

# **Analytische Eigenschaften doppelt nichtzentraler Verteilungen**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Naturwissenschaften**

Dem Fachbereich IV der Universität Trier

vorgelegt von

**Yves Gessner**

Trier, im Oktober 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ii</b>
<b>Bezeichnungen</b>	<b>iii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>iv</b>
<b>1 Anwendungsfelder der doppelt nichtzentralen Verteilungen</b>	<b>1</b>
<b>2 Nichtzentrale Verteilungen</b>	<b>6</b>
2.1 Die nichtzentrale $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	6
2.2 Die doppelt nichtzentrale $F$ -Verteilung . . . . .	9
2.3 Die doppelt nichtzentrale $t$ -Verteilung . . . . .	15
<b>3 Vorzeichenreguläre Funktionen</b>	<b>18</b>
3.1 Funktionen vom Typ sign regular . . . . .	18
3.2 Funktionen vom Typ extended sign regular . . . . .	19
3.2.1 Definitionen und fundamentale Eigenschaften . . . . .	19
3.2.2 Extended sign regular Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen . . . . .	24
3.2.3 Vorzeichenwechsel einer Funktion und Nullstellenanzahl transformierter Kerne	27
<b>4 Strikte Unimodalität nichtzentraler Verteilungen</b>	<b>33</b>
4.1 Überblick über bekannte Resultate der nichtzentralen Verteilungen . . . . .	33
4.2 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen Verteilungen . . . . .	35
4.2.1 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen $F$ -Verteilung . . . . .	36
4.2.2 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen $t$ -Verteilung . . . . .	40
<b>5 Modusmonotonieeigenschaften der doppelt nichtzentralen Verteilungen</b>	<b>44</b>
5.1 Modusmonotonieeigenschaften bei Variation eines Nichtzentralitätsparameters	44
5.1.1 Monotonieeigenschaften des doppelt nichtzentralen $F$ -Modus . . . . .	48
5.1.2 Monotonieeigenschaft des doppelt nichtzentralen $t$ -Modus . . . . .	50
5.2 Monotonieeigenschaft des Modusfunktionswertes . . . . .	51
5.3 Weitere Fragestellungen und ungelöste Probleme . . . . .	52
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>55</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zweifache Kreuzklassifikation . . . . .	1
2.1	Modifizierte Besselfunktionen erster Art . . . . .	8
4.1	Dichten der doppelt nichtzentralen $F$ -Verteilung . . . . .	39
4.2	Dichten der doppelt nichtzentralen $t$ -Verteilung . . . . .	42
5.1	Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen $F$ -Modus bei Variation von $\lambda_1$ . . . . .	44
5.2	Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen $F$ -Modus bei Variation von $\lambda_2$ . . . . .	49
5.3	Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen $t$ -Modus bei Variation von $\mu$	50
5.4	Ableitungen der unskalierten doppelt nichtzentralen $F$ -Dichte . . . . .	53

# Bezeichnungen

Wir erklären an dieser Stelle gängige Bezeichnungen, die wir in dieser Arbeit verwenden. Unter  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $\mathbb{R}$  verstehen wir die Menge der natürlichen Zahlen, nichtnegativen ganzen Zahlen bzw. reellen Zahlen. Falls nicht explizit anders vermerkt oder aus dem Zusammenhang ersichtlich, soll ein Ausdruck der Form  $n > 0$  stets  $n \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$  bedeuten. Wir untersuchen ausschließlich reellwertige Funktionen und bezeichnen mit  $\mathcal{C}_m(X)$  die Menge der  $m$ -mal stetig differenzierbaren Abbildungen auf  $X$  und mit  $\mathcal{D}_k(X)$  die Menge der  $k$ -mal differenzierbaren Abbildungen auf  $X$ . Alle in dieser Arbeit auftretenden Integrale sind als Lebesgueintegrale aufzufassen. Fordern wir die Existenz eines Integrals, so fordern wir die Integrierbarkeit der zugrundeliegenden Funktion im Lebesgueschen Sinne.

Für Matrizen mit  $m$  Zeilen,  $n$  Spalten und Einträgen  $a_{ij}$  verwenden wir Ausdrücke der Form

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

sowie gelegentlich

$$(a_{ij})_{i,j=1}^m,$$

falls die Matrix symmetrisch ist.

Ferner verwenden wir gängige Symbole für die Identität  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ , die Gaußklammer  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$ , die Vorzeichenfunktion  $\text{sign}(x)$ , das Landausymbol  $\mathcal{O}(g)$ , das Produktmaß  $\otimes$  und die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_A(x)$ .

Ist  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Zufallsvariable, so nennen wir das Bildmaß von  $P$  unter  $X$  Verteilung von  $X$ . Wir sagen auch  $X$  ist nach  $P$  verteilt und schreiben hierfür  $X \sim P$ . Das Symbol  $\sim$  benutzen wir darüber hinaus in einem analytischen Sinne, um Asymptotiken zu beschreiben. Eine Verwechslung der beiden Bedeutungen ist durch den Zusammenhang ausgeschlossen.

# Vorwort

Zu den klassischen Verteilungen der Statistik zählen die (zentralen)  $\chi^2$ -,  $F$ - und  $t$ -Verteilungen. Die letzten beiden findet man in der Literatur auch unter den Namen *Fisher-Verteilung*, *Fisher-Snedecor-Verteilung* bzw. *Student-t-Verteilung*. Ihre besondere Bedeutung erhalten diese dadurch, dass wichtige Prüfgrößen, die aus normalverteilten Zufallsvariablen zusammengesetzt sind, den genannten Verteilungen genügen. Sind etwa die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $N_{0,1}$ -verteilt, so heißt

$$V := \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (0.1)$$

(zentral)  $\chi_n^2$ -verteilt. Für unabhängige Zufallsvariablen  $V \sim \chi_{n_1}^2$  und  $W \sim \chi_{n_2}^2$  nennen wir die Verteilung von

$$F := \frac{\frac{1}{n_1} V}{\frac{1}{n_2} W} \quad (0.2)$$

(zentrale)  $F_{n_1, n_2}$ -Verteilung. Gilt für die Zufallsvariablen  $X \sim N_{0,1}$ ,  $V \sim \chi_n^2$  und sind  $X, V$  unabhängig, so heißt

$$T := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} V}} \quad (0.3)$$

(zentral)  $t_n$ -verteilt (vgl. [CS11]).

Statistische Hypothesentests verwenden Testgrößen, die den oben genannten Verteilungen genügen. Damit lassen sich unter anderem Aussagen über Erwartungswerte, Varianzen und den Varianzvergleich normalverteilter Zufallsvariablen untersuchen. Beispiele für solche Testgrößen sind für  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  wie folgt gegeben:

Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$  definieren wir zunächst

$$\begin{aligned} \bar{X} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, & S^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & S &:= \sqrt{S^2}, \\ \bar{Y} &:= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j & \text{und} & & T^2 &:= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2. \end{aligned}$$

Sind  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$  unabhängig, wobei  $X_1, \dots, X_n$  jeweils  $N_{\mu, \sigma^2}$ - und  $Y_1, \dots, Y_m$  jeweils  $N_{\nu, \tau^2}$ -verteilt sind, so gilt (vgl. [Pes98])

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}} S} \sim t_{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{\tau^2 S^2}{\sigma^2 T^2} \sim F_{n-1, m-1}.$$

Die zentralen  $\chi^2$ -,  $F$ - und  $t$ -Verteilungen besitzen Lebesgue-dichten, die sich aus elementaren Funktionen zusammensetzen und analytisch leicht untersucht werden können. Die vorliegende Arbeit untersucht Verallgemeinerungen der genannten Verteilungen, die sogenannte doppelt nichtzentrale  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ - und die doppelt nichtzentrale  $t_{\mu, n, \lambda}$ -Verteilung. Die beiden letztgenannten Verteilungen sind wiederum Verallgemeinerungen der sogenannten einfach nichtzentralen  $F_{n_1, n_2, \lambda_1}$ - und der einfach nichtzentralen  $t_{\mu, n}$ -Verteilung. Zwar existieren für alle genannten Verteilungen Lebesgue-dichten, anders als jedoch im zentralen Fall erweist sich die Untersuchung der genannten Wahrscheinlichkeitsdichten als äußerst diffizil, da sich diese aus höhertranszendenten Funktionen zusammensetzen bzw. lediglich als Parameterintegral oder (Doppel-)Funktionsreihe darstellen lassen. Präzise Definitionen und Darstellungsformeln der nichtzentralen Verteilungen werden in Kapitel 2 bereitgestellt. Betrachtet man in (0.1) die unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_1 \sim N_{\mu_1, 1}, \dots, X_n \sim N_{\mu_n, 1}$  und setzt  $\lambda := \sum_{i=1}^n \mu_i^2$ , so ist  $V$  nichtzentral  $\chi_{n, \lambda}^2$ -verteilt. Aus (0.2) und (0.3) erhält man doppelt nichtzentrale Verteilungen, indem man  $V \sim \chi_{n_1, \lambda_1}^2, W \sim \chi_{n_2, \lambda_2}^2$  bzw.  $X \sim N_{\mu, 1}, V \sim \chi_{n, \lambda}^2$  wählt. Wichtige analytische Eigenschaften der einfach nichtzentralen  $\chi_{n, \lambda}^2$ -,  $F_{n_1, n_2, \lambda_1}$ - und  $t_{\mu, n}$ -Dichten konnten durch VAN AUBEL und GAWRONSKI gezeigt werden (vgl. [AG00b], [AG00a]). In den zitierten Arbeiten konnten die Autoren die sogenannte *Glockenförmigkeit* und somit die *Unimodalität* (vgl. auch Kapitel 4) der untersuchten Wahrscheinlichkeitsdichten nachweisen. Der jeweils eindeutig bestimmte *Modus*, graphisch darstellbar als Gipfelstelle der untersuchten Dichte, ist dabei nur implizit als Nullstelle der ersten Ableitung gegeben. Der Nachweis der monotonen Abhängigkeit des Modus als Funktion der *Nichtzentralitätsparameter*  $\lambda, \lambda_1$  bzw.  $\mu$  sowie als Funktion der *Freiheitsgrade*  $n, n_1$  bzw.  $n_2$  gelang ebenso wie eine vollständige asymptotische Entwicklung der Modi als Funktion der Nichtzentralitätsparameter (vgl. [AG03] für eine Übersicht der erzielten Resultate). Die Theorie der vorzeichenregulären Funktionen (vgl. [Kar68]) sichert dabei an entscheidenden Stellen die Durchführbarkeit gewisser Beweistechniken.

Die vorliegende Arbeit untersucht die analytischen Eigenschaften der doppelt nichtzentralen  $F$ - und  $t$ -Verteilungen und knüpft somit an die Arbeiten von VAN AUBEL und GAWRONSKI an. Es wird sich zeigen, dass viele Techniken, die im einfach nichtzentralen Fall wichtige Resultate sicherten, im doppelt nichtzentralen Fall nur noch eingeschränkt bzw. modifiziert verwendet werden können.

Kapitel 1 beschreibt die vielfältigen Anwendungsfelder, in denen die doppelt nichtzentralen Verteilungen Verwendung finden und dient somit als Motivation für die weiteren Untersuchungen. Da einführende Beispiele für die Verwendung der doppelt nichtzentralen Verteilungen in der Literatur nur selten zu finden sind und meist eine große Vertrautheit mit Begriffen und Techniken der Statistik voraussetzen, enthält Kapitel 1 ein ausführliches Beispiel für die Verwendung der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung in der zweifachen Varianzanalyse, welches lediglich elementare statistische Grundkenntnisse voraussetzt.

Eine systematische Einführung der zu untersuchenden Verteilungen erfolgt in Kapitel 2. Wir leiten dort Integral- und Reihendarstellungen der zugehörigen Lebesgue-dichten her, die wir bei den weiteren Untersuchungen in Kapitel 4 und Kapitel 5 verwenden werden.

Bei der Sichtung der relevanten Literatur zeigte sich, dass wichtige, in Kapitel 2 hergeleitete Darstellungsformeln nicht benutzt werden bzw. nur vereinzelt und unsystematisch Verwendung bei der Diskussion der doppelt nichtzentralen Verteilungen finden.

Kapitel 3 behandelt vorzeichenreguläre Funktionen und bildet somit das theoretische Grundgerüst für die Untersuchung analytischer Eigenschaften der doppelt nichtzentralen Verteilungen. Wir führen die wichtigsten Grundbegriffe aus der Theorie der vorzeichenregulären Funktionen ein und modifizieren zentrale Resultate aus [Kar68], die für Funktionen vom Typ *extended sign regular* nicht vollständig vorliegen.

Kapitel 4 und Kapitel 5 beinhalten die Hauptresultate dieser Arbeit. In Kapitel 4 zeigen wir für eine große Klasse doppelt nichtzentraler Verteilungen die strikte Unimodalität (vgl. Satz 4.2.6, Satz 4.2.10). Hier weisen wir die bisher vermutete, jedoch lediglich aus Approximationen abgeleitete, strikt unimodale Gestalt der Dichtefunktion nach. Der dabei eindeutig bestimmte Modus, charakterisiert als Gipfelstelle der Dichtefunktion, ist Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 5. Wir untersuchen den Modus als Funktion gewisser Nichtzentralitätsparameter und weisen monotone Abhängigkeiten nach (vgl. Satz 5.1.9, Satz 5.1.10, Satz 5.1.11 sowie Satz 5.2.1).

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Wolfgang Gawronski für das Ermöglichen der Promotion und das stets ausgezeichnete Betreuungsverhältnis. Die fachliche und außerfachliche Unterstützung haben entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Professor Jürgen Müller danke ich sehr herzlich dafür, dass er sich spontan dazu bereit erklärt hat, die Dissertation zu begutachten.

Ferner danke ich Olga Beljaew, Thierry Meyrath, Thorsten Neuschel und Christoph Tasto für die kritische Durchsicht der Arbeit.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern für den Rückhalt und die Unterstützung während meines gesamten Studiums danken.

Die Dissertation wurde gefördert durch ein zweijähriges Promotionsstipendium der Stipendienstiftung Rheinland-Pfalz.

# Kapitel 1

## Anwendungsfelder der doppelt nichtzentralen Verteilungen

Aufgrund des Mangels einführender Beispiele für die Verwendung der doppelt nichtzentralen Verteilungen stellen wir hier in Anlehnung an [Sch59, S. 134–135] ein Anwendungsbeispiel eines doppelt nichtzentralen  $F$ -Tests aus dem Bereich der zweifachen Varianzanalyse vor. Dieses Beispiel ist motiviert durch folgende Situation: Es seien  $I, J \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Um die Auswirkungen zweier Düngemittel  $A$  und  $B$  auf das Wachstum von Kartoffeln zu untersuchen, werden  $I \cdot J$  identische Testfelder bepflanzt und mit jeweils  $i \in \{1, \dots, I\}$  Mengeneinheiten von Düngemittel  $A$  und jeweils  $j \in \{1, \dots, J\}$  Mengeneinheiten von Düngemittel  $B$  gedüngt. Abbildung 1.1 veranschaulicht dies mit den Sprechweisen der Varianzanalyse (vgl. beispielsweise [Ras95, S. 417ff]).

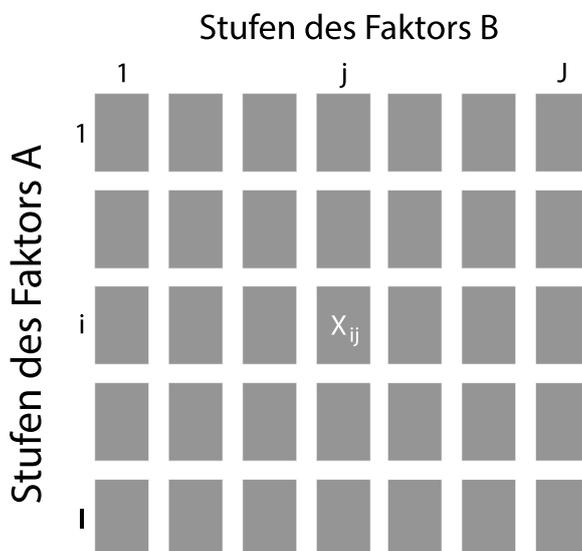


Abb. 1.1: Zweifache Kreuzklassifikation

Während der Ernte wird dann aus jedem Feld  $(i, j)$  genau eine Kartoffel entnommen und ihr Gewicht festgestellt. Das festgestellte Gewicht aus Feld  $(i, j)$  fassen wir als Realisation einer Zufallsvariablen  $X_{ij}$  auf.

Hierbei treffen wir folgende Modellannahmen:

- i) Die  $I \cdot J$  Zufallsvariablen  $X_{ij}$  sind stochastisch unabhängig.
- ii) Für alle  $1 \leq i \leq I$ ,  $1 \leq j \leq J$  gilt  $X_{ij} \sim N_{\mu_{ij}, \sigma^2}$ .

Die letzte Annahme wird dadurch gerechtfertigt, dass wir davon ausgehen, dass das Gewicht der Kartoffel in Feld  $(i, j)$  unter idealisierten Bedingungen einen „wahren Wert“  $\mu_{ij} > 0$  besitzt, welcher zufallsgesteuerten Abweichungen unterliegt. Das festgestellte Gewicht setzt sich somit zusammen aus der Summe von  $\mu_{ij}$  und einer zufallsgesteuerten Abweichung  $\varepsilon_{ij}$ . Gehen wir zusätzlich davon aus, dass  $\varepsilon_{ij}$  keinen systematischen Anteil besitzt und normalverteilt ist, also  $\varepsilon_{ij} \sim N_{0, \sigma^2}$  ist, so erhalten wir  $X_{ij} \sim N_{\mu_{ij}, \sigma^2}$ . Wir führen nun Größen ein, die wir für die folgenden Betrachtungen benötigen:

$$\mu := \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} \mu_{ij}, \quad \mu_{i\bullet} := \frac{1}{J} \sum_j \mu_{ij}, \quad \mu_{\bullet j} := \frac{1}{I} \sum_i \mu_{ij}.$$

Mit diesen Größen kann man zeigen: Es gibt eine eindeutige Zerlegung der Form

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

mit  $\sum_i \alpha_i = 0$ ,  $\sum_j \beta_j = 0$ ,  $\sum_i \gamma_{ij} = 0$  ( $1 \leq j \leq J$ ),  $\sum_j \gamma_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq I$ ) und es gilt

$$\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu, \quad \beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu, \quad \gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j.$$

Die Zerlegung kann so interpretiert werden, dass sich  $\mu_{ij}$  zusammensetzt aus einem festen *Gesamtmittelwert*  $\mu$ , einer *Hauptwirkung*  $\alpha_i$  der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$ , einer *Hauptwirkung*  $\beta_j$  der  $j$ -ten Stufe des Faktors  $B$  sowie einer Wechselwirkung  $\gamma_{ij}$  zwischen der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$  und der  $j$ -ten Stufe des Faktors  $B$ . Übertragen auf unser Beispiel setzt sich also das Gewicht einer Kartoffel vom Feld  $(i, j)$  zusammen aus einem festen Wert  $\mu$  und dem Einfluss von  $i$  Mengeneinheiten von Dünger  $A$ ,  $j$  Mengeneinheiten von Dünger  $B$  und der Wechselwirkung  $\gamma_{ij}$  zwischen beiden Düngemitteln.

In diesem Zusammenhang interessiert man sich vornehmlich für das Testen der Hypothesen

$$\begin{aligned} H_A &: \alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0, \\ H_B &: \beta_1 = \dots = \beta_J = 0, \\ H_{AB} &: \gamma_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J. \end{aligned}$$

Ohne weitere Annahmen an die Wechselwirkungen  $\gamma_{ij}$  ist das Testen obiger Hypothesen mit einem gewöhnlichen  $F$ -Test in der hier betrachteten Situation nicht möglich (vgl. [Sch59, S. 130]). Dieser Mangel kann jedoch behoben werden, wenn von jedem Feld  $N > 1$  Stichproben entnommen werden. In [Pes98, S. 221] sind für diesen Fall Testgrößen angegeben, die für das Testen obiger Hypothesen herangezogen werden können. Für die weitere Betrachtung nehmen wir an, dass für die Wechselwirkung  $\gamma_{ij}$  die Beziehung

$$\gamma_{ij} = G\alpha_i\beta_j$$

mit einer Konstante  $G \in \mathbb{R}$  gelte. Man kann zeigen, dass eine solche Situation für Feld  $(i, j)$  schon dann vorliegt, wenn  $\gamma_{ij}$ , als Funktion von  $\alpha_i$  und  $\beta_j$  betrachtet, ein Polynom vom Grad 2 ist (vgl. [Sch59, S. 130]).

Für  $1 \leq i \leq I$ ,  $1 \leq j \leq J$  seien also die unabhängigen Zufallsvariablen  $X_{ij} \sim N_{\mu_{ij}, \sigma^2}$  mit

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + G\alpha_i\beta_j, \quad \sum_i \alpha_i = 0, \quad \sum_j \beta_j = 0$$

gegeben. Für den Parameterraum

$$\Theta := \left( (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2) \in \mathbb{R}^{I+J+2} \times (0, \infty) : \sum_i \alpha_i = 0, \sum_j \beta_j = 0 \right)$$

betrachten wir auf  $(\mathbb{R}^{IJ}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{IJ}))$  das statistische Modell

$$(P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2)} : (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2) \in \Theta)$$

mit

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2)} := N_{\mu_{11}, \sigma^2} \otimes \dots \otimes N_{\mu_{1J}, \sigma^2} \otimes \dots \otimes N_{\mu_{I1}, \sigma^2} \otimes \dots \otimes N_{\mu_{IJ}, \sigma^2}.$$

Zur weiteren Betrachtung definieren wir die Statistiken

$$X_{i\bullet} := \frac{1}{J} \sum_j X_{ij}, \quad X_{\bullet j} := \frac{1}{I} \sum_i X_{ij}, \quad X_{\bullet\bullet} := \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} X_{ij}$$

sowie hieraus abgeleitet

$$\begin{aligned} SS(A) &:= J \sum_i (X_{i\bullet} - X_{\bullet\bullet})^2, \\ SS(AB) &:= \sum_{i,j} (X_{ij} - X_{i\bullet} - X_{\bullet j} + X_{\bullet\bullet})^2. \end{aligned}$$

Mit [JKB95, S. 434] schließen wir

$$\begin{aligned} \frac{SS(A)}{\sigma^2} &\sim \chi_{I-1, \frac{J}{\sigma^2} \sum_i \alpha_i^2}, \\ \frac{SS(AB)}{\sigma^2} &\sim \chi_{(I-1)(J-1), \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} \gamma_{ij}^2}, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$\frac{\frac{1}{I-1} SS(A)}{\frac{1}{(I-1)(J-1)} SS(AB)} \sim F_{I-1, (I-1)(J-1), \frac{J}{\sigma^2} \sum_i \alpha_i^2, \frac{G^2}{\sigma^2} \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j)^2}$$

folgt.

Ist nun die Nullhypothese  $H_0 := H_A \subset \Theta$  gegeben durch

$$H_A := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2) \in \Theta : \alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0 \right\}$$

und ist  $a \in [0, 1]$ , so definieren wir den kritischen Bereich

$$C := \left( \frac{\frac{1}{I-1} SS(A)}{\frac{1}{(I-1)(J-1)} SS(AB)} \geq F_{F_{I-1, (I-1)(J-1)}^{-1}}^{-1}(1-a) \right).$$

Damit ist die messbare Abbildung  $\psi := \mathbb{1}_C: \mathbb{R}^{IJ} \rightarrow \{0, 1\}$  ein Test zum effektiven Niveau  $a$ . Die Gütefunktion des Tests ist gegeben durch

$$\Theta \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2) \mapsto P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2)}(C)$$

mit

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J, \mu, G, \sigma^2)}(C) = F_{F_{I-1, (I-1)(J-1), \frac{J}{\sigma^2} \sum_i \alpha_i^2, \frac{G^2}{\sigma^2} \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j)^2}}^{-1} \left( \left[ F_{F_{I-1, (I-1)(J-1)}^{-1}}^{-1}(1-a), \infty \right) \right).$$

Hierbei bezeichnet

$$F_{F_{I-1, (I-1)(J-1), \frac{J}{\sigma^2} \sum_i \alpha_i^2, \frac{G^2}{\sigma^2} \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j)^2}}$$

eine doppelt nichtzentrale  $F$ -Verteilung und

$$F_{F_{I-1, (I-1)(J-1)}^{-1}}^{-1}$$

die Quantilfunktion einer zentralen  $F$ -Verteilung.

Neben der Anwendung in der Varianzanalyse findet die doppelt nichtzentrale  $F$ -Verteilung weitere Verwendung in Modellen der Ökonometrie (vgl. [KO98]), in der Regressionsanalyse bei der Anwendung des sogenannten *Regression Equation Specification Error Tests* (RESET) (vgl. [Ram69], [DG98]) sowie in ingenieurwissenschaftlichen Bereichen wie etwa der Signalverarbeitung, der Radartechnik und der Mustererkennung (vgl. [Pri64], [HR85]).

Die doppelt nichtzentrale  $t$ -Verteilung findet Anwendung in der Varianzanalyse (vgl. [Sch59, S. 137]), in der Regressionsanalyse (vgl. [MC76], [Ün06]) sowie in der finanzmathematischen Modellierung sogenannter *financial returns data* (vgl. [BP07, S. 8ff]). Die nichtzentrale  $t$ -Verteilung spielt außerdem eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Gütefunktion  $t$ -verteilter Teststatistiken (vgl. [JKB95, S. 509]) und bei der Konstruktion von Konfidenzintervallen (vgl. [JKB95, S. 510]). Verweise auf weitere Anwendungen findet man in [JKB95, S. 512].

Die praktische Bedeutung der nichtzentralen Verteilungen spiegelt sich auch in ihrer Implementierung innerhalb moderner Computeralgebrasysteme (*Maple*, *Matlab*, *Mathematica*) wider. Dies ermöglicht eine erleichterte Verwendung der entsprechenden Dichten, Verteilungs- und Quantilfunktionen für praktische Anwendungen. Die Möglichkeit die doppelt nichtzentrale  $F$ -Dichte zu plotten und somit charakteristische Eigenschaften

exemplarisch zu untersuchen ist in *Mathematica 8* seit 2010 möglich. Alle für diese Arbeit erstellten Plots, die die doppelt nichtzentrale  $F$ -Verteilung betreffen, wurden mit *Mathematica 9* erstellt.

Leider ist die doppelt nichtzentrale  $t$ -Verteilung in keinem der genannten Computeralgebrasysteme implementiert. Die für die Arbeit angefertigten Abbildungen wurden mit dem Softwaresystem *Dataplot* erstellt, welches vom *National Institute of Standards and Technology (NIST)* zur Verfügung gestellt wird.

Auch wenn die verwendeten Algorithmen zur Berechnung der nichtzentralen Verteilungen hinsichtlich Genauigkeit und Geschwindigkeit ständig verbessert werden (vgl. [BP07], [BP02]), darf nicht vergessen werden, dass es sich lediglich um Approximationen handelt. Diese sind zwar für praktische Belange äußerst wichtig, verleiten jedoch schnell dazu, gewisse Eigenschaften als gegeben zu akzeptieren, die aufgrund ihrer mathematischen Komplexität nicht nachgewiesen wurden. Hier setzt die vorliegende Arbeit an. Durch den präzisen Nachweis analytischer Eigenschaften der doppelt nichtzentralen Dichten gelingt es, die Gestalt und das Verhalten der doppelt nichtzentralen  $F$ - und  $t$ -Dichten und somit die Eigenschaften der zugrundeliegenden Verteilungen besser zu verstehen.

# Kapitel 2

## Nichtzentrale Verteilungen

Wir definieren in diesem Kapitel die für die vorliegende Arbeit grundlegenden doppelt nichtzentralen Verteilungen und leiten Darstellungsformeln sowie wichtige Grenzwert- und Differentiationseigenschaften der zugehörigen Dichten her.

### 2.1 Die nichtzentrale $\chi^2$ -Verteilung

Ausgangspunkt ist die nichtzentrale  $\chi^2$ -Verteilung, die wir mithilfe der zentralen  $\chi^2$ -Verteilung einführen.

**Definition 2.1.1.** *Es sei  $n > 0$ . Dann ist durch  $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$p_n(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

*eine Lebesguedichte gegeben. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt zentrale  $\chi_n^2$ -Verteilung.*

**Definition 2.1.2.** *Es seien  $n > 0$  und  $\lambda \geq 0$ . Durch  $p_{n,\lambda}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$p_{n,\lambda}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{j!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^j p_{n+2j}(x)$$

*ist dann ebenfalls eine Lebesguedichte gegeben. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung nennen wir nichtzentrale  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter  $\lambda$ . Für  $\lambda = 0$  erhalten wir die zentrale  $\chi_n^2$ -Verteilung.*

Im Falle  $n \in \mathbb{N}$  stellt das nachfolgende Lemma eine Beziehung zwischen unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen und einer nichtzentral  $\chi_{n,\lambda}^2$ -verteilten Zufallsvariablen her. Diese Charakterisierung wird häufig auch als Definition der nichtzentralen  $\chi^2$ -Verteilung benutzt (vgl. [CS11, S. 16], [JKB95, S. 433]).

**Lemma 2.1.3.** *Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und normalverteilt mit  $X_i \sim N_{\mu_i, 1}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist die Zufallsvariable*

$$X := \sum_{i=1}^n X_i^2$$

*nichtzentral  $\chi_{n, \lambda}^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter  $\lambda := \sum_{i=1}^n \mu_i^2$ .*

Eine weitere Darstellung mithilfe der modifizierten Besselfunktion wird sich für spätere Untersuchungen als nützlich erweisen (vgl. [JKB95, S. 433]).

**Satz 2.1.4.** *Für  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $x > 0$  gilt*

$$p_{n, \lambda}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda+x}{2}} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda x}).$$

*Hierbei bezeichnet  $I_\nu$  die modifizierte Besselfunktion erster Art mit Ordnung  $\nu \in \mathbb{R}$ , welche für  $x > 0$  gegeben ist durch*

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Bei der Untersuchung der  $\chi_{n, \lambda}^2$ -Dichte erweist sich gelegentlich auch eine Produktdarstellung der modifizierten Besselfunktion als hilfreich. Für  $\nu > -1$  gilt

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{j_{\nu, k}^2}\right).$$

Hierbei setzen sich die Faktoren aus den abzählbar vielen Nullstellen  $j_{\nu, k}$  der Besselfunktion  $J_\nu$  zusammen, welche  $0 < j_{\nu, 1} < j_{\nu, 2} < \dots$  genügen. Ferner gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{\nu, k}^2} = \frac{1}{4(\nu + 1)}$$

(vgl. [Olv10, S. 217], [Tem96, S. 243], [Wat66, S. 498, S. 502], [Bar10, S. 16]).

**Bemerkung 2.1.5.**

- i) In gewissen Situationen wird es von Vorteil sein, die nichtzentrale  $\chi_{n, \lambda}^2$ -Dichte als Funktion eines reellen Freiheitsgrades  $n$  aufzufassen, wie es Definition 2.1.2 erlaubt.*
- ii) Aus Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der modifizierten Besselfunktion erster Art lassen sich zusammen mit Satz 2.1.4 selbige der nichtzentralen  $\chi_{n, \lambda}^2$ -Dichte ableiten. Die Funktion  $p_{n, \lambda}(x)$  ist also auf  $(0, \infty)$  beliebig oft differenzierbar.*
- iii) Für alle  $n, x > 0$  gilt  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} p_{n, \lambda}(x) = p_{n, 0}(x)$ .*

iv) Für alle  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $x > 0$  gilt

$$p_{n,\lambda}(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(x-1)}}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} p_{n,1}(\lambda x).$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt exemplarisch die Gestalt der modifizierten Besselfunktionen erster Art.

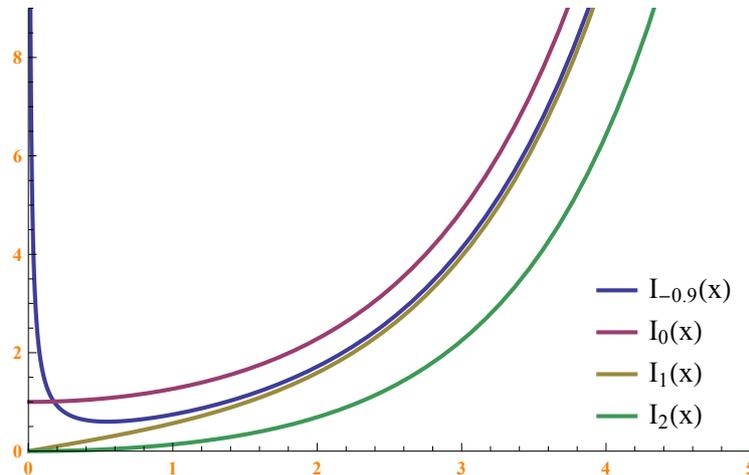


Abb. 2.1: Modifizierte Besselfunktionen erster Art

Es wird sich zeigen dass bei der Differentiation von  $p_{n,\lambda}$  die Laguerre-Polynome  $L_n^{(\alpha)}$  auftreten, die wir im Folgenden einführen (vgl. [Sze85, S. 100–101]).

**Definition 2.1.6.** Es sei  $\alpha > -1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann nennen wir die Funktion

$$L_k^{(\alpha)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^{\alpha+k} e^{-x})$$

das  $k$ -te Laguerre-Polynom.

**Bemerkung 2.1.7.** Man rechnet direkt nach, dass es sich bei  $L_k^{(\alpha)}$  in der Tat um ein Polynom vom Grad  $k$  handelt. Für  $\alpha > -1$  und  $m, n \in \mathbb{N}_0$  gilt die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{nm} \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}.$$

Hierbei bezeichnet  $\delta_{nm}$  das Kronecker-Symbol.

Damit gewinnt man aus der Darstellung in Definition 2.1.2 eine Reihendarstellung für die Ableitungen der  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Dichte (vgl. [AG00b, S. 241]).

**Satz 2.1.8.** *Es seien  $n > 2$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k < \frac{n}{2}$ . Dann gilt für  $x > 0$*

$$p_{n,\lambda}^{(k)}(x) = \frac{k!}{2^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{j!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^j p_{n+2j,0}(x) \left(\frac{x}{2}\right)^{-k} L_k^{\left(\frac{n}{2}+j-k-1\right)}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts halten wir Ableitungsformeln fest, die wir später nutzen werden, um Ableitungsformeln der doppelt nichtzentralen Dichten aufzustellen (vgl. [JKB95, S. 442–443], [AG00a, S. 294]).

**Satz 2.1.9.** *Für  $n > 2$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $x > 0$  gilt*

$$\begin{aligned} p'_{n,\lambda}(x) &= \frac{1}{2} (p_{n-2,\lambda}(x) - p_{n,\lambda}(x)), \\ p'_{n,\lambda}(x) &= \frac{1}{2x} ((n-2-x)p_{n,\lambda}(x) + \lambda p_{n+2,\lambda}(x)). \end{aligned}$$

Ferner gilt für  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} p_{n,\lambda}(x) = \frac{1}{2} (p_{n+2,\lambda}(x) - p_{n,\lambda}(x)).$$

## 2.2 Die doppelt nichtzentrale $F$ -Verteilung

Ausgehend von den Definitionen des vorangegangenen Abschnitts führen wir nun die doppelt nichtzentrale  $F$ -Verteilung als Quotient zweier nichtzentraler  $\chi^2$ -Verteilungen ein (vgl. [Ras95, S. 172]).

**Definition 2.2.1.** *Es seien  $n_1, n_2 > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  und  $Q_1 \sim \chi_{n_1, \lambda_1}^2$ ,  $Q_2 \sim \chi_{n_2, \lambda_2}^2$  unabhängige Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable*

$$F := \frac{n_2 Q_1}{n_1 Q_2}$$

*doppelt nichtzentral  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -verteilt.*

Die Lebesguedichte der doppelt nichtzentralen  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -Verteilung erhalten wir unter Anwendung des nachfolgenden wohlbekanntes Satzes (vgl. [SW93, S. 656]).

**Satz 2.2.2.** *Es seien  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängige reelle Zufallsvariablen, deren Verteilungen die Lebesguedichten  $f$  bzw.  $g$  besitzen. Dann ist  $X/Y$  fast überall definiert und besitzt die Dichte*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g\left(\frac{t}{x}\right) \frac{|t|}{x^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(xt)g(t) |t| dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{t}\right)g\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{|t|^3} dt.$$

**Lemma 2.2.3.** *Die Zufallsvariablen  $Q_1, Q_2$  seien unabhängig nichtzentral  $\chi^2$ -verteilt mit Dichten  $p_{n_1, \lambda_1}$  bzw.  $p_{n_2, \lambda_2}$ . Dann nennen wir die Verteilung der Zufallsvariable  $F := Q_1/Q_2$  unskalierte  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -Verteilung. Ihre Dichtefunktion  $\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$  ist für  $x > 0$  gegeben durch*

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}(t) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{t}{x^2} dt = \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt \\ &= \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{x}{t}\right) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^3} dt.\end{aligned}$$

*Beweis.* Die Darstellung leitet sich unmittelbar aus Satz 2.2.2 ab. □

Für die Dichtefunktion  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung gilt somit für  $x > 0$

$$\begin{aligned}g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \frac{n_1}{n_2} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}\left(\frac{n_1}{n_2}x\right) = \frac{n_2}{n_1} \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}(t) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{n_2}{n_1} \frac{t}{x}\right) \frac{t}{x^2} dt \\ &= \frac{n_1}{n_2} \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{n_1}{n_2}xt\right) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt \\ &= \frac{n_1}{n_2} \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{x}{t}\right) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^3} dt.\end{aligned}$$

**Bemerkung 2.2.4.**

i) *Im Folgenden werden wir gelegentlich die unskalierte doppelt nichtzentrale  $F$ -Dichte betrachten. Der Zusammenhang zur doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte ist (wie im Beweis zu Lemma 2.2.3 verwendet) gegeben durch*

$$g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \frac{n_1}{n_2} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}\left(\frac{n_1}{n_2}x\right).$$

ii) *Im Falle  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  erhalten wir die wohlbekannte zentrale  $F$ -Verteilung (vgl. [Ras95, S. 171]), deren Lebesguedichte gegeben ist durch*

$$g_{n_1, n_2, 0, 0}(x) = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}-1} n_2^{\frac{n_2}{2}-1} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_2 + n_1 x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}.$$

*Für die unskalierte zentrale  $F$ -Verteilung folgt hieraus*

$$\tilde{g}_{n_1, n_2, 0, 0}(x) = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}.$$

iii) Die Verteilung mit den Parametern  $\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$  nennen wir einfach nichtzentrale  $F$ -Verteilung. Mit Definition 2.1.2 und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man folgende Reihendarstellung der unskalierten einfach nichtzentralen  $F$ -Dichte

$$\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{2}}}{j!} \left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^j \tilde{g}_{n_1+2j, n_2, 0, 0}(x).$$

Hierbei ergibt sich die unskalierte einfach nichtzentrale  $F$ -Dichte als poissongewichtete Reihe unskalierter zentraler  $F$ -Dichten.

iv) Ebenfalls mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und obigen Bemerkungen erhalten wir eine Reihendarstellung der unskalierten doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte als poissongewichtete Reihe unskalierter einfach nichtzentraler  $F$ -Dichten. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^j \tilde{g}_{n_1, n_2+2j, \lambda_1, 0}(x) \\ &= \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}} \lambda_1^k \lambda_2^j}{j! k! 2^{j+k}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2} + k + j\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2} + j\right)} \frac{x^{\frac{n_1}{2}+k-1}}{(1+x)^{\frac{n_1+n_2}{2}+k+j}}. \end{aligned}$$

Die erste Identität, die sich im Wesentlichen durch die Darstellung in Definition 2.1.2 ergibt, ist in der Literatur nicht sehr gebräuchlich. Sie liefert jedoch einen einfachen Weg zur Herleitung der Doppelreihendarstellung der doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte. Für eine wesentlich aufwändigere Herleitung vergleiche man [Ras95, S. 172–173].

Für  $n_1, n_2 > 0, \lambda_1 \geq 0$  und  $x > 0$  folgt somit

$$\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}(x) + \mathcal{O}(\lambda_2), \quad \lambda_2 \rightarrow 0+.$$

Bei der Untersuchung von Unimodalitätseigenschaften der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung wird die Ableitung der  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -Dichte von Bedeutung sein. Es wird sich zeigen, dass die Ableitung gewonnen werden kann, indem man in Lemma 2.2.3 Integration und Differentiation vertauscht. Um dies zu begründen, ist es notwendig einige Eigenschaften der nichtzentralen  $\chi^2$ -Dichte näher zu betrachten, welche in den folgenden Lemmata zusammengestellt sind.

**Lemma 2.2.5.** *Es seien  $\alpha \in \mathbb{R}, n > 0$  und  $\lambda \geq 0$ . Dann gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha p_{n, \lambda}(x) = 0.$$

*Beweis.* Mit Definition 2.1.1 ist die Aussage für  $\alpha \in \mathbb{R}, n > 0$  und  $\lambda = 0$  klar. Für  $\lambda > 0$  betrachten wir im Folgenden die Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\alpha p_{n, \lambda}(x).$$

Dann gilt mit Satz 2.1.4 für  $x > 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha x^{2\alpha} p_{n,\lambda}\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha + \frac{n-2}{2}} x^{\frac{n-2}{2} + 2\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} I_{\frac{n-2}{2}}(x). \end{aligned}$$

Mit der modifizierten Besselfunktion erster Art  $I_\nu$  erhalten wir unter Benutzung der Asymptotik

$$I_{\frac{n-2}{2}}(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty$$

(vgl. [Olv10, S. 252]) den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) = 0,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

**Bemerkung 2.2.6.**

- i) Es gibt ein  $M > 0$  mit  $x^\alpha p_{n,\lambda}(x) \leq \frac{1}{x^2}$  für alle  $x > M$ .
- ii) Das Integral  $\int_a^\infty x^\alpha p_{n,\lambda}(x) dx$  existiert für alle  $a \in (0, \infty)$ .
- iii) Für  $\alpha \geq 0$  existiert das Integral  $\int_0^\infty x^\alpha p_{n,\lambda}(x) dx$ .
- iv) Ferner gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < n < 2 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}}, & n = 2 \\ 0, & n > 2. \end{cases}$$

**Lemma 2.2.7.** Es seien  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{n,\lambda}^{(k)}(x) = 0.$$

*Beweis.* Für den Fall  $k = 0$  ist die Aussage bereits in Lemma 2.2.5 enthalten. Für  $\lambda = 0$  ist die Aussage klar. Es sei also  $k \in \mathbb{N}$  und  $\lambda > 0$ . Dann ist es hinreichend

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{n,\lambda}^{(k)}\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) = 0$$

zu zeigen.

Wir betrachten  $p_{n,\lambda}\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) = c e^{-\mu x^2} x^\nu I_\nu(x)$  mit  $c := \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2\lambda^{\frac{n-2}{2}}}$ ,  $\mu := \frac{1}{2\lambda}$  und  $\nu := \frac{n-2}{2}$ . Aus

$$I'_\nu(x) = \frac{1}{2} (I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)), \quad x > 0$$

(vgl. [Olv10, S. 251]) folgt induktiv eine Darstellung als Summe der Form

$$p_{n,\lambda}^{(k)}\left(\frac{x^2}{\lambda}\right) = \sum_{l=0}^m c_l e^{-\mu x^2} x^{\alpha_l} I_{\nu_l}(x),$$

hierbei sind  $c_l, \alpha_l$  reelle Konstanten und  $I_{\nu_l}(x)$  modifizierte Besselfunktionen der Ordnung  $\nu_l \in \mathbb{R}$ . Unter erneuter Anwendung der Asymptotik  $I_{\nu_l}(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ ,  $x \rightarrow \infty$  (vgl. [Olv10, S. 252]) folgt nun für jeden Summanden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c_l e^{-\mu x^2} x_l^{\alpha_l} I_{\nu_l}(x) = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Wir sind nun in der Lage die Differenzierbarkeitseigenschaft der doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte zu untersuchen.

**Satz 2.2.8.** *Es seien  $n_1, n_2 > 0$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ . Dann ist die unskalierte  $F$ -Dichte  $\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$  im Intervall  $(0, \infty)$  beliebig oft differenzierbar und es gilt für  $k \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt \\ &= \int_0^{\infty} p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Für die  $k$ -te Ableitung von  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$  gilt somit

$$g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}(x) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{k+1} \int_0^{\infty} p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}\left(\frac{n_1}{n_2}xt\right) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} dt.$$

*Beweis.* Wir spalten den Beweis in zwei Teile auf, und zeigen, dass sowohl die Funktion

$$f_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_0^1 p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt$$

als auch die Funktion

$$\hat{f}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_1^{\infty} p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt$$

im Intervall  $(0, \infty)$  beliebig oft differenzierbar sind und dass hierbei eine Vertauschung von Differentiation und Integration legitim ist.

1. Für  $f_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  betrachten wir zunächst die erste Ableitung. Ausgehend von

$$p_{n, \lambda}(x) = c e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{4}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda x}), \quad c := \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}}$$

erhalten wir für alle  $x > 0$  die Abschätzung

$$\left| p'_{n, \lambda}(x) \right| \leq c_1 x^{\frac{n-2}{4}-1} \left| I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right| + c_2 x^{\frac{n-2}{4}} \left| I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right| + c_3 x^{\frac{n-2}{4}-\frac{1}{2}} \left| I'_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right|$$

mit positiven Konstanten  $c_1, c_2, c_3$ .

Im Folgenden sei nun  $x_0 \in (0, \infty)$  beliebig,  $\delta := \frac{x_0}{2}$ ,  $R > 0$  und  $t \in (0, 1)$ .

a) Für  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1) k! 2^{2k+\nu}} x^{2k}, \\ I'_\nu(x) &= x^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k + \nu}{\Gamma(k + \nu + 1) k! 2^{2k+\nu}} x^{2k}. \end{aligned}$$

b) Weiter gilt für  $x \in (0, R)$

$$\begin{aligned} |I_\nu(x)| &\leq L_1 x^\nu, \\ |I'_\nu(x)| &\leq L_2 x^{\nu-1}. \end{aligned}$$

c) Ferner halten wir für  $x \in U_\delta(x_0)$  die folgenden elementaren Abschätzungen fest

$$\begin{aligned} |I_\nu(\sqrt{\lambda t x})| &\leq L_3 t^{\frac{\nu}{2}}, \\ |I'_\nu(\sqrt{\lambda t x})| &\leq L_4 t^{\frac{\nu-1}{2}}. \end{aligned}$$

Hierbei sind  $L_1, L_2, L_3, L_4$  positive Konstanten.

Wir betrachten für  $x \in U_\delta(x_0)$ ,  $t \in (0, 1)$  den Ausdruck  $p'_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2$  und setzen zur Abkürzung  $\nu := \frac{n_1-2}{2}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} &\left| p'_{n_1, \lambda_1}(xt) \right| p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 \\ &\leq \left[ c_1 (xt)^{\frac{\nu}{2}-1} \left| I_\nu(\sqrt{\lambda_1 xt}) \right| + c_2 (xt)^{\frac{\nu}{2}} \left| I_\nu(\sqrt{\lambda_1 xt}) \right| + c_3 (xt)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} \left| I'_\nu(\sqrt{\lambda_1 xt}) \right| \right] \\ &\quad \times c_4 t^{\frac{n_2-2}{4}+2} I_{\frac{n_2-2}{2}}(\sqrt{\lambda_2 t}) \\ &\leq \left[ K_1 t^{\frac{n_1-2}{4}-1} t^{\frac{n_1-2}{4}} + K_2 t^{\frac{n_1-2}{4}} t^{\frac{n_1-2}{4}} + K_3 t^{\frac{n_1-2}{4}-\frac{1}{2}} t^{\frac{n_1-2}{4}-\frac{1}{2}} \right] K_4 t^{\frac{n_2-2}{4}} t^{\frac{n_2-2}{4}} t^2 \\ &\leq M_1 t^{\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - 1} \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten  $K_1, K_2, K_3, K_4$  und  $M_1$ . In völliger Analogie zeigt man durch Benutzung der Leibnizformel für  $p_{n_1, \lambda_1}(x) = c e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n_1-2}{4}} I_{\frac{n_1-2}{2}}(\sqrt{\lambda_1 x})$

$$\left| p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) \right| p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} \leq M_k t^{\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - 1}.$$

Nach Anwendung eines Standardsatzes zur Vertauschung von Differentiation und Integration (vgl. [Els11, S. 148]) ergibt sich die Behauptung für  $f_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ .

2. Wir studieren nun  $\hat{f}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_1^\infty p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt$ .

Für  $x \in U_\delta(x_0)$ ,  $t \in [1, \infty)$  gilt mit einer Konstanten  $M_k$  nach Lemma 2.2.7

$$\left| p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) \right| \leq M_k$$

und somit

$$\left| p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) \right| p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} \leq M_k p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1}.$$

Nach Bemerkung 2.2.6 folgt ebenfalls nach erneuter Anwendung des zitierten Standardsatzes die Behauptung für  $\hat{f}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ .

Insgesamt gilt nun also

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k} \left[ f_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) + \hat{f}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right] \\ &= \int_0^1 p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} dt + \int_1^\infty p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^{k+1} dt \\ &= \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt. \end{aligned}$$

Die Übertragung auf den normierten Fall gelingt mit Bemerkung 2.2.4 i). □

## 2.3 Die doppelt nichtzentrale $t$ -Verteilung

Mithilfe der Normalverteilung und der nichtzentralen  $\chi^2$ -Verteilung definieren wir abschließend die doppelt nichtzentrale  $t$ -Verteilung (vgl. auch [Ras95, S. 170]) und studieren ihre Differenzierbarkeitseigenschaften.

**Definition 2.3.1.** *Es seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$  und  $\lambda \geq 0$ . Ferner seien  $X \sim N_{\mu, 1}$  und  $Q \sim \chi_{n, \lambda}^2$  unabhängige Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable*

$$T := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Q}}$$

*doppelt nichtzentral  $t_{\mu, n, \lambda}$ -verteilt.*

Die Existenz einer Lebesgue-dichte lässt sich analog zur doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung mithilfe von Satz 2.2.2 herleiten. Für weitere Untersuchungen greifen wir auf die folgende Integraldarstellung zurück.

**Lemma 2.3.2.** *Die Zufallsvariable  $T$  sei wie in Definition 2.3.1 doppelt nichtzentral  $t_{\mu,n,\lambda}$ -verteilt. Dann besitzt ihre Dichte  $h_{\mu,n,\lambda}(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  die Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} h_{\mu,n,\lambda}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{xt}{\sqrt{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}(t^2) 2t^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}(t) \sqrt{t} dt. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.3.3.**

i) Im Falle  $\mu = \lambda = 0$  erhalten wir die wohlbekannte zentrale  $t$ -Verteilung (vgl. [Ras95, S. 169–170]), deren Lebesgue-dichte für  $x \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch

$$h_{0,n,0}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

ii) Im Falle  $\lambda = 0, \mu \neq 0$  erhalten wir die einfach nichtzentrale  $t$ -Verteilung (vgl. [Ras95, S. 169–170]).

iii) Es gilt  $h_{-\mu,n,\lambda}(-x) = h_{\mu,n,\lambda}(x)$ .

iv) Mit Definition 2.1.2 und Lemma 2.3.2 lässt sich folgende Identität herleiten

$$h_{\mu,n,\lambda}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{j!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^j \sqrt{1 + \frac{2j}{n}} h_{\mu,n+2j,0}\left(x \sqrt{1 + \frac{2j}{n}}\right).$$

Dieser Zugang vereinfacht die Vorgehensweise in [KK91], wo eine entsprechende Formel für die Verteilungsfunktion der doppelt nichtzentralen  $t$ -Verteilung hergeleitet wird.

Für  $\mu \in \mathbb{R}, n > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$h_{\mu,n,\lambda}(x) = h_{\mu,n,0}(x) + \mathcal{O}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0+.$$

Wir werden sehen, dass die Integraldarstellung höherer Ableitungen der  $t_{\mu,n,\lambda}$ -Dichte ein klassisches Orthogonalpolynom enthält. Dieses führen wir an dieser Stelle ein.

**Definition 2.3.4.** *Es sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann nennen wir das Polynom  $H_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x^2}\right)$$

das  $k$ -te Hermitesche Polynom (vgl. [AAR99, S. 278]).

**Bemerkung 2.3.5.**

- i) Die Funktion  $H_k$  ist ein Polynom vom Grad  $k$ .  
 ii) Die Hermiteschen Polynome  $H_k$  genügen der Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Hierbei bezeichnet  $\delta_{mn}$  das Kronecker-Symbol (vgl. [AAR99, S. 278]).

**Satz 2.3.6.** Es seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $x \in \mathbb{R}$  die folgende Ableitungsformel für die doppelt nichtzentrale  $t$ -Dichte

$$h_{\mu, n, \lambda}^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{k+1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} H_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)\right) t^{\frac{k+1}{2}} p_{n, \lambda}(t) dt.$$

*Beweis.* Die Vertauschung von Differentiation und Integration ist durch Anwendung des bereits zitierten Standardsatzes (vgl. [Els11, S. 148]) möglich, wenn man die Beschränktheit von

$$e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)\right)^2} H_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)\right)$$

für  $t \in (0, \infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und Bemerkung 2.2.6 iii) beachtet. Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

# Kapitel 3

## Vorzeichenreguläre Funktionen

Die Theorie der vorzeichenregulären Funktionen wird später das entscheidende Hilfsmittel sein, um Unimodalitätsbeweise für die doppelt nichtzentralen  $F$ - und  $t$ -Verteilungen zu führen. Ergänzend dazu werden sich monotone Abhängigkeiten der Parameter mit den Begriffen dieser Theorie ebenfalls herleiten lassen. Wir folgen der Darstellung in Karlins Monographie [Kar68], wobei wir die wesentlichen Begrifflichkeiten *extended sign regular (ESR)*, *extended totally positive (ETP)* und *extended reverse regular (ERR)* einführen und wichtige *ESR*-Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen herleiten. Die Formulierung der Sätze und die zugehörigen Beweisskizzen orientieren sich im Wesentlichen an [Kar68], werden an entscheidenden Stellen jedoch umformuliert und erweitert (vgl. auch [AG00b], [Hei11]).

### 3.1 Funktionen vom Typ sign regular

Wichtige Definitionen für das Verständnis der Theoreme, auf die wir in [Kar68] verweisen, geben wir hier in aller Kürze an. Es wird sich zeigen, dass die für uns interessanten Funktionen vom Typ *ESR* eine Teilklasse der Funktionen vom Typ *sign regular (SR)* bilden. Ein vertieftes Studium der *SR*-Funktionen ist für unsere Zwecke jedoch nicht vonnöten. Der interessierte Leser sei auf [Kar68] verwiesen.

**Definition 3.1.1.** *Es sei  $X \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $r \in \mathbb{N}$ . Dann setzen wir*

$$\begin{aligned}\Delta_r(X) &:= \{(x_1, \dots, x_r) \in X^r : x_1 < \dots < x_r\}, \\ \bar{\Delta}_r(X) &:= \{(x_1, \dots, x_r) \in X^r : x_1 \leq \dots \leq x_r\}.\end{aligned}$$

**Definition 3.1.2.**

*i) Es seien  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $r \in \mathbb{N}$  und die Funktion  $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gibt es eine Folge  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r \in \{-1, 1\}^r$ , so dass für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$  und alle  $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m(X)$ ,  $(y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m(Y)$  gilt*

$$\epsilon_m(K) \cdot \det \left( K(x_i, y_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \geq 0, \quad (3.1)$$

*so heißt  $K$  sign regular der Ordnung  $r$  ( $SR_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .*

- ii) Gilt speziell  $\epsilon_m(K) = 1$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ , so nennen wir  $K$  *totally positive der Ordnung  $r$*  ( $TP_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .
- iii) Gilt  $\epsilon_m(K) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ , so nennen wir  $K$  *reverse regular der Ordnung  $r$*  ( $RR_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .
- iv) Gilt in (3.1) die strikte Relation, so nennen wir die Funktion  $K$  *strict sign regular* ( $SSR_r$ ), *strict totally positive* ( $STP_r$ ) bzw. *strict reverse regular* ( $SRR_r$ ).

Eine Reihe von Beispielen findet man in [MOA10, S. 759–762].

## 3.2 Funktionen vom Typ extended sign regular

Besitzt die Funktion  $K$  hinreichend gute Differenzierbarkeitseigenschaften, so lässt sich der Begriff *extended sign regular* ( $ESR$ ) einführen, der in gewisser Hinsicht eine Verschärfung des obigen Begriffs *sign regular* darstellen wird. Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von  $ESR$ -Eigenschaften ist die Wronskische Determinante. Wir führen diese samt wichtigen Eigenschaften in diesem Abschnitt ein. Darüber hinaus leiten wir wichtige  $ESR$ -Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen her und untersuchen den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Funktion und der Anzahl der Nullstellen gewisser Transformationen.

### 3.2.1 Definitionen und fundamentale Eigenschaften

**Definition 3.2.1.** *Es seien  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $r \in \mathbb{N}$  und  $K \in \mathcal{C}_{2r-2}(X \times Y)$  eine reellwertige Funktion. Gibt es ein Tupel  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r \in \{-1, 1\}^r$ , so dass für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$  und alle  $(x, y) \in X \times Y$  gilt*

$$\epsilon_m(K) \cdot \det \left( \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} K(x, y) \right)_{i,j=1}^m > 0,$$

*so nennen wir  $K$  extended sign regular der Ordnung  $r$  (kurz:  $ESR_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .*

**Definition 3.2.2.**

- i) *Gilt in obiger Definition  $\epsilon_m(K) = 1$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ , so nennen wir  $K(x, y)$  extended totally positive der Ordnung  $r$  (kurz:  $ETP_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .*
- ii) *Gilt  $\epsilon_m(K) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ , so nennen wir  $K(x, y)$  extended reverse regular der Ordnung  $r$  (kurz:  $ERR_r$ ) bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ .*
- iii) *Gelten obige Beziehungen für alle  $r \in \mathbb{N}$ , so verwenden wir die Bezeichnungen  $ESR_\infty$ ,  $ETP_\infty$ ,  $ERR_\infty$ .*

**Bemerkung 3.2.3.**

- i)  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r$  ist eine endliche Folge, die nur die Werte 1 und  $-1$  annimmt. Ist  $K$   $ERR_r$  bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$ , so gilt  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r = (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots)$ .
- ii) Wir bezeichnen die Funktion  $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  im Folgenden als Kern.
- iii) Statt  $K$  ist  $ESR_r$  bzgl.  $(x, y) \in X \times Y$  sagen wir auch abkürzend:  $K$  ist  $ESR_r$  auf  $X \times Y$ .
- iv) Es sei  $r \in \mathbb{N}$  und  $s \in \{1, \dots, r\}$ . Besitzt  $K$  die  $ESR_r$ -Eigenschaft, so ist  $K$  schon  $ESR_s$ .

**Definition 3.2.4.** Es seien  $r \in \mathbb{N}$ ,  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $K(\cdot, y) \in \mathcal{C}_{r-1}(X)$  für alle  $y \in Y$ . Gibt es ein Tupel  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r \in \{-1, 1\}^r$ , so dass für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$  und alle  $x \in X$ ,  $(y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m(Y)$  gilt

$$\epsilon_m(K) \cdot \det \left( \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} K(x, y_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} > 0,$$

so nennen wir  $K$  extended sign regular der Ordnung  $r$  in der Variablen  $x \in X$  (kurz:  $ESR_r(x)$ ).

Analog hierzu erklärt man nun die  $ESR_r$ -Eigenschaft in der Variablen  $y \in Y$ .

**Definition 3.2.5.** Es seien  $r \in \mathbb{N}$ ,  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $K(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{r-1}(Y)$  für alle  $x \in X$ . Existiert ein Tupel  $(\epsilon_m(K))_{m=1}^r \in \{-1, 1\}^r$ , so dass für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$  und alle  $y \in Y$ ,  $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m(X)$  gilt

$$\epsilon_m(K) \cdot \det \left( \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} K(x_i, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} > 0,$$

so heißt  $K$  extended sign regular der Ordnung  $r$  in der Variablen  $y \in Y$  (kurz:  $ESR_r(y)$ ).

**Definition 3.2.6.** Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}_{n-1}(I)$ . Dann heißt

$$W(f_1, \dots, f_n; x) := \left( f_j^{(i-1)}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

die Wronskische Matrix und

$$W[f_1, \dots, f_n; x] := \det W(f_1, \dots, f_n; x)$$

die Wronskische Determinante der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ .

Durch direktes Nachrechnen (vgl. [Kar68, S. 53], [PS71, S. 113]) erhält man folgendes Lemma, welches für den Beweis des nachfolgenden Satzes von Bedeutung ist.

**Lemma 3.2.7.** *Es seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und die Funktionen  $f, k_0, \dots, k_{m-1} \in \mathcal{D}_{m-1}(X)$ . Dann gilt für alle  $x \in X$*

$$W[fk_0, \dots, fk_{m-1}; x] = (f(x))^m W[k_0, \dots, k_{m-1}; x].$$

*Beweis.* Für  $x \in X$  gilt wegen  $\binom{i}{\nu} = 0$  für  $\nu > i$  und der entsprechenden Interpretation der Matrixeinträge in der Wronskischen Matrix

$$\begin{aligned} W[fk_0, \dots, fk_{m-1}; x] &= \det \left( \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{i}{\nu} k_j^{(\nu)}(x) f^{(i-\nu)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}} \\ &= \det \left( \binom{i}{j} f^{(i-j)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}} \det \left( k_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}} \\ &= (f(x))^m W[k_0, \dots, k_{m-1}; x]. \end{aligned}$$

□

Die Zusammenhänge zwischen wichtigen *sign regular* Begriffen lassen sich auf den nachfolgenden Satz über Wronskische Determinanten zurückführen (vgl. [Kar68, S. 53]).

**Satz 3.2.8.** *Es seien  $r \in \mathbb{N}$  und  $k_0, \dots, k_{r-1} \in \mathcal{D}_{r-1}(X)$ . Ferner existiere ein Tupel  $(\epsilon_m)_{m=1}^r \in \{-1, 1\}^r$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt*

$$\epsilon_m \cdot W[k_0, \dots, k_{m-1}; x] > 0 \quad (m = 1, \dots, r).$$

Dann folgt

$$\text{sign } W[k_0, \dots, k_{r-1}; x] = \text{sign } \det \left( k_j(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq r-1 \\ 0 \leq j \leq r-1}}$$

für beliebige  $(x_0, \dots, x_{r-1}) \in \Delta_r(X)$  und  $x \in X$ .

*Beweis.* Wir führen den Beweis per Induktion nach  $r$ .

Für  $r \in \mathbb{N}$  und  $(x_0, \dots, x_r) \in \Delta_{r+1}(X)$  gilt

$$\det \left( k_j(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq r}} = \prod_{\nu=0}^r k_0(x_\nu) \prod_{\mu=1}^r (x_\mu - x_{\mu-1}) \begin{vmatrix} 1 & \bar{k}_1(x_0) & \dots & \bar{k}_r(x_0) \\ 0 & \frac{\bar{k}_1(x_1) - \bar{k}_1(x_0)}{x_1 - x_0} & \dots & \frac{\bar{k}_r(x_1) - \bar{k}_r(x_0)}{x_1 - x_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{\bar{k}_1(x_r) - \bar{k}_1(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} & \dots & \frac{\bar{k}_r(x_r) - \bar{k}_r(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} \end{vmatrix},$$

wobei wir  $\bar{k}_j := \frac{k_j}{k_0}$  gesetzt und elementare Rechenregeln für Determinanten verwendet haben. Eine zeilenweise Anwendung des Mittelwertsatzes liefert ferner

$$\det \left( k_j(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq r}} = \prod_{\nu=0}^r k_0(x_\nu) \prod_{\mu=1}^r (x_\mu - x_{\mu-1}) \det \left( \bar{k}'_{j+1}(\xi_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq r-1 \\ 0 \leq j \leq r-1}}.$$

Wegen  $W[1, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m; x] = W[\bar{k}'_1, \dots, \bar{k}'_m; x]$  und Lemma 3.2.7 folgt unter Ausnutzung der Induktionsannahme die Behauptung. □

Das nachfolgende Lemma stellt Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften  $ESR_r$ ,  $SSR_r$ , sowie  $ESR_r(x)$  und  $ESR_r(y)$  her (vgl. [Kar68, S. 62], [Kar63, S. 335]). Aussage ii) wird im Zusammenhang mit  $ESR$ -Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen eine zentrale Rolle einnehmen.

**Lemma 3.2.9.**

- i) Ist der Kern  $K(x, y)$   $ESR_r(x)$  oder  $ESR_r(y)$ , so ist  $K(x, y)$   $SSR_r$ .  
 ii) Ist  $K(x, y)$   $ESR_r$ , so ist  $K(x, y)$  auch  $ESR_r(x)$  und  $ESR_r(y)$ . Genauer: Ist  $K(x, y)$   $ESR_r$  auf  $X \times Y$ , so gilt für beliebige  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $m \in \{1, \dots, r\}$  und

a)  $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m(X)$

$$\text{sign det} \left( \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} K(x, y) \right)_{i,j=1}^m = \text{sign det} \left( \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} K(x_i, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}},$$

b)  $(y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m(Y)$

$$\text{sign det} \left( \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} K(x, y) \right)_{i,j=1}^m = \text{sign det} \left( \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} K(x, y_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

*Beweis.* Erklären wir in i) für  $(y_0, \dots, y_{r-1}) \in \Delta_r(Y)$  die Funktionen  $k_j(x) := K(x, y_j)$  bzw. in ii), Teil a) für  $y \in Y$  die Funktionen  $k_j(x) := \frac{\partial^j}{\partial y^j} K(x, y)$ ,  $j \in \{0, \dots, r-1\}$ , so folgt mit Satz 3.2.8 jeweils die Behauptung. Der Beweis zu b) erfolgt analog zu a).  $\square$

Die sogenannte *basic composition formula* (vgl. [Kar68, S. 99]) dient als wichtige Grundlage für die Untersuchung von  $ESR$ -Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen.

**Satz 3.2.10.** Gegeben seien  $m \in \mathbb{N}_0$ , offene Intervalle  $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$  sowie die reellwertigen Kerne  $L(x, y)$  und  $M(y, z)$ . Für  $y \in Y$  seien  $L(\cdot, y) \in \mathcal{C}_m(X)$ ,  $M(y, \cdot) \in \mathcal{C}_m(Z)$  und das Integral

$$K(x, z) := \int_Y L(x, y) M(y, z) d\rho(y)$$

existiere für alle  $(x, z) \in X \times Z$ . Hierbei sei  $\rho$  ein positives,  $\sigma$ -endliches Maß auf  $Y$  und  $K \in \mathcal{C}_{2m}(X \times Z)$  sei so beschaffen, dass in allen Einträgen

$$\left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} K(x, z) \right)_{i,j=0}^m$$

die Vertauschung von Differentiation und Integration zulässig ist. Dann erhält man durch Integration über  $\Delta_{m+1}(Y)$  die folgende Kompositionsformel:

Für alle  $(x, z) \in X \times Z$  gilt

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} K(x, z) \right)_{i,j=0}^m \\ &= \int \cdots \int_{y_0 < \dots < y_m} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} L(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_i, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m). \end{aligned}$$

*Beweis.* Zunächst erhält man für eine Permutation  $\pi \in S_{m+1}$  mit

$$\prod_{\nu=0}^m \frac{\partial^{\nu+\pi(\nu)}}{\partial x^\nu \partial z^{\pi(\nu)}} K(x, z) = \int \cdots \int_Y \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_\mu) \prod_{\tau=0}^m \frac{\partial^{\pi(\tau)}}{\partial z^{\pi(\tau)}} M(y_\tau, z) d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m)$$

und der Leibnizschen Determinantenformel

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} K(x, z) \right)_{i,j=0}^m = \sum_{\pi \in S_{m+1}} \text{sign}(\pi) \prod_{\nu=0}^m \frac{\partial^{\nu+\pi(\nu)}}{\partial x^\nu \partial z^{\pi(\nu)}} K(x, z) \\ &= \int \cdots \int_Y \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_\mu) \sum_{\pi \in S_{m+1}} \text{sign}(\pi) \prod_{\tau=0}^m \frac{\partial^{\pi(\tau)}}{\partial z^{\pi(\tau)}} M(y_\tau, z) d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m) \\ &= \int \cdots \int_Y \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_\mu) \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_i, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m). \end{aligned}$$

Statt das Integral über  $Y^{m+1}$  zu erstrecken, genügt es, die disjunkte Vereinigung der Mengen  $\{(y_0, \dots, y_m) : y_{\pi(0)} < \dots < y_{\pi(m)}\}$ ,  $\pi \in S_{m+1}$  zu betrachten. Schließlich ergibt sich aus dem Satz von Fubini und durch Zeilenumordnung das gewünschte Resultat. Es gilt

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} K(x, z) \right)_{i,j=0}^m \\ &= \sum_{\pi \in S_{m+1}} \int \cdots \int_{y_{\pi(0)} < \dots < y_{\pi(m)}} \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_\mu) \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_i, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m) \\ &= \sum_{\pi \in S_{m+1}} \int \cdots \int_{y_0 < \dots < y_m} \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_{\pi^{-1}(\mu)}) \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_{\pi^{-1}(i)}, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m) \\ &= \int \cdots \int_{y_0 < \dots < y_m} \sum_{\pi \in S_{m+1}} \text{sign}(\pi^{-1}) \prod_{\mu=0}^m \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} L(x, y_{\pi^{-1}(\mu)}) \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_i, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m) \\ &= \int \cdots \int_{y_0 < \dots < y_m} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} L(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} \det \left( \frac{\partial^j}{\partial z^j} M(y_i, z) \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} d\rho(y_0) \dots d\rho(y_m). \end{aligned}$$

□

Zur Berechnung höherer Ableitungen zusammengesetzter Funktionen gibt die Kettenregel des Faà di Bruno Auskunft (vgl. [Joh02]), die wir hier zitieren und im nächsten Abschnitt benutzen werden.

**Lemma 3.2.11** (Faà di Bruno). *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $m \in \mathbb{N}$  und es seien  $f \in \mathcal{D}_m(I)$  sowie  $g \in \mathcal{D}_m(f(I))$ . Dann gilt für alle  $t \in I$*

$$\frac{d^m}{dt^m} g(f(t)) = \sum \frac{m!}{b_1! \dots b_m!} g^{(k)}(f(t)) \left( \frac{f'(t)}{1!} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \right)^{b_m},$$

wobei sich die Summe über alle Lösungen  $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{N}_0^m$  der Gleichung

$$b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m = m$$

erstreckt und  $k := b_1 + \dots + b_m$  ist.

### 3.2.2 Extended sign regular Eigenschaften zusammengesetzter Funktionen

**Satz 3.2.12.** *Es seien  $r \in \mathbb{N}$  und  $X, Y, Z, U, V \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle.*

- i) *Sind die Kerne  $K(x, y)$  und  $L(x, y)$  beide  $ETP_2$  ( $ERR_2$ ) auf  $X \times Y$ , so ist auch das Produkt  $K(x, y)L(x, y)$   $ETP_2$  ( $ERR_2$ ) auf  $X \times Y$ .*
- ii) *Ist  $K(x, y)$   $ETP_2$  ( $ERR_2$ ) auf  $X \times Y$ , so ist  $L(x, y) := K(x, y)^{-1} ERR_2$  ( $ETP_2$ ) auf  $X \times Y$ .*
- iii) *Es seien  $f \in \mathcal{C}_{r-1}(X)$  und  $g \in \mathcal{C}_{r-1}(Y)$  beide positiv auf  $X$  bzw.  $Y$  und  $K(x, y)$   $ESR_r$  auf  $X \times Y$ . Dann ist der Kern*

$$L(x, y) := f(x)g(y)K(x, y)$$

*$ESR_r$  auf  $X \times Y$  mit  $\epsilon_m(L) = \epsilon_m(K)$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ .*

- iv) *Sind die Funktionen  $\phi: U \rightarrow X$ ,  $\psi: V \rightarrow Y$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_{r-1}(U)$ ,  $\psi \in \mathcal{C}_{r-1}(V)$  beide streng monoton und surjektiv mit den Umkehrfunktionen  $\phi^{-1}$  bzw.  $\psi^{-1}$  und ist der Kern  $K(x, y)$   $ESR_r$  auf  $X \times Y$ , so ist der Kern*

$$L(u, v) := K(\phi(u), \psi(v)), \quad (u, v) \in U \times V,$$

*$ESR_r$  auf  $U \times V$  mit  $\epsilon_m(L) = (\text{sign}(\phi'(u)\psi'(v)))^{\frac{m(m-1)}{2}} \epsilon_m(K)$  für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$ .*

- v) *Die Kerne  $L(x, y)$  und  $M(y, z)$  seien jeweils  $ESR_r$  auf  $X \times Y$  bzw.  $Y \times Z$ . Ferner existiere das Integral*

$$K(x, z) := \int_Y L(x, y)M(y, z) d\rho(y)$$

für alle  $(x, z) \in X \times Z$ . Hierbei sei  $\rho$  ein positives,  $\sigma$ -endliches Maß auf  $Y$  und  $K \in \mathcal{C}_{2r-2}(X \times Z)$  sei so beschaffen, dass in allen Einträgen

$$\left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} K(x, z) \right)_{i,j=0}^{r-1}$$

die Vertauschung von Differentiation und Integration zulässig ist. Dann ist der Kern  $K(x, z)$   $ESR_r$  auf  $X \times Z$  und für alle  $m \in \{1, \dots, r\}$  gilt

$$\epsilon_m(K) = \epsilon_m(L)\epsilon_m(M).$$

*Beweis.*

i) Durch direktes Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) L(x, y) \right)_{i,j=0}^1 \\ &= L(x, y)^2 \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) \right)_{i,j=0}^1 + K(x, y)^2 \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} L(x, y) \right)_{i,j=0}^1, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

ii) Ebenfalls durch direktes Nachrechnen zeigt man

$$\det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y)^{-1} \right)_{i,j=0}^1 = - \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) \right)_{i,j=0}^1 \cdot K(x, y)^{-4}.$$

iii) Mit der Leibnizschen Produktformel rechnet man für  $m \in \{1, \dots, r\}$  die folgende Identität nach

$$\det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x)g(y)K(x, y) \right)_{i,j=0}^{m-1} = (f(x))^m (g(y))^m \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) \right)_{i,j=0}^{m-1}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

iv) Zunächst zeigt man mit der Kettenregel des Faà di Bruno (vgl. Lemma 3.2.11) für  $m \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} L(u, v) \right)_{i,j=0}^{m-1} = \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} K(\phi(u), \psi(v)) \right)_{i,j=0}^{m-1} \\ &= \left( \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_i) \in \mathbb{N}_0^i \\ 1k_1 + \dots + ik_i = i}} i! \prod_{\omega=1}^i \frac{1}{k_\omega!} \left( \frac{\phi^{(\omega)}(u)}{\omega!} \right)^{k_\omega} \sum_{\substack{(q_1, \dots, q_j) \in \mathbb{N}_0^j \\ 1q_1 + \dots + jq_j = j}} \frac{\partial^{\nu+\mu} K}{\partial u^\nu \partial v^\mu}(\phi(u), \psi(v)) j! \prod_{\iota=1}^j \frac{1}{q_\iota!} \left( \frac{\psi^{(\iota)}(v)}{\iota!} \right)^{q_\iota} \right)_{i,j=0}^{m-1} \end{aligned}$$

mit  $\nu = k_1 + \dots + k_i$  und  $\mu = q_1 + \dots + q_j$ .

Ferner zeigt man induktiv, dass  $\nu$  genau alle Werte zwischen 0 und  $i$  annimmt.

Ordnet man die erste Summe nach aufsteigenden  $\nu$ -Werten und beachtet, dass die Bedingung  $\nu = i$  nur durch das Tupel  $(i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^i$  erfüllt ist, so ergibt sich durch analoge Argumentation für  $\mu$ :

Obige Matrix lässt sich als Produkt dreier Matrizen darstellen, wobei die erste und dritte Matrix eine untere bzw. obere Dreiecksgestalt aufweisen und im Wesentlichen Ableitungen der Funktionen  $\phi$  bzw.  $\psi$  enthalten. Um die entsprechenden Determinanten zu berechnen, genügt es, sich auf die Hauptdiagonaleinträge der ersten und dritten Matrix zu beschränken. Es gilt mit  $x = \phi(u)$  und  $y = \psi(v)$

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} L(u, v) \right)_{i,j=0}^{m-1} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \phi'(u) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & (\phi'(u))^{m-1} \end{vmatrix} \cdot \det \left( \frac{\partial^{i+j} K}{\partial u^i \partial v^j} (\phi(u), \psi(v)) \right)_{i,j=0}^{m-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \psi'(v) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\psi'(v))^{m-1} \end{vmatrix} \\ &= (\phi'(u)\psi'(v))^{\frac{m(m-1)}{2}} \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) \right)_{i,j=0}^{m-1}. \end{aligned}$$

v) Satz 3.2.10 liefert zusammen mit Lemma 3.2.9 unmittelbar die Behauptung. □

Das folgende Beispiel gibt Kerne an, die die *ESR*-Eigenschaft besitzen. Dies ergibt sich durch direktes Nachrechnen und unter Anwendung von Satz 3.2.12 (vgl. [Kar68, S. 99–100]).

**Beispiel 3.2.13.** *Es seien  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle.*

- i) *Der Kern  $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K(x, y) = e^{xy}$  ist  $ETP_\infty$  auf  $X \times Y$ .*
- ii) *Für positive Funktionen  $f, g \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$  ist der Kern  $K(x, y) = f(x)g(y)e^{xy}$   $ETP_\infty$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*
- iii) *Der Kern  $K(x, y) = e^{-xy}$  ist  $ERR_\infty$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*
- iv) *Die zentrale  $\chi_n^2$ -Dichte  $p_n(x)$  ist  $ETP_\infty$  bzgl.  $(n, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .*

Weitere Beispiele folgen in den nächsten Kapiteln.

### 3.2.3 Vorzeichenwechsel einer Funktion und Nullstellenanzahl transformierter Kerne

Für Funktionen vom Typ *ESR* untersuchen wir die sogenannte *variation diminishing*-Eigenschaft. Diese setzt die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Funktion in Beziehung zu der Anzahl der Nullstellen einer gewissen Transformierten (vgl. [Kar68, S. 239]). Für den Nachweis der Unimodalitätssätze in Kapitel 4 ist diese Eigenschaft von zentraler Bedeutung.

**Definition 3.2.14.** Gegeben seien  $n \in \mathbb{N}_0$ , das offene Intervall  $X \subset \mathbb{R}$  und reellwertige Funktionen  $\Phi_0, \dots, \Phi_n \in \mathcal{C}_n(X)$ . Weiter sei  $(x_0, \dots, x_n) \in \overline{\Delta}_{n+1}(X)$  mit der Darstellung

$$(x_0, \dots, x_n) = (\zeta_0, \dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_1, \dots, \zeta_m, \dots, \zeta_m),$$

wobei Blöcke der Form  $\zeta_i, \dots, \zeta_i$  die Länge  $r_i \in \mathbb{N}$  besitzen ( $0 \leq i \leq m$ ). Dann definieren wir die quadratische Matrix

$$\left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} := \begin{pmatrix} \Phi_0(\zeta_0) & \Phi_1(\zeta_0) & \dots & \Phi_n(\zeta_0) \\ \Phi_0'(\zeta_0) & \Phi_1'(\zeta_0) & \dots & \Phi_n'(\zeta_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_0^{(r_0-1)}(\zeta_0) & \Phi_1^{(r_0-1)}(\zeta_0) & \dots & \Phi_n^{(r_0-1)}(\zeta_0) \\ \Phi_0(\zeta_1) & \Phi_1(\zeta_1) & \dots & \Phi_n(\zeta_1) \\ \Phi_0'(\zeta_1) & \Phi_1'(\zeta_1) & \dots & \Phi_n'(\zeta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_0^{(r_1-1)}(\zeta_1) & \Phi_1^{(r_1-1)}(\zeta_1) & \dots & \Phi_n^{(r_1-1)}(\zeta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_0(\zeta_m) & \Phi_1(\zeta_m) & \dots & \Phi_n(\zeta_m) \\ \Phi_0'(\zeta_m) & \Phi_1'(\zeta_m) & \dots & \Phi_n'(\zeta_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_0^{(r_m-1)}(\zeta_m) & \Phi_1^{(r_m-1)}(\zeta_m) & \dots & \Phi_n^{(r_m-1)}(\zeta_m) \end{pmatrix}.$$

**Satz 3.2.15.** Es seien  $n \in \mathbb{N}_0$ , ein offenes Intervall  $X \subset \mathbb{R}$  und reellwertige Funktionen  $\Phi_0, \dots, \Phi_n \in \mathcal{C}_n(X)$  gegeben. Ferner existiere eine Folge  $(\epsilon_k)_{k=0}^n \in \{-1, 1\}^{n+1}$ , so dass für alle  $x \in X$  und alle  $k \in \{0, \dots, n\}$  gilt

$$\epsilon_k \cdot \det \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k}} > 0.$$

Dann gilt für alle  $(x_0, \dots, x_n) \in \overline{\Delta}_{n+1}(X)$  und alle  $x \in X$

$$\text{sign det} \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \text{sign det} \left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}.$$

*Beweis.* Wir zeigen obige Identität durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  ist die Aussage trivial.

Die Aussage sei im Folgenden für  $n - 1 \in \mathbb{N}_0$  gezeigt. Ferner seien  $x \in X$  und

$$(x_0, \dots, x_n) = (\zeta_0, \dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_1, \dots, \zeta_m, \dots, \zeta_m) \in \overline{\Delta}_{n+1}(X)$$

wie in Definition 3.2.14 beliebig.

Wir betrachten zunächst Teilmatrizen von  $(\Phi_j^*(x_i))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$  der Form

$$\Phi(\zeta_\iota) := \begin{pmatrix} \Phi_0(\zeta_\iota) & \Phi_1(\zeta_\iota) & \cdots & \Phi_n(\zeta_\iota) \\ \Phi'_0(\zeta_\iota) & \Phi'_1(\zeta_\iota) & \cdots & \Phi'_n(\zeta_\iota) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_0^{(r_\iota-1)}(\zeta_\iota) & \Phi_1^{(r_\iota-1)}(\zeta_\iota) & \cdots & \Phi_n^{(r_\iota-1)}(\zeta_\iota) \end{pmatrix},$$

so dass gilt

$$(\Phi_j^*(x_i))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \Phi(\zeta_0) \\ \vdots \\ \Phi(\zeta_m) \end{pmatrix}.$$

Für  $0 \leq \iota \leq m$  und  $0 \leq j \leq n$  setzen wir  $\hat{\Phi}_j(\zeta_\iota) := \frac{\phi_j(\zeta_\iota)}{\phi_0(\zeta_\iota)}$  und erhalten mit der Leibnizschen Produktformel durch direktes Nachrechnen

$$W(1, \hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_n; \zeta_\iota) = \Phi_0(\zeta_\iota) \begin{pmatrix} \binom{i}{j} \left(\frac{1}{\phi_0}\right)^{(i-j)}(\zeta_\iota) \end{pmatrix}_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Phi_j^{(i)}(\zeta_\iota)}{\Phi_0(\zeta_\iota)} \end{pmatrix}_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}.$$

Hieraus folgt, dass es eine untere Dreiecksmatrix  $A := (a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$  mit  $a_{ii} = 1$  für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  gibt, so dass folgende Beziehung gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Phi_0(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} & \cdots & \frac{\Phi_n(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} \\ \frac{\Phi'_0(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} & \cdots & \frac{\Phi'_n(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Phi_0^{(r_0-1)}(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} & \cdots & \frac{\Phi_n^{(r_0-1)}(\zeta_0)}{\Phi_0(\zeta_0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Phi_0(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} & \cdots & \frac{\Phi_n(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} \\ \frac{\Phi'_0(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} & \cdots & \frac{\Phi'_n(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Phi_0^{(r_m-1)}(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} & \cdots & \frac{\Phi_n^{(r_m-1)}(\zeta_m)}{\Phi_0(\zeta_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\Phi}_1(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}_n(\zeta_0) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\zeta_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}_1^{(r_0-1)}(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}_n^{(r_0-1)}(\zeta_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{\Phi}_1(\zeta_m) & \cdots & \hat{\Phi}_n(\zeta_m) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\zeta_m) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\zeta_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}_1^{(r_m-1)}(\zeta_m) & \cdots & \hat{\Phi}_n^{(r_m-1)}(\zeta_m) \end{pmatrix}.$$

Elementare Determinantenumformungen und eine Anwendung des Mittelwertsatzes auf Zeilen der Form

$$(\zeta_{\iota+1} - \zeta_\iota) \left( 0, \frac{\hat{\Phi}_1(\zeta_{\iota+1}) - \hat{\Phi}_1(\zeta_\iota)}{\zeta_{\iota+1} - \zeta_\iota}, \dots, \frac{\hat{\Phi}_n(\zeta_{\iota+1}) - \hat{\Phi}_n(\zeta_\iota)}{\zeta_{\iota+1} - \zeta_\iota} \right), \quad (0 \leq \iota \leq m-1)$$

liefern

$$\det \left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \prod_{\iota=0}^m \left( \phi_0(\zeta_\iota) \right)^{r_\iota} \prod_{\mu=0}^{m-1} (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu) \det \begin{pmatrix} 1 & \hat{\Phi}_1(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}_n(\zeta_0) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\zeta_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}_1^{(r_0-1)}(\zeta_0) & \cdots & \hat{\Phi}_n^{(r_0-1)}(\zeta_0) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\xi_0) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\xi_0) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\zeta_1) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\zeta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}_1^{(r_1-1)}(\zeta_1) & \cdots & \hat{\Phi}_n^{(r_1-1)}(\zeta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\xi_{m-1}) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\xi_{m-1}) \\ 0 & \hat{\Phi}'_1(\zeta_m) & \cdots & \hat{\Phi}'_n(\zeta_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{\Phi}_1^{(r_{m-1})}(\zeta_m) & \cdots & \hat{\Phi}_n^{(r_{m-1})}(\zeta_m) \end{pmatrix}$$

mit  $\zeta_\mu < \xi_\mu < \zeta_{\mu+1}$  für  $\mu \in \{0, \dots, m-1\}$ . Gemäß Definition 3.2.14 gilt also

$$\det \left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \prod_{\iota=0}^m \left( \phi_0(\zeta_\iota) \right)^{r_\iota} \prod_{\mu=0}^{m-1} (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu) \det \left( (\hat{\Phi}'_{j+1})^*(\tilde{x}_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}}$$

mit  $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = (\zeta_0, \dots, \zeta_0, \xi_0, \zeta_1, \dots, \zeta_1, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \zeta_m, \dots, \zeta_m)$ . Ferner gilt mit Lemma 3.2.7 für  $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k}} = \left( \Phi_0(x) \right)^{k+1} \det \left( (\hat{\Phi}'_{j+1})^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ 0 \leq j \leq k-1}}.$$

Nach Voraussetzung existiert also  $(\tilde{\epsilon}_l)_{l=1}^n \in \{-1, 1\}^n$ , so dass für alle  $x \in X$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\tilde{\epsilon}_k \cdot \det \left( (\hat{\Phi}'_{j+1})^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ 0 \leq j \leq k-1}} > 0.$$

Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt hieraus die Behauptung.  $\square$

Wir sind nun in der Lage den zentralen Satz dieses Abschnitts zu beweisen, der einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Funktion  $f$  und der Nullstellenanzahl einer transformierten Funktion  $g$  herstellt. Dieser Satz wird das entscheidende Hilfsmittel in allen Unimodalitätsbetrachtungen des folgenden Kapitels sein. Zunächst erklären wir, was wir unter den relevanten Vorzeichenwechseln einer Funktion verstehen (vgl. [Kar68, S. 231]).

**Definition 3.2.16.** *Es seien  $Y \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  eine Borel-messbare Funktion. Diese besitzt  $n \in \mathbb{N}$  relevante Vorzeichenwechsel bezüglich eines positiven und  $\sigma$ -endlichen Maßes  $\rho$  auf  $Y$  (kurz:  $Z_\rho(f) = n$ ), wenn  $n + 1$  Mengen  $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{B}(Y)$  existieren, welche die nachfolgenden Bedingungen erfüllen*

- i) Für alle  $y_i \in B_i$  und  $y_{i+1} \in B_{i+1}$  ist  $y_i < y_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .*
- ii) Für alle  $y_i \in B_i$  und  $y_{i+1} \in B_{i+1}$  gilt  $f(y_i)f(y_{i+1}) \leq 0$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .*
- iii) Es gilt  $\rho(Y \setminus \bigcup_{i=0}^n B_i) = 0$ .*
- iv) Für jedes  $i \in \{0, \dots, n\}$  existiert eine Menge  $B_i^* \subset B_i$ ,  $B_i^* \in \mathcal{B}(Y)$ , mit  $\rho(B_i^*) > 0$  und  $f(y^*) \neq 0$  für alle  $y^* \in B_i^*$ .*

**Bemerkung 3.2.17.** *Ist  $Y \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $n$  Vorzeichenwechseln, so besitzt  $f$  folglich  $n$  relevante Vorzeichenwechsel bezüglich des Lebesguemaßes.*

Wir leiten nun die bereits erwähnte *variation diminishing*-Eigenschaft her (vgl. [Kar68, S. 239]).

**Satz 3.2.18.** *Es seien  $r, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \leq r - 1$ ,  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und die Funktion  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  sei Borel-messbar und beschränkt. Ferner sei der Kern  $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$   $ESR_r$  auf  $X \times Y$ . Für  $x \in X$  existiere das Integral*

$$g(x) := \int_Y K(x, y) f(y) d\rho(y),$$

wobei das positive,  $\sigma$ -endliche Maß  $\rho$  auf dem Messraum  $(Y, \mathcal{B}(Y))$  erklärt sei. Zudem gelte stets

$$g^{(i)}(x) = \int_Y \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y) f(y) d\rho(y), \quad i = 0, \dots, n.$$

Gilt dann  $Z_\rho(f) = n$ , so lässt sich die Anzahl der Nullstellen (inklusive Vielfachheiten)  $N(g)$  der Funktion  $g$  auf  $X$  abschätzen durch

$$N(g) \leq Z_\rho(f).$$

*Beweis.* Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.2.16 definieren wir für  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq n$  und  $x \in X$

$$\Phi_j^{(i)}(x) := \int_{B_j} \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y) |f(y)| d\rho(y) = \int_Y \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y) \mathbf{1}_{B_j}(y) |f(y)| d\rho(y).$$

Dann folgt für alle  $x \in X$  in Analogie zu Satz 3.2.10 und mit Eigenschaften aus der Definition 3.2.16

$$\begin{aligned}
 & \det \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \\
 &= \int_{y_0 < \dots < y_n} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \det \left( \mathbf{1}_{B_j}(y_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |f(y_0)| \dots |f(y_n)| d\rho(y_0) \dots d\rho(y_n) \\
 &= \int_{\Delta_{n+1}(Y)} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \mathbf{1}_{B_0 \times \dots \times B_n}(y_0, \dots, y_n) |f(y_0)| \dots |f(y_n)| d\rho(y_0) \dots d\rho(y_n) \\
 &= \int_{B_0} \dots \int_{B_n} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |f(y_0)| \dots |f(y_n)| d\rho(y_0) \dots d\rho(y_n).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt aufgrund der  $ESR_r$ -Eigenschaft des Kerns  $K$  mit Satz 3.2.9

$$\text{sign} \det \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} K(x, y) \right)_{i,j=0}^n = \text{sign} \det \left( \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y_j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \text{sign} \det \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$$

und somit

$$\epsilon_n(K) \cdot \det \left( \Phi_j^{(i)}(x) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} > 0$$

für alle  $x \in X$  und  $n \in \{0, \dots, r-1\}$ . Setzen wir  $\Phi_j(x) := \Phi_j^{(0)}(x)$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_Y K(x, y) f(y) d\rho(y) = \sum_{j=0}^n \text{sign}(f(B_0)) (-1)^j \int_{B_j} K(x, y) |f(y)| d\rho(y) \\
 &= \text{sign}(f(B_0)) \sum_{j=0}^n \Phi_j(x) (-1)^j.
 \end{aligned}$$

Angenommen, es gelte  $N(g) > Z_\rho(f)$ , dann existiert

$$(x_0, \dots, x_n) = (\zeta_0, \dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_1, \dots, \zeta_m, \dots, \zeta_m) \in \overline{\Delta}_{n+1}(X),$$

wobei der Block  $\zeta_i, \dots, \zeta_i$  von der Länge  $r_i$  ist und für alle  $0 \leq i \leq m$  gilt

$$g(\zeta_i) = g'(\zeta_i) = \dots = g^{(r_i-1)}(\zeta_i) = 0.$$

Hieraus folgt für alle  $0 \leq i \leq m$  und alle  $0 \leq \nu \leq r_i - 1$

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j^{(\nu)}(\zeta_i) (-1)^j = 0.$$

Das homogene Gleichungssystem

$$\left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} z = 0$$

besitzt also eine nichttriviale Lösung. Mit Satz 3.2.15 erhalten wir aus dem oben Gezeigten jedoch

$$\det \left( \Phi_j^*(x_i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \neq 0,$$

was einen Widerspruch zur nichttrivialen Lösbarkeit des homogenen Gleichungssystems darstellt.  $\square$

**Bemerkung 3.2.19.** *Mit Satz 3.2.18 erhalten wir unter Beachtung von Beispiel 3.2.13 i) und geeigneter Wahl des Maßes  $\rho$  (vgl. [Kar68, S. 99–101]) eine Reihe bekannter Spezialfälle [PS71, Aufgabe 36, Aufgabe 38 (S. 43), Aufgabe 80 (S. 50)].*

# Kapitel 4

## Strikte Unimodalität nichtzentraler Verteilungen

Ziel dieses Kapitels ist die Zusammenführung der in Kapitel 2 und Kapitel 3 gewonnenen Resultate, um die strikte Unimodalität einer großen Klasse doppelt nichtzentraler  $F$ - und  $t$ -Verteilungen zu zeigen. Wir folgen hierbei der Vorgehensweise in [AG00b] und sind in der Lage, wesentliche dort erbrachte Resultate zu verallgemeinern.

### 4.1 Überblick über bekannte Resultate der nichtzentralen Verteilungen

In den anschaulichen Fällen, in denen eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Dichte  $f$  besitzt, stellen wir uns strikte Unimodalität so vor, dass  $f$  genau eine Gipfelstelle  $M$  besitzt (d.h.  $f$  ist streng monoton wachsend im Intervall  $(-\infty, M)$  und streng monoton fallend im Intervall  $(M, \infty)$ ). Häufig wird der Begriff intuitiv erklärt und auf den Zusatz *strikt* verzichtet, was zu leicht vermeidbaren Missverständnissen führen kann. Wir erklären in diesem Abschnitt die Eigenschaften *unimodal* und *strikt unimodal* in einem möglichst allgemeinen Rahmen, spezifizieren die Begriffe für die oben beschriebene, anschauliche Situation und zitieren Unimodalitätsresultate bekannter Verteilungen, welche wir später verallgemeinern werden.

**Definition 4.1.1.** *Es sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Verteilungsfunktion.*

- i) Wir nennen  $F$  unimodal mit Modus  $M$ , wenn  $F$  konvex auf  $(-\infty, M)$  und konkav auf  $(M, \infty)$  ist (vgl. [BTC97, S. 19]).*
- ii) Ist  $a := \inf \{x \in \mathbb{R}: F(x) > 0\}$  und  $b := \sup \{x \in \mathbb{R}: F(x) < 1\}$ , so nennen wir  $F$  strikt unimodal mit Modus  $M$ , wenn  $F$  konvex auf  $(-\infty, M)$ , strikt konvex auf  $(a, M)$  sowie konkav auf  $(M, \infty)$  und strikt konkav auf  $(M, b)$  ist (vgl. [BTC97, S. 112]).*
- iii) Wir nennen eine Verteilung unimodal (strikt unimodal), wenn es eine Zahl  $M$  gibt, so dass die zugehörige Verteilungsfunktion unimodal (strikt unimodal) mit Modus  $M$  ist.*

**Bemerkung 4.1.2.** *Ist die Verteilungsfunktion  $F$  strikt unimodal, so ist sie auch unimodal und der Modus  $M$  ist eindeutig bestimmt.*

**Lemma 4.1.3.** *Es sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Verteilungsfunktion.*

- i) Ist  $M \in \mathbb{R}$  und  $F$  absolut stetig auf  $(-\infty, M)$  sowie absolut stetig auf  $(M, \infty)$ , so existiert die Ableitung  $F'$   $\lambda$ -fast überall auf  $(-\infty, M)$  bzw.  $(M, \infty)$ . Es seien  $X_1 \subset (-\infty, M)$  bzw.  $X_2 \subset (M, \infty)$  die jeweiligen Mengen auf denen  $F'$  existiert. Ist  $F'$  monoton wachsend auf  $X_1$  sowie monoton fallend auf  $X_2$ , so ist  $F$  unimodal mit Modus  $M$  (vgl. [Els11, S. 227, S. 302ff]).*
- ii) Ist  $M \in (a, b)$  (vgl. Definition 4.1.1) und  $F$  absolut stetig auf  $(-\infty, M)$  sowie absolut stetig auf  $(M, \infty)$ , so existiert die Ableitung  $F'$   $\lambda$ -fast überall auf  $(a, M)$  bzw.  $(M, b)$ . Es bezeichne  $X_1 \subset (a, M)$  bzw.  $X_2 \subset (M, b)$  die jeweilige Menge, auf der  $F'$  existiert. Ist  $F'$  streng monoton wachsend auf  $X_1$  sowie streng monoton fallend auf  $X_2$ , so ist  $F$  strikt unimodal mit Modus  $M$ .*

*Beweis.* Lemma 4.1.3 ergibt sich im Wesentlichen durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgueintegral (vgl. [Els11, S. 304]).  $\square$

Wir werden fast ausschließlich Lemma 4.1.3 zum Nachweis der (strikten) Unimodalität verwenden, indem wir Monotonieeigenschaften der jeweils existierenden Wahrscheinlichkeitsdichten untersuchen. Zunächst zitieren wir jedoch bekannte Unimodalitätsresultate, die wir zum Teil benutzen und verallgemeinern werden.

Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  zeigen Min'ko und Petunin die Unimodalität der nichtzentralen  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Verteilung. Darüber hinaus wird im Fall  $n = 1$  eine Charakterisierung der Unimodalitätseigenschaft angegeben (vgl. [MP88]). Verfeinerungen dieses Resultates für den Fall reellwertiger  $n$  sowie alle weiteren hier zitierten Resultate sind [AG00b] entnommen.

**Satz 4.1.4** (van Aubel, Gawronski). *Ist  $n > 2$ ,  $\lambda \geq 0$  oder  $n = 2$ ,  $\lambda > 2$ , so ist die  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Verteilung strikt unimodal. Für  $\lambda \leq 2$  ist  $p_{2,\lambda}$  streng monoton fallend auf  $(0, \infty)$ .*

Eine Verallgemeinerung der strikten Unimodalität ist die sogenannte Glockenförmigkeit, die wir in Anlehnung an [Kar68, S. 325] definieren.

**Definition 4.1.5.** *Es sei  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte und ihr Träger  $(a, b)$  ein offenes Intervall mit Lebesguemaß  $\lambda((a, b)) = \infty$ . Wir nennen  $p$  glockenförmig der Ordnung  $r \in \mathbb{N}$ , wenn für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq r$  die  $k$ -te Ableitung  $p^{(k)}$  auf  $(a, b)$  existiert und exakt  $k$  einfache Nullstellen besitzt. Gilt obige Eigenschaft für alle  $r \in \mathbb{N}$  so nennen wir  $p$  glockenförmig.*

Man beachte, dass eine glockenförmige Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$  wegen der einfachen Nullstelle ihrer ersten Ableitung ein lokales Extremum  $M$  auf ihrem Träger  $(a, b)$  besitzt. Wegen  $\lambda((a, b)) = \infty$  ist  $p$  streng monoton wachsend auf  $(a, M)$ , streng monoton fallend auf  $(M, b)$  und somit strikt unimodal. Mit dieser Definition ist eine Verallgemeinerung von Satz 4.1.4 möglich.

**Satz 4.1.6** (van Aubel, Gawronski). *Für  $n > 2$ ,  $\lambda \geq 0$  ist die Dichte  $p_{n,\lambda}$  der  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Verteilung glockenförmig der Ordnung  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , d.h. für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  hat  $p_{n,\lambda}^{(k)}$  genau  $k$  einfache Nullstellen auf  $(0, \infty)$ . Die Funktion  $p_{n,\lambda}^{(k)}$  wechselt auf  $(0, \infty)$  genau  $k$  mal das Vorzeichen.*

**Satz 4.1.7** (van Aubel, Gawronski). *Für  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$  und  $\lambda_1 \geq 0$  ist die Dichte  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}$  der einfach nichtzentralen  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}$ -Verteilung glockenförmig der Ordnung  $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$ .*

**Korollar 4.1.8** (van Aubel, Gawronski). *Es sei  $n_2 > 0$ . Für  $n_1 > 2$ ,  $\lambda_1 \geq 0$  oder  $n_1 = 2$ ,  $\lambda_1 > 2$  ist die  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}$ -Verteilung strikt unimodal. Für  $\lambda_1 \leq 2$  ist  $g_{2, n_2, \lambda_1, 0}$  streng monoton fallend auf  $(0, \infty)$ .*

**Satz 4.1.9** (van Aubel, Gawronski). *Für alle  $n > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  ist die Dichte  $h_{\mu, n, 0}$  der einfach nichtzentralen  $t_{\mu, n, 0}$ -Verteilung glockenförmig.*

**Korollar 4.1.10** (van Aubel, Gawronski). *Für alle  $n > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  ist die einfach nichtzentrale  $t_{\mu, n, 0}$ -Dichte strikt unimodal.*

## 4.2 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen Verteilungen

Die strikte Unimodalität der zentralen  $F$ - und  $t$ -Verteilungen ist leicht nachzuweisen. Setzt man die Ableitung der jeweiligen Dichtefunktionen gleich Null, so ist die Bestimmung des Modus  $M$  explizit möglich, da die zu lösende Gleichung nur aus elementaren Funktionen besteht. Schon im Falle der einfach nichtzentralen Verteilungen scheitert dieses Vorgehen. Dies resultiert daraus, dass die Darstellungen der jeweiligen Dichten und ihrer Ableitungen nur durch Parameterintegrale bzw. Doppelreihen gegeben sind. Der Integrand des Parameterintegrals setzt sich zudem aus höhertranszendenten Funktionen zusammen, deren Verhalten zwar weitestgehend bekannt ist, die aber dafür sorgen, dass ein evtl. auftretender Modus nur implizit als Nullstelle der Ableitung gegeben ist.

Für den doppelt nichtzentralen  $F$ -Fall erhöht sich im Vergleich zum einfach nichtzentralen Fall die Schwierigkeit der Untersuchung dadurch, dass der Integrand nun im Wesentlichen aus dem Produkt zweier nichtzentraler  $\chi^2$ -Dichten besteht. Beweisideen, welche die vergleichsweise „einfachere“ Struktur im Falle der einfach nichtzentralen  $F$ -Dichte ausnutzen sind deshalb häufig nicht übertragbar. Analoges gilt für die doppelt nichtzentrale  $t$ -Dichte.

Es ist aus diesem Grund wenig überraschend, dass an einigen Stellen Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen, um einen Nachweis der strikten Unimodalität führen zu können. Die dafür notwendigen Hilfsmittel sind im Wesentlichen die in Kapitel 3 bereitgestellten Resultate. Die noch fehlenden Hilfsmittel ergänzen wir an dieser Stelle.

**Satz 4.2.1.** *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \not\equiv 0$  sei stetig und so beschaffen, dass für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x)x dx = \int_I f(x)x^2 dx = \dots = \int_I f(x)x^{k-1} dx = 0.$$

*Dann besitzt  $f$  in  $I$  mindestens  $k$  (relevante) Vorzeichenwechsel.*

*Beweis.* Vgl. [PS70, S. 65]. □

**Satz 4.2.2.** *Es seien  $n > 2$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k < \frac{n}{2}$ . Dann gilt*

$$\int_0^\infty \xi^\nu p_{n,\lambda}^{(k)}(\xi) d\xi = 0, \quad \nu = 0, \dots, k-1.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich durch sukzessive Anwendung von Bemerkung 2.1.7 auf die Darstellung aus Satz 2.1.8 (vgl. [AG00b, S. 241]). □

**Satz 4.2.3.** *Für die nichtzentrale  $\chi_{n,\lambda}^2$ -Dichte  $p_{n,\lambda}$  gilt*

- i)  $p_{n,\lambda}(xy)$  ist genau dann  $ERR_2$  bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ , wenn  $\lambda \leq n$ .*
- ii)  $p_{n,\lambda}(\frac{y}{x})$  ist genau dann  $ETP_2$  bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ , wenn  $\lambda \leq n$ .*

*Beweis.* Vgl. [AG00b, S. 238] und Satz 3.2.12. □

### 4.2.1 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen $F$ -Verteilung

Wir zeigen die strikte Unimodalität einer großen Klasse doppelt nichtzentraler  $F$ -Verteilungen, indem wir nachweisen, dass die Ableitung  $g'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  genau eine einfache Nullstelle im Intervall  $(0, \infty)$  besitzt. Mit  $N_k$  bezeichnen wir in diesem Abschnitt die Anzahl der Nullstellen von  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}$  inklusive Vielfachheiten im Intervall  $(0, \infty)$ .

Satz 4.2.1 und Satz 4.2.2 liefern das entscheidende Hilfsmittel um  $N_k$  nach unten abzuschätzen.

**Satz 4.2.4.** *Es seien  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k < \frac{n_1}{2}$ . Dann besitzt  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}$  mindestens  $k$  Nullstellen inklusive Vielfachheiten im Intervall  $(0, \infty)$ , es gilt also  $N_k \geq k$ .*

*Beweis.* Mit Satz 2.2.8 und dem Satz von Fubini (für die Gültigkeit der dort geforderten Voraussetzungen vgl. Satz 4.2.2 und Bemerkung 2.2.6) ergibt sich für  $\nu \in \{0, \dots, k-1\}$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty x^\nu g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}(x) dx \\
 &= \int_0^\infty x^\nu \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{k+1} \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}\left(\frac{n_1}{n_2}xy\right) p_{n_2, \lambda_2}(y) y^{k+1} dy dx \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^\nu \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{k+1} p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}\left(\frac{n_1}{n_2}xy\right) p_{n_2, \lambda_2}(y) y^{k+1} dx dy \\
 &= \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{k-\nu} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\nu+1} x^\nu y^{\nu+1} p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}\left(\frac{n_1}{n_2}xy\right) dx \right) y^{k-\nu} p_{n_2, \lambda_2}(y) dy.
 \end{aligned}$$

Für  $y \in (0, \infty)$  erhalten wir nach der Substitution  $\xi = \frac{n_1}{n_2}xy$  in Satz 4.2.2

$$0 = \int_0^\infty \xi^\nu p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\nu+1} x^\nu y^{\nu+1} p_{n_1, \lambda_1}^{(k)}\left(\frac{n_1}{n_2}xy\right) dx$$

und somit

$$\int_0^\infty x^\nu g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}(x) dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, k-1.$$

Aus Satz 4.2.1 folgt nun, dass  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}$  mindestens  $k$  mal das Vorzeichen auf  $(0, \infty)$  wechselt.  $\square$

Hierin enthalten ist die untere Abschätzung  $N_1 \geq 1$ , in deren Nachweis lediglich die Orthogonalitätseigenschaft der Laguerre-Polynome sowie der elementare Satz 4.2.1 eingeflossen sind. Wir zeigen nun die obere Abschätzung  $N_1 \leq 1$ , für die wir die in Kapitel 3 bereitgestellte Theorie nutzen. Hieraus ergibt sich dann unmittelbar das Resultat über die strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung.

**Satz 4.2.5.** *Es seien  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$  und  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$ . Dann hat  $g'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  höchstens eine einfache Nullstelle in  $(0, \infty)$ , d.h. es gilt  $N_1 \leq 1$ .*

*Beweis.* Mit der Integraldarstellung aus Satz 2.2.8 und der Substitution  $t = \frac{y}{x}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 g'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \int_0^\infty p'_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{n_1}{n_2}xt\right) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 dt \\
 &= \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{x^3} \int_0^\infty p'_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{n_1}{n_2}y\right) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{y}{x}\right) y^2 dy.
 \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.3 ist  $p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{y}{x}\right)$   $ETP_2$  bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$  und die Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y) = p'_{n_1, \lambda_1}\left(\frac{n_1}{n_2}y\right) y^2$$

wechselt nach Satz 4.1.6 genau einmal das Vorzeichen auf  $(0, \infty)$ . Unter Anwendung von Satz 3.2.18 folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.2.6.** *Für  $n_2 > 0$ ,  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  und  $n_1 > 2$ ,  $\lambda_1 \geq 0$  oder  $n_1 = 2$ ,  $\lambda_1 > 2$  ist die doppelt nichtzentrale  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -Verteilung strikt unimodal. Für  $n_1 = 2$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq 2$ ,  $n_2 > 0$  und  $\lambda_2 \geq 0$  ist  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  streng monoton fallend auf  $(0, \infty)$  und die  $F_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$ -Verteilung somit unimodal. Für den in allen Fällen eindeutig bestimmten Modus  $M_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^F$  gilt*

$$M_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}^F \begin{cases} > 0, & \text{falls } n_2 > 0, 0 \leq \lambda_2 \leq n_2 \text{ und } n_1 > 2, \lambda_1 \geq 0 \text{ oder } n_1 = 2, \lambda_1 > 2 \\ = 0, & \text{falls } n_2 > 0, \lambda_2 \geq 0, n_1 = 2, 0 \leq \lambda_1 \leq 2. \end{cases}$$

*Beweis.* Für die Parameter  $n_1 > 2$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  folgt die Behauptung aus Satz 4.2.4 und Satz 4.2.5. Ist  $n_1 = 2$ ,  $\lambda_1 > 2$ , so ist  $p_{n_1, \lambda_1}$  nach Satz 4.1.4 strikt unimodal und wechselt im Intervall  $(0, \infty)$  genau einmal das Vorzeichen. Ist zudem  $n_2 > 0$ ,  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  so folgt analog zum Beweis von Satz 4.2.5 die Abschätzung  $0 \leq N_1 \leq 1$ . Aus Satz 2.1.4 und Lemma 2.2.7 erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p'_{2, \lambda_1}(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda_1}{2}} \left( \frac{\lambda_1}{2} - 1 \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p'_{2, \lambda_1}(x) = 0$$

und mit Bemerkung 2.2.6 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz (hier gleichbedeutend mit einem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen) ergibt sich

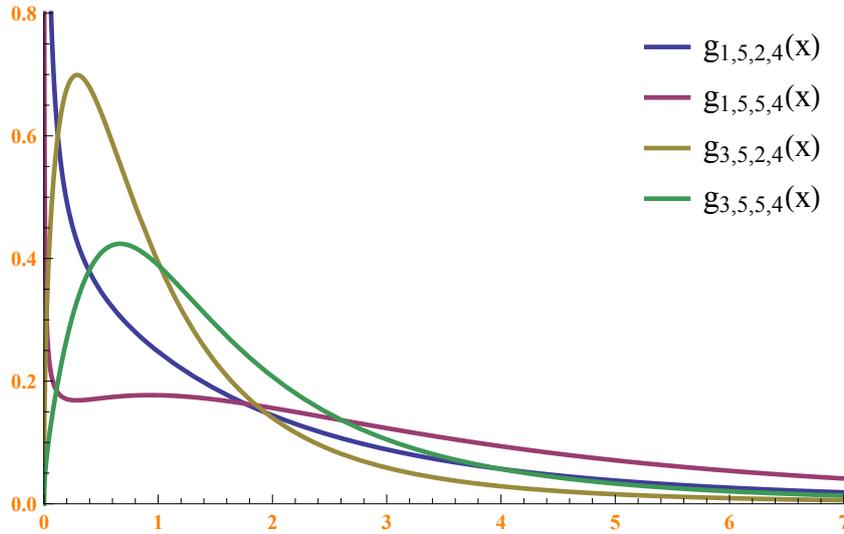
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g'_{2, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \int_0^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} p'_{2, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 dt \\ &= \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda_1}{2}} \left( \frac{\lambda_1}{2} - 1 \right) \int_0^{\infty} p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 dt > 0. \end{aligned}$$

Also ist  $g_{2, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  in einer rechtsseitigen Umgebung von 0 streng monoton wachsend und es folgt  $N_1 \geq 1$ .

Für  $n_1 = 2$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq 2$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  folgt mit Satz 4.1.4 für alle  $x > 0$

$$g'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_0^{\infty} p'_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 dt < 0.$$

Hieraus ergibt sich im jeweiligen Fall die eindeutige Existenz eines Modus, dessen Lage wie angegeben bestimmt ist.  $\square$


 Abb. 4.1: Dichten der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung

**Bemerkung 4.2.7.**

- i) Numerische Plots deuten nicht darauf hin, dass die Einschränkung  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  in irgendeiner Art und Weise zwingend wäre. Beweistechnisch ist sie hier allerdings nicht zu vermeiden. Es bedarf wohl anderer Techniken, um die strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung für die verbleibenden Fälle zu zeigen.
- ii) Für  $0 < \lambda_2 \leq n_2$  ist das  $ESR_r$ -Verhalten von  $p_{n_2, \lambda_2}(\frac{y}{x})$  ungeklärt. Exemplarische Berechnungen unterstützen die Vermutung, dass  $p_{n_2, \lambda_2}(\frac{y}{x})$   $ETP_r$  für  $r \geq 3$  bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$  ist. Im Spezialfall  $\lambda_2 = 0$  ist dies leicht nachzuweisen. Für den allgemeinen Fall ist jedoch der Nachweis der Vorzeichenregularität schon im Fall  $r = 2$  sehr trickreich (vgl. [AG00b, S. 238]). Die Komplexität der Untersuchung nimmt für größere  $r$ -Werte rapide zu. Ist  $p_{n_2, \lambda_2}(\frac{y}{x})$  sogar  $ETP_\infty$ , so schließt man analog zu Satz 4.2.5 und mit Satz 4.2.4 sowie Satz 4.1.6 auf die Glockenförmigkeit von  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  der Ordnung  $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$ .
- iii) Aus Satz 2.1.4 ergibt sich

$$\frac{p'_{n, \lambda}(x)}{p_{n, \lambda}(x)} = \frac{d}{dx} \log p_{n, \lambda}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2x} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda x + j_{\frac{n-2}{2}, k}^2}.$$

Hieraus folgt, dass  $p_{n, \lambda}$  für  $0 < n < 2$  und kleine  $\lambda$ -Werte monoton fallend auf  $(0, \infty)$  ist. Eine Präzisierung dieser Aussage findet man in [Yu11]: Für  $0 < n < 2$  gibt es ein  $\lambda_n \in (2, 4)$ , so dass für alle  $0 \leq \lambda \leq \lambda_n$  gilt:  $p_{n, \lambda}$  ist monoton fallend auf  $(0, \infty)$ . Für alle  $\lambda > \lambda_n$  ist  $p_{n, \lambda}$  bimodal (der Begriff wird analog zu Definition 4.1.1 erklärt).

Somit folgt: Für  $0 < n_1 < 2$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_{n_1}$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  ist  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  monoton fallend auf  $(0, \infty)$  und somit unimodal mit Modus 0.

Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch die bewiesenen Unimodalitätsresultate und veranschaulicht, dass sich die Bimodalität von  $p_{n_1, \lambda_1}$  auf die doppelt nichtzentrale  $F$ -Dichte  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}$  übertragen kann (hier:  $g_{1, 5, 5, 4}(x)$ ).

### 4.2.2 Strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen $t$ -Verteilung

Analog zum Vorgehen im doppelt nichtzentralen  $F$ -Fall untersuchen wir die strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $t$ -Verteilung. Mit  $N_k^-$ ,  $N_k^+$  bzw.  $N_k^0$  bezeichnen wir in diesem Abschnitt die Anzahl der Nullstellen von  $h_{\mu, n, \lambda}^{(k)}$  inklusive Vielfachheiten auf den Intervallen  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  bzw. im Punkt 0. Die Zahl  $N_k := N_k^- + N_k^0 + N_k^+$  kennzeichnet dann die Anzahl aller Nullstellen inklusive Vielfachheiten auf  $\mathbb{R}$ . Zunächst schätzen wir  $N_k$  nach unten ab.

**Satz 4.2.8.** *Es seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt  $h_{\mu, n, \lambda}^{(k)}$  auf  $\mathbb{R}$  mindestens  $k$  Nullstellen inklusive Vielfachheiten, es gilt also  $N_k \geq k$ .*

*Beweis.* Wir betrachten für  $x \in \mathbb{R}$  die Integraldarstellung

$$h_{\mu, n, \lambda}^{(k)}(x) = c \int_0^\infty p_{n, \lambda}(t) t^{\frac{k+1}{2}} H_k \left( x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) e^{-\left(x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

mit  $c := \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{k+1}{2}}$  (vgl. Satz 2.3.6).

Durch Anwendung des Satzes von Fubini (für die Gültigkeit der dort geforderten Voraussetzungen vgl. Bemerkung 2.3.5 und Bemerkung 2.2.6) und der Substitution  $x = \left(\xi + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{\frac{2n}{t}}$ ,  $t \in (0, \infty)$  erhalten wir für  $\nu \in \{0, \dots, k-1\}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu h_{\mu, n, \lambda}^{(k)}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu c \int_0^\infty p_{n, \lambda}(t) t^{\frac{k+1}{2}} H_k \left( x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) e^{-\left(x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} dt dx \\ &= c \int_0^\infty t^{\frac{k+1}{2}} p_{n, \lambda}(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu H_k \left( x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) e^{-\left(x \sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \right) dt \\ &= c(2n)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{k-\nu}{2}} p_{n, \lambda}(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_k(\xi) \left(\xi + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^\nu d\xi \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir sukzessiv die Orthogonalitätseigenschaft der Hermite-Polynome (vgl. Bemerkung 2.3.5) ausgenutzt, welche garantiert, dass das innere Integral verschwindet. Mit Satz 4.2.1 folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.2.9.** *Es seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$ . Dann besitzt  $h'_{\mu, n, \lambda}$  höchstens eine einfache Nullstelle auf  $\mathbb{R}$ , es gilt also  $N_1 \leq 1$ .*

*Beweis.* Wir setzen abkürzend

$$c := \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2n} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

und schätzen die Zahlen  $N_1^+$ ,  $N_1^-$  und  $N_1^0$  nach oben ab.

i) Für  $x > 0$  gilt nach der Substitution  $y = x\sqrt{\frac{t}{2n}}$

$$\begin{aligned} h_{\mu,n,\lambda}^{(k)}(x) &= c \int_0^\infty e^{-\left(x\sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_k \left( x\sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) t^{\frac{k+1}{2}} p_{n,\lambda}(t) dt \\ &= c \int_0^\infty e^{-\left(y - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_k \left( y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{y}{x} \right)^{k+1} (2n)^{\frac{k+1}{2}} p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right) \frac{4ny}{x^2} dy \\ &= \frac{2c(2n)^{\frac{k+3}{2}}}{x^{k+3}} \int_0^\infty y^{k+2} e^{-\left(y - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_k \left( y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right) dy \end{aligned}$$

und somit

$$h'_{\mu,n,\lambda}(x) = \frac{8cn^2}{x^4} \int_0^\infty y^3 e^{-\left(y - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_1 \left( y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right) dy.$$

Da der Kern  $K(x, y) := p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right)$  nach Satz 4.2.3 und Satz 3.2.12 *ETP*<sub>2</sub> bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$  ist, liefert die Anwendung von Satz 3.2.18

$$N_1^+ \leq \text{Anzahl der Vorzeichenwechsel von } H_1 \left( y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right), y \in (0, \infty).$$

ii) Für  $x < 0$  substituieren wir  $y = -x\sqrt{\frac{t}{2n}}$  und erhalten

$$\begin{aligned} h_{\mu,n,\lambda}^{(k)}(x) &= c \int_0^\infty e^{-\left(x\sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_k \left( x\sqrt{\frac{t}{2n}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) t^{\frac{k+1}{2}} p_{n,\lambda}(t) dt \\ &= \frac{2c(2n)^{\frac{k+3}{2}}}{(-x)^{k+3}} \int_0^\infty y^{k+2} e^{-\left(-y - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_k \left( -y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right) dy. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$h'_{\mu,n,\lambda}(x) = \frac{8cn^2}{x^4} \int_0^\infty y^3 e^{-\left(-y - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^2} H_1 \left( -y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) p_{n,\lambda} \left( \frac{y^2}{x^2} 2n \right) dy.$$

Erneut liefert die Anwendung von Satz 3.2.18

$$N_1^- \leq \text{Anzahl der Vorzeichenwechsel von } H_1 \left( y - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right), y \in (-\infty, 0).$$

iii) Für  $x = 0$  gilt

$$h_{\mu,n,\lambda}^{(k)}(x) = c e^{-\frac{\mu^2}{2}} H_k \left( -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) \int_0^\infty t^{\frac{k+1}{2}} p_{n,\lambda}(t) dt,$$

also insbesondere (vgl. [JKB95, S. 447])

$$h'_{\mu,n,\lambda}(0) = c e^{-\frac{\mu^2}{2}} H_1 \left( -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) (n + \lambda).$$

Da  $H_1$  genau eine einfache Nullstelle auf  $\mathbb{R}$  besitzt, erhalten wir mit i), ii) und iii)

$$N_1 = N_1^+ + N_1^- + N_1^0 \leq 1.$$

□

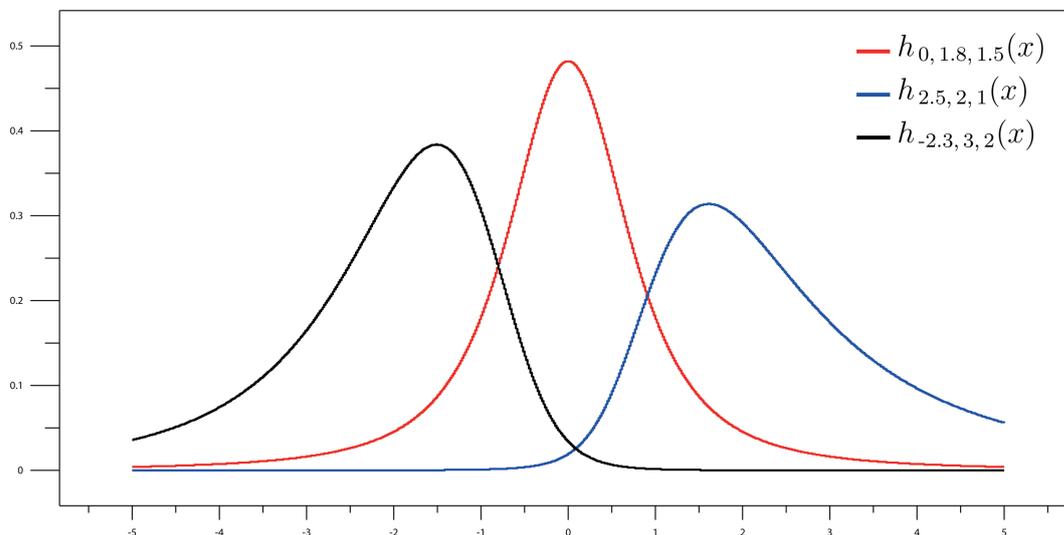


Abb. 4.2: Dichten der doppelt nichtzentralen  $t$ -Verteilung

Aus Satz 4.2.8 und Satz 4.2.9 folgt nun unmittelbar ein Resultat über die strikte Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $t$ -Verteilung.

**Satz 4.2.10.** *Es seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$ . Dann ist die doppelt nichtzentrale  $t_{\mu,n,\lambda}$ -Verteilung strikt unimodal. Für den eindeutig bestimmten Modus  $M_{\mu,n,\lambda}^t$  gilt*

$$M_{\mu,n,\lambda}^t \begin{cases} > 0, & \text{falls } \mu > 0 \\ = 0, & \text{falls } \mu = 0 \\ < 0, & \text{falls } \mu < 0. \end{cases}$$

Abbildung 4.2 illustriert dieses Resultat am Beispiel dreier doppelt nichtzentraler  $t$ -Dichten  $h_{\mu,n,\lambda}$ .

**Bemerkung 4.2.11.**

- i) Auch hier deuten numerische Plots nicht darauf hin, dass die einschränkende Bedingung  $0 \leq \lambda \leq n$  notwendig wäre. Beweistechnisch ist sie jedoch wie im doppelt nichtzentralen  $F$ -Fall nicht zu vermeiden.*
- ii) Ist für  $0 \leq \lambda \leq n$  der Kern  $p_{n,\lambda}\left(\frac{y}{x}\right)$   $ETP_\infty$  bzgl.  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ , so folgt die Glockenförmigkeit von  $h_{\mu,n,\lambda}$  analog zu Satz 4.2.9 und mit Satz 4.2.8 sowie Bemerkung 2.3.5.*

# Kapitel 5

## Modusmonotonieeigenschaften der doppelt nichtzentralen Verteilungen

### 5.1 Modusmonotonieeigenschaften bei Variation eines Nichtzentralitätsparameters

Plots der doppelt nichtzentralen  $F$ - und  $t$ -Dichten legen die Vermutung nahe, dass der jeweils eindeutig bestimmte Modus (vgl. Satz 4.2.6, Satz 4.2.10) ein Monotonieverhalten zeigt, wenn man (bei ansonsten konstanten Parametern) genau einen Nichtzentralitätsparameter variiert. Die Abbildung 5.1 zeigt dies exemplarisch im Fall der doppelt nichtzentralen  $F_{20,5,\lambda_1,4}$ -Dichte. Wir studieren aus diesem Grund Monotonieeigenschaften der doppelt nichtzentralen  $F$ - und  $t$ -Modi als Funktion eines Nichtzentralitätsparameters und verwenden Begriffe und Techniken aus Kapitel 3.

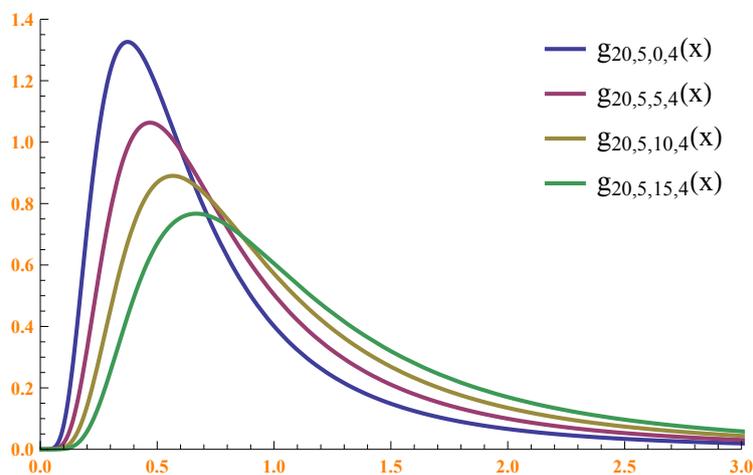


Abb. 5.1: Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen  $F$ -Modus bei Variation von  $\lambda_1$

Das zentrale Hilfsmittel für alle weiteren Untersuchungen ist der folgende Satz (vgl. [Kar63, S. 158]).

**Satz 5.1.1.** *Es seien  $X, Y \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $K(x, y)$   $ETP_2$  ( $ERR_2$ ) auf  $X \times Y$ . Ferner habe  $K(x, y)$  für jedes feste  $x \in X$  ein eindeutig bestimmtes Maximum an  $y = \phi(x)$ , wobei  $\phi: X \rightarrow Y$  eine nach  $x$  differenzierbare Funktion ist. Dann ist  $\phi$  streng monoton wachsend (fallend) auf  $X$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt für alle  $x \in X$

$$\frac{\partial}{\partial y} K(x, \phi(x)) = 0,$$

woraus wir durch Anwendung der Kettenregel für alle  $x \in X$

$$0 = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y} K(x, \phi(x)) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K(x, \phi(x)) + \phi'(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, \phi(x))$$

erhalten. Ferner gilt nach Voraussetzung für alle  $x \in X$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K(x, \phi(x)) > 0 \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K(x, \phi(x)) < 0 \right).$$

Da  $K(x, y)$  bei festem  $x \in X$  ein Maximum an  $y = \phi(x)$  besitzt, folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, \phi(x)) < 0$$

und somit gilt für alle  $x \in X$

$$\phi'(x) > 0 \quad (\phi'(x) < 0).$$

□

Um diesen Satz auf die doppelt nichtzentralen Dichten anzuwenden, ist es notwendig, deren  $ESR_2$ -Eigenschaften herauszuarbeiten. Zunächst zitieren wir ein bekanntes Ergebnis, auf das wir anschließend zurückgreifen werden (vgl. [Kar63, S. 118–121], [AG00b, S. 238]).

**Lemma 5.1.2.** *Es seien  $n, n_1, n_2, m > 0$ . Dann sind die einfach nichtzentralen Dichten  $p_{n,\lambda}(x)$  und  $g_{n_1, n_2, \lambda, 0}(x)$   $ETP_\infty$  bzgl.  $(\lambda, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ . Die einfach nichtzentrale  $t$ -Dichte  $h_{\mu, m, 0}(x)$  ist  $ETP_\infty$  bzgl.  $(\mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

Die folgenden Lemmata untersuchen die  $ESR$ -Eigenschaften der doppelt nichtzentralen Dichten und stellen somit wichtige Hilfsmittel beim Nachweis der Hauptresultate dieses Kapitels dar.

**Lemma 5.1.3.** *Es seien  $n_1, n_2 > 0$  und  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$ . Dann ist  $\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\lambda_1, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .*

*Beweis.* Wir setzen zur Abkürzung  $\Lambda_1 := X := T := (0, \infty)$ .

Für  $(\lambda_1, x) \in \Lambda_1 \times X$  betrachten wir

$$\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}(t) p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{t}{x^2} dt$$

und setzen

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, t) &:= p_{n_1, \lambda_1}(t) && \text{für } (\lambda_1, t) \in \Lambda_1 \times T, \\ M(t, x) &:= p_{n_2, \lambda_2}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{t}{x^2} && \text{für } (t, x) \in T \times X. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.1.2 ist  $L(\lambda_1, t)$   $ETP_\infty$  bzgl.  $(\lambda_1, t) \in \Lambda_1 \times T$ . Wegen  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  ist  $M(t, x)$  nach Satz 4.2.3 und Lemma 3.2.12 iii)  $ETP_2$  bzgl.  $(t, x) \in T \times X$ . Eine Anwendung von Lemma 3.2.12 v) liefert nun unmittelbar die Behauptung. Hierbei beachte man, dass die dort geforderte Vertauschung von Differentiation und Integration möglich ist. Der Nachweis gelingt unter Anwendung von Satz 2.1.9, Satz 2.2.8 und eines Standardsatzes über die Differentiation von Parameterintegralen (vgl. [Els11, S. 148]).  $\square$

Hieraus folgt mit Satz 3.2.12 unmittelbar:

**Korollar 5.1.4.** Für  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  ist  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\lambda_1, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

**Lemma 5.1.5.** Es seien  $n_1, n_2 > 0$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq n_1$ . Dann ist  $\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$   $ERR_2$  bzgl.  $(\lambda_2, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

*Beweis.* Analog zu oben setzen wir abkürzend  $\Lambda_2 := T := X := (0, \infty)$  sowie

$$\begin{aligned} L(x, t) &:= p_{n_1, \lambda_1}(xt) && \text{für } (x, t) \in X \times T, \\ M(t, \lambda_2) &:= p_{n_2, \lambda_2}(t) t && \text{für } (t, \lambda_2) \in T \times \Lambda_2. \end{aligned}$$

Betrachten wir für  $(\lambda_2, x) \in \Lambda_2 \times X$  nun

$$\tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) = \int_0^\infty p_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t dt,$$

so erhalten wir analog zu oben:  $L(x, t)$  ist  $ERR_2$  bzgl.  $(x, t) \in X \times T$ . Ferner ist  $M(t, \lambda_2)$   $ETP_\infty$  bzgl.  $(t, \lambda_2) \in T \times \Lambda_2$ . Eine erneute Anwendung von Satz 3.2.12 v) liefert nun die Behauptung.  $\square$

**Korollar 5.1.6.** Für  $0 \leq \lambda_1 \leq n_1$  ist  $g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x)$   $ERR_2$  bzgl.  $(\lambda_2, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

Als Nächstes studieren wir *ESR*-Eigenschaften der doppelt nichtzentralen  $t$ -Dichte.

**Lemma 5.1.7.** *Es sei  $n > 0$ .*

- i) *Ist  $\mu \leq 0$ , so ist  $h_{\mu,n,\lambda}(x)$   $ERR_2$  bzgl.  $(\lambda, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .*
- ii) *Ist  $\mu \geq 0$ , so ist  $h_{\mu,n,\lambda}(x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\lambda, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, 0)$ .*

*Beweis.* Wir beweisen nur Teil i), der Beweis von ii) verläuft völlig analog.

Zunächst setzen wir abkürzend  $X := T := \Lambda := (0, \infty)$ . Für  $x > 0$  betrachten wir die Darstellung

$$h_{\mu,n,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}(t) \sqrt{t} dt$$

und setzen

$$\begin{aligned} L(x, t) &:= e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} \quad \text{für } (x, t) \in X \times T, \\ M(t, \lambda) &:= p_{n,\lambda}(t) \sqrt{t} \quad \text{für } (t, \lambda) \in T \times \Lambda. \end{aligned}$$

Der Kern  $M(t, \lambda)$  ist nach Lemma 5.1.2 und Satz 3.2.12  $ETP_\infty$  bzgl.  $(\lambda, t) \in \Lambda \times T$ . Zur Untersuchung von  $L(x, t)$  betrachten wir für  $(x, t) \in X \times T$

$$\begin{vmatrix} L(x, t) & \frac{\partial}{\partial t} L(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} L(x, t) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} L(x, t) \end{vmatrix} = \frac{e^{-\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2}}{2\sqrt{nt}} \left( -2x\sqrt{\frac{t}{n}} + \mu \right) < 0.$$

Eine erneute Anwendung von Satz 3.2.12 v) liefert nun die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.1.8.** *Es seien  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$ . Dann ist der Kern  $h_{\mu,n,\lambda}(x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Wir teilen die Untersuchung der  $ETP_2$ -Eigenschaft von

$$\begin{aligned} K(\mu, x) := h_{\mu,n,\lambda}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}(t) \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}\left(\frac{t}{x^2}\right) \frac{\sqrt{t}}{x^3} dt \end{aligned}$$

in drei Schritte auf.

- i) Für  $x > 0$  setzen wir  $M := \mathbb{R}$ ,  $T := X := (0, \infty)$  sowie

$$\begin{aligned} L(\mu, t) &:= e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} \quad \text{für } (\mu, t) \in M \times T, \\ K(t, x) &:= p_{n,\lambda}\left(\frac{t}{x^2}\right) \frac{\sqrt{t}}{x^3} \quad \text{für } (t, x) \in T \times X. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.2.3 ist  $K(t, x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(t, x) \in T \times X$ .

Ferner gilt für  $(\mu, t) \in M \times T$

$$\begin{vmatrix} L(\mu, t) & \frac{\partial}{\partial t} L(\mu, t) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} L(\mu, t) & \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial t} L(\mu, t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2t} e^{-\left(-\mu + \sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2} \sqrt{\frac{t}{n}} > 0,$$

somit ist  $L(\mu, t)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\mu, t) \in M \times T$ . Eine erneute Anwendung von Satz 3.2.12 v) liefert für diesen Fall die Behauptung. Die dort geforderte Vertauschung von Integration und Differentiation weist man analog zu Satz 2.3.6 mit dem mehrfach zitierten Standardsatz über die Differentiation von Parameterintegralen nach.

ii) Für  $x < 0$  verläuft der Nachweis analog. Hierbei nutzt man die Identität

$$h_{\mu, n, \lambda}(x) = h_{-\mu, n, \lambda}(-x)$$

aus und zeigt, dass der Kern

$$\tilde{L}(\mu, t) := e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{n}} + \mu\right)^2}$$

$ERR_2$  auf  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  ist.

iii) Für den Fall  $x = 0$  erhalten wir nach einer kurzen Rechnung

$$\begin{vmatrix} K(\mu, 0) & \frac{\partial}{\partial x} K(\mu, 0) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} K(\mu, 0) & \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial x} K(\mu, 0) \end{vmatrix} = \frac{e^{-\mu^2}}{2\pi n^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty p_{n, \lambda}(t) \sqrt{t} dt \int_0^\infty p_{n, \lambda}(t) t dt > 0$$

für alle  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

### 5.1.1 Monotonieeigenschaften des doppelt nichtzentralen $F$ -Modus

In Satz 4.2.6 konnten wir hinreichende Bedingungen für die Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $F$ -Verteilung angeben. Wir untersuchen im Folgenden den eindeutig bestimmten Modus als Funktion des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  und schreiben hierfür  $M_{n_1, n_2, \lambda_2}^F(\lambda_1)$  bzw.  $M_{n_1, n_2, \lambda_1}^F(\lambda_2)$ .

**Satz 5.1.9.** *Es seien  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$  und  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$ . Dann ist die Funktion*

$$\phi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad \phi(\lambda_1) = M_{n_1, n_2, \lambda_2}^F(\lambda_1)$$

*wohldefiniert und streng monoton wachsend im Intervall  $(0, \infty)$ .*

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus Satz 4.2.6.

Wir setzen  $\Lambda_1 := X := (0, \infty)$  und betrachten für  $0 \leq \lambda_2 \leq n_2$  den Kern

$$K(\lambda_1, x) := g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \quad \text{mit } (\lambda_1, x) \in \Lambda_1 \times X.$$

Nach Korollar 5.1.4 ist  $K(\lambda_1, x)$   $ETP_2$  bzgl.  $(\lambda_1, x) \in \Lambda_1 \times X$ . Ferner besitzt  $K(\lambda_1, x)$  für jedes feste  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  ein eindeutig bestimmtes Maximum an  $M_{n_1, n_2, \lambda_2}^F(\lambda_1) \in X$ . Ordnen wir jedem  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  diese Zahl zu, so entsteht eine Funktion  $\phi: \Lambda_1 \rightarrow X$ ,  $\phi(\lambda_1) = M_{n_1, n_2, \lambda_2}^F(\lambda_1)$ , die nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen (vgl. [Wal07, S. 300]) differenzierbar nach  $\lambda_1$  ist.

Die Anwendung von Satz 5.1.1 liefert nun die Behauptung.  $\square$

Eine analoge Aussage schließen wir für die Monotonie des Modus in Abhängigkeit von  $\lambda_2$ .

**Satz 5.1.10.** *Es seien  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq n_1$ . Dann ist die Funktion*

$$\phi: (0, n_2) \rightarrow (0, \infty), \quad \phi(\lambda_2) = M_{n_1, n_2, \lambda_1}^F(\lambda_2)$$

*wohldefiniert und streng monoton fallend im Intervall  $(0, n_2)$ .*

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit ergibt sich wegen  $0 < \lambda_2 < n