e^{i\theta_0}$ mit nicht verschwindender Ableitung. Unter Verwendung des Transformationsgesetzes für die Integration bezüglich eines Bildmaßes folgt für das Potential des Maßes ν

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}^\nu(z) &= \int_{Sp(\mathcal{C})} \log |z - t|^{-1} d\lambda^\psi(t) \\
 &= \int_{\partial\mathbb{D}} \log |z - \psi(t)|^{-1} d\lambda(t) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |z - \psi(e^{i\theta})|^{-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i\theta_0})|^{-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i\theta_0})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \right|^{-1} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|^{-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

Das zweite Integral der letzten Zeile verschwindet (siehe etwa [18], S. 22) und es ergibt sich

$$\mathcal{U}^\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i\theta_0})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \right|^{-1} d\theta.$$

Für festes θ_0 mit $\psi(e^{i\theta_0}) \neq \pm i$ ist der Ausdruck

$$\log \left| \frac{\psi(\zeta) - \psi(e^{i\theta_0})}{\zeta - e^{i\theta_0}} \right|^{-1}$$

als Funktion der Veränderlichen ζ harmonisch auf $\overline{\mathbb{D}^c} \cup \{\infty\}$ und stetig auf dem Abschluss dieser Menge $\overline{\mathbb{D}^c} \cup \{\infty\} = \mathbb{D}^c \cup \{\infty\}$. Unter Verwendung der Mittelwert-eigenschaft harmonischer Funktionen (siehe etwa [18], S. 7) folgt

$$\mathcal{U}^\nu(z) = \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \log \left| \frac{\psi(\zeta) - \psi(e^{i\theta_0})}{\zeta - e^{i\theta_0}} \right|^{-1} = -\log(\text{cap } \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}).$$

5 Schwache Asymptotiken

Es ergibt sich

$$\mathcal{U}^\nu(z) = -\log(\operatorname{cap} \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})})$$

für ν -fast jedes $z \in \mathcal{C}$. Durch Integration folgt

$$I(\nu) = \int_{Sp(\mathcal{C})} \mathcal{U}^\nu(z) \, d\nu(z) = -\log(\operatorname{cap} \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}) = I(\mu),$$

woraus sich mithilfe der Definition des Equilibriummaßes die Gleichheit $\nu = \mu$ ergibt. Unter Verwendung ähnlicher Argumente lässt sich zeigen, dass die hier beschriebene Charakterisierung des Equilibriummaßes als Bildmaß unter der stetigen Fortsetzung einer äußeren konformen Abbildung auch in allgemeinerer Form gilt (siehe dazu [1], S. 21).

- ii) Aus dem Ergebnis in Teil i) folgt, dass der Träger des Equilibriummaßes μ mit der Spur der Kurve \mathcal{C} übereinstimmt. Ferner ist die Kurve \mathcal{C} an jeder Stelle $z \neq \pm i$ ihrer Spur analytisch (siehe Teil i)), woraus sich ergibt, dass die Kurve in diesen Punkten hinreichend glatt ist. Für $z \in \mathcal{C}$ mit $z \neq \pm i$ berechnen wir mittels Satz 5.4 eine Dichte von μ in (einer Umgebung von) z . Nach Satz 5.6 ist für alle $w \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$

$$\mathcal{U}^\mu(w) = -\log(\operatorname{cap} \overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}) = -\log \frac{e}{2},$$

woraus folgt, dass die Ableitung des Potentials \mathcal{U}^μ in Richtung der inneren Normalen im Punkt z verschwindet. Es ergibt sich für die Dichte aus Satz 5.4

$$d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n}(z) |dz|,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. Unter Verwendung von Satz 5.6 folgt aus einer elementaren Rechnung (siehe auch [18], S. 215) für $z \in \mathcal{C}$ mit $z \neq \pm i$

$$-\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial n}(z) = \frac{\partial g_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(z, \infty)}{\partial n} = |\varphi'(z)| = \left| \frac{2(z + \sqrt{z^2 + 1})}{(z + \sqrt{z^2 + 1} - 1)^2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1} - 1} \right|.$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\{i, -i\}$ sowohl eine Nullmenge bezüglich des linearen Lebesguemaßes auf der Spur der Kurve \mathcal{C} , als auch eine Nullmenge bezüglich des Equilibriummaßes μ ist, folgt schließlich die Behauptung. □

Kommen wir nun zu Eigenschaften der Nullstellen der verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome.

5 Schwache Asymptotiken

Es sei im Folgenden stets $\alpha \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt. Wir schreiben für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$F_n^{(\alpha)}(z) = {}_3F_1 \left(-n, \quad n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2n} \right).$$

Zunächst zeigen wir, dass die Nullstellenmenge dieser Folge von Polynomen beschränkt ist.

Lemma 5.2. *Die Menge*

$$\mathcal{N} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } F_n^{(\alpha)}(z) = 0 \right\}$$

ist beschränkt.

Beweis. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$F_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k B_k (-z)^k,$$

wobei wir für $0 \leq k \leq n$ setzen

$$A_k := \frac{\binom{n}{k}}{(2n)^k}, \quad B_k := \frac{\binom{\alpha}{k}}{\left(\frac{1}{2}\right)_k}.$$

Es gilt weiter

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k (-z)^k = \frac{\binom{n}{n} (-n)_n}{(-2n+1)_n (2n)^n} z^n L_n^{(-2n)} \left(-\frac{2n}{z} \right),$$

wobei $L_n^{(-2n)}(w)$ das n -te Laguerre-Polynom zum Parameter $\alpha = -2n$ bezeichnet. Die Nullstellen der Folge $L_n^{(-2n)}(nw)$ streben für große Werte von n gleichmäßig gegen die Spur einer Kurve in der komplexen Ebene, welche einen positiven Abstand zum Ursprung besitzt (siehe etwa [8]). Daraus folgt die Beschränktheit der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } P_n(z) = 0\}.$$

Ferner gilt

$$Q_n(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k (-z)^k = {}_2F_1 \left(-n, \quad \alpha \mid \frac{z}{2} \right),$$

und ein Ergebnis der Arbeit [19] liefert die Beschränktheit der entsprechenden Nullstellenmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } Q_n(z) = 0\}.$$

Eine Anwendung von Satz 5.1 ergibt somit die Beschränktheit der Menge \mathcal{N} . □

5 Schwache Asymptotiken

Wir kommen nun zu einer aussagekräftigeren Eigenschaft der Nullstellen.

Lemma 5.3. *Die Menge der Häufungspunkte der in Lemma 5.2 definierten Nullstellenmenge \mathcal{N} ist gegeben durch die Spur der Kurve \mathcal{C} .*

Beweis.

i) Es sei für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$P_n(z) := n^\alpha {}_3F_1 \left(\begin{matrix} -n, & n, & \alpha \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{z}{2n} \right).$$

Aus dem zweiten Teil von Satz 4.1 folgt, dass die Polynomfolge P_n auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ gleichmäßig gegen eine nicht verschwindende Funktion konvergiert. Es sei mit $a_n^{(n)}$ der Koeffizient vor z^n des Polynoms P_n bezeichnet, dann gilt

$$a_n^{(n)} = n^\alpha \frac{(-n)_n (n)_n (\alpha)_n}{n! (1/2)_n (2n)^n}.$$

Es ergibt sich aus einer Anwendung der Stirlingschen Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n^{(n)}|^{1/n} = \frac{2}{e} = \frac{1}{\gamma},$$

wobei γ die Abbildungskonstante von \mathcal{C} bezeichnet. Damit folgt mittels Satz 5.2, dass jeder Punkt der Spur der Kurve \mathcal{C} ein Häufungspunkt der Menge \mathcal{N} ist.

ii) Aus einer Kombination von Lemma 5.2 und dem ersten Teil von Satz 4.1 folgt, dass es keinen Häufungspunkt der Nullstellen im Außenbereich $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ geben kann. Andererseits folgt aus der Argumentation in *i)* mittels des zweiten Teils von Satz 4.1, dass es auch keinen Häufungspunkt der Nullstellen im Innenbereich $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ geben kann. Damit ergibt sich die Behauptung.

□

Zum Abschluss der Arbeit [22] deutet G. Szegő ohne Beweis an, dass in der Situation von Satz 5.2 bzw. von Lemma 5.3 die Annäherung der Nullstellen an die Kurve durch eine Art „Gleichverteilung“ beschrieben werden kann. Wir wollen diese Vorstellung nun im Falle der verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome $F_n^{(\alpha)}$ mit potentialtheoretischen Mitteln präzisieren, indem wir die Grenzverteilung der Nullstellen mit dem Equilibriummaß μ in Verbindung bringen.

5 Schwache Asymptotiken

Satz 5.8. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne μ_n das zum Polynom

$$F_n^{(\alpha)}(z) = {}_3F_1\left(-n, n, \alpha \mid \frac{z}{2n}\right)$$

assozierte (normierte) Nullstellenmaß. Dann konvergiert die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im schwach*-Sinne gegen das Equilibriumaß μ der Menge $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass jede Teilfolge von $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrerseits eine Teilfolge besitzt, welche im schwach*-Sinne gegen das Equilibriumaß μ konvergiert.

Es sei $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Lemma 5.2 liegen alle Nullstellen der Polynome $F_n^{(\alpha)}(z)$ gemeinsam in einem geeigneten Kompaktum, sodass die Träger aller Maße μ_n in diesem Kompaktum enthalten sind. Nach dem Hellyschen Auswahlprinzip (siehe etwa [18], S. 3) gibt es eine Teilfolge $n(l) := n_{k_l}$ der Folge n_k und ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν , sodass die Folge $(\mu_{n(l)})_{l \in \mathbb{N}}$ im schwach*-Sinne gegen ν konvergiert. Analog zu der im Beweis zu Lemma 5.3 verwandten Argumentation folgt aus der starken Asymptotik in Satz 4.1, dass der Träger des Maßes ν in der Spur der Kurve \mathcal{C} enthalten ist.

Im Folgenden bezeichne $a_n^{(n)}$ den Koeffizienten vor z^n des Polynoms $F_n^{(\alpha)}$ und die Nullstellen von $F_n^{(\alpha)}$ seien bezeichnet mit $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$. Zu festes $z \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ wählen wir in Anbetracht der starken Asymptotik in Satz 4.1 eine kompakte Obermenge von $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{C})}$ mit der Eigenschaft, dass sie den Punkt z nicht enthält, jedoch alle Träger der Maße μ_n für ausreichend große Werte von $n \in \mathbb{N}$ umfasst. Dann gilt unter Verwendung der Definition der schwach*-Konvergenz für das Potential des Maßes ν

$$\begin{aligned} \int \log |z - t|^{-1} d\nu(t) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int \log |z - t|^{-1} d\mu_{n(l)}(t) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{n(l)} \sum_{k=1}^{n(l)} \log |z - z_k^{(n(l))}|^{-1} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{n(l)} \log \prod_{k=1}^{n(l)} |z - z_k^{(n(l))}|^{-1} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{n(l)} \log \left| \frac{a_{n(l)}^{(n(l))}}{F_{n(l)}^{(\alpha)}(z)} \right| \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \log \left| a_{n(l)}^{(n(l))} \right|^{1/n(l)} - \lim_{l \rightarrow \infty} \log \left| F_{n(l)}^{(\alpha)}(z) \right|^{1/n(l)}. \end{aligned}$$

5 Schwache Asymptotiken

Aus dem Beweis von Lemma 5.3 ergibt sich

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \log \left| a_{n(l)}^{(n(l))} \right|^{1/n(l)} = \log \left(\frac{2}{e} \right).$$

Ferner folgt aus dem ersten Teil von Satz 4.1

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \log \left| F_{n(l)}^{(\alpha)}(z) \right|^{1/n(l)} = \log |\varphi(z)|,$$

wobei φ die äußere Abbildung der Kurve \mathcal{C} bezeichnet (siehe Lemma 5.1). Insgesamt ergibt sich für $z \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$

$$\int \log |z - t|^{-1} d\nu(t) = \log \left(\frac{2}{e} \right) - \log |\varphi(z)|.$$

Daraus folgt unter Verwendung von Satz 5.6, dass das Potential des Maßes ν mit dem Potential des Equilibriumaßes μ auf dem Außengebiet $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ übereinstimmt. Aus dem Carlesonschen Eindeutigkeitssatz (Satz 5.5) ergibt sich somit

$$\nu = \mu,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aus Satz 5.7 und Satz 5.8 folgt, dass die Nullstellengrenzverteilung μ der verallgemeinerten assoziierten Ménage-Polynome $F_n^{(\alpha)}$ durch die Dichte

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1} - 1} \right| |dz|, \quad z \in \mathcal{C},$$

bezüglich des linearen Lebesguemaßes auf der Spur der Kurve \mathcal{C} beschrieben werden kann. Betrachten wir zum Vergleich ein entsprechendes Ergebnis für die in der Einleitung genannten, aus der Lösung des Rencontre-Problems resultierenden Polynome

$$S_n(t) = n! \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = (-1)^n n! L_n^{(-n-1)}(t), \quad t \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1,$$

so lässt sich beweisen (siehe [12]), dass die Nullstellengrenzverteilung ν der Folge der skalierten Polynome $S_n(nt)$ durch das a priori komplexe Maß

$$d\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1-z}{z} dz, \quad z \in \mathcal{K},$$

5 Schwache Asymptotiken

beschrieben werden kann, wobei \mathcal{K} hier die Szegö-Kurve bezeichnet. Es zeigt sich, dass durch dieses Maß tatsächlich ein positives Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K} gegeben ist, welches sich auch in der Form

$$d\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1-z}{z} \right| |dz|, \quad z \in \mathcal{K},$$

darstellen lässt.

Zum Abschluss sei die Kurve \mathcal{C} in die zwei Teilkurven \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 eingeteilt, wobei \mathcal{C}_1 die Strecke von i nach $-i$ bezeichnet und \mathcal{C}_2 den übrigen Teil von \mathcal{C} bezeichnet. Wir wollen die Masse der Grenzverteilung der Nullstellen auf den Spuren der Teilkurven \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 ermitteln.

Zunächst gilt für die Masse auf der Spur von \mathcal{C}_1

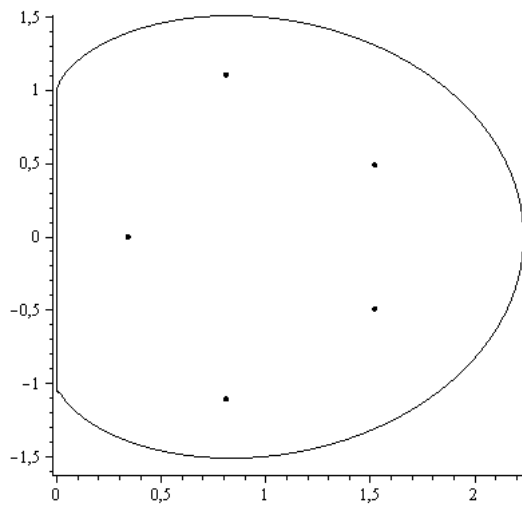
$$\int_{-i}^i \frac{1}{2\pi} |D(z)| |dz| = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}.$$

Daraus ergibt sich sofort für die Masse auf der Spur von \mathcal{C}_2

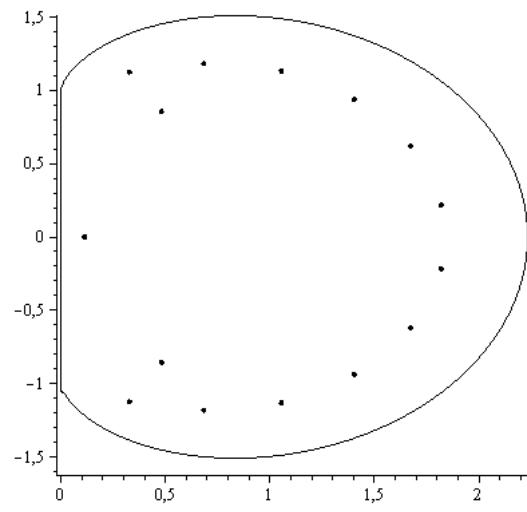
$$\int_{Sp(\mathcal{C}_2)} \frac{1}{2\pi} |D(z)| |dz| = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

Um die Aussagen aus Satz 5.8 und Lemma 5.3 graphisch zu illustrieren, betrachten wir abschließend das Verhalten der Nullstellen für den wichtigen Spezialfall $\alpha = 1$ anhand einiger Nullstellenplots (welche mittels des Programms Maple 13 erzeugt wurden).

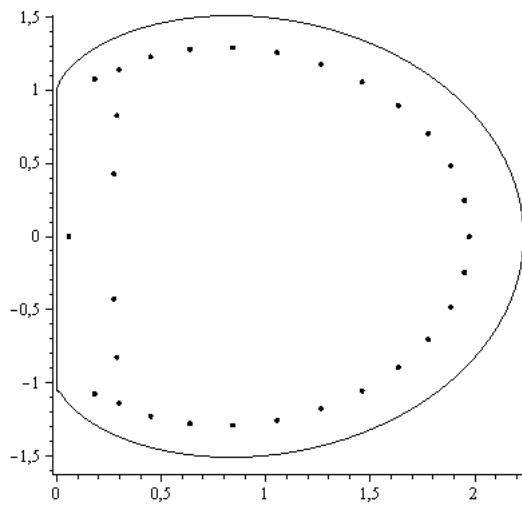
5 Schwache Asymptotiken



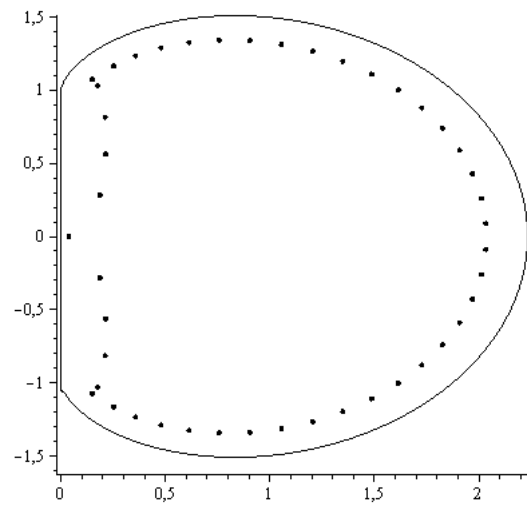
(a) $n = 5,$



(b) $n = 15,$

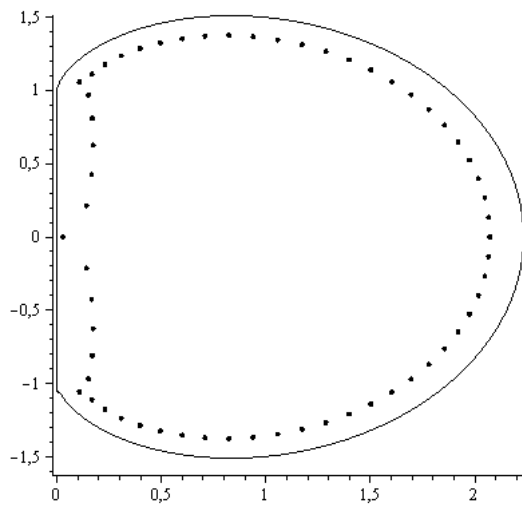


(c) $n = 30,$

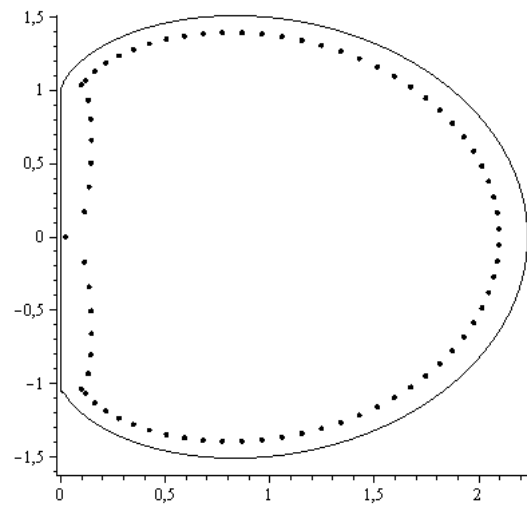


(d) $n = 45,$

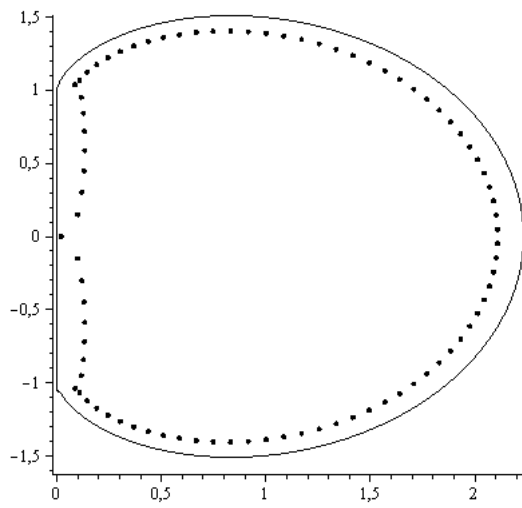
5 Schwache Asymptotiken



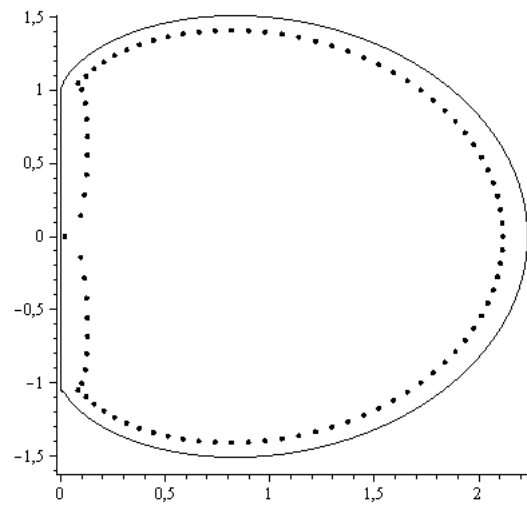
(e) $n = 60,$



(f) $n = 75,$



(g) $n = 85,$



(h) $n = 90.$

Literaturverzeichnis

- [1] V. Andrievskii, H. Blatt, *Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation*, Springer-Verlag, 2002.
- [2] C. Bosbach, W. Gawronski, *Strong Asymptotics for Jacobi Polynomials with varying Weights*, Methods and Applications of Analysis, 1999, 39-54.
- [3] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, 1977.
- [4] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag, 2007.
- [5] I. Gradshteyn, I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, seventh edition, 2007.
- [6] E. Hille, *Analytic Function Theory, Volume 2*, American Mathematical Society, second edition, 2002.
- [7] M. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] A. Kuijlaars, K. McLaughlin *Riemann-Hilbert Analysis for Laguerre Polynomials with Large Negative Parameter*, Computational Methods and Function Theory, Volume 1, 2001, 205-233.
- [9] Y. Luke, *The Special Functions and their Approximations, Volume I*, Academic Press, 1969.
- [10] Y. Luke, *The Special Functions and their Approximations, Volume II*, Academic Press, 1969.
- [11] J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, CRC Press, 2003.
- [12] C. Mendoza, R. Orive *The Szegő Curve and Laguerre polynomials with large negative parameters*, Preprint, 2010.
- [13] F. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, 1974.
- [14] F. Olver, D. Lozier, R. Boisvert, C. Clark *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [15] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley & Sons, fourth edition, 1967.

Literaturverzeichnis

- [16] T. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, J. Wiley & Sons, 1974.
- [17] P. Rosenbloom, *On Sequences of Polynomials, Especially Sections of Power Series*, Ph.D. thesis, Stanford Univ., 1944.
- [18] E. Saff, V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer-Verlag, 1997.
- [19] H. Srivastava, J. Zhou, Z. Wang, *Asymptotic Distributions of the Zeros of a Family of Hypergeometric Polynomials*, Preprint, 2010.
- [20] G. Szegő, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsberichte, Berliner Mathematische Gesellschaft 23, 1924, 50-64.
- [21] G. Szegő, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen*, Math. Zeitschr., 13, 1922, 28-55.
- [22] G. Szegő, *Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmässig konvergieren*, Sitzungsberichte, Berliner Mathematische Gesellschaft 21, 1922, 59-64.
- [23] G. Szegő, *Über die Nullstellen der Polynome einer Folge, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiete gleichmässig konvergiert*, Gött. Nachr., 1922, 137-143.
- [24] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, fourth edition, 1975.
- [25] J. Touchard, *Sur un problème de permutations*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 198, 1934.

Lebenslauf

Am 5. Februar 1983 wurde ich als Sohn der Eheleute Joachim und Karin Neuschel in Trier geboren. Von 1989 bis 1993 ging ich zur Grundschule in Schweich/Kreis Trier-Saarburg. Anschließend besuchte ich das Max-Planck-Gymnasium in Trier, wo ich 2002 das Abitur ablegte. In der Zeit von 2002 bis 2003 leistete ich Zivildienst im Altenheim St. Josef in Schweich.

Im Sommersemester 2003 nahm ich an der Universität Trier das Studium der Mathematik auf, welches ich im August 2008 mit Diplom abschloß. Seit September 2008 bin ich an der Abteilung für Mathematik der Universität Trier angestellt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Wolfgang Gawronski für seine wertvolle akademische Betreuung und Lehre und insbesondere dafür, dass er zu einem freundschaftlichen Wegbegleiter wurde.

Herrn Professor Jürgen Müller möchte ich meinen herzlichen Dank ausdrücken für die Übernahme der Rolle des zweiten Berichterstatters, vor allem jedoch für seine stets bereitwillige und wohlwollende Unterstützung.

Thorsten Neuschel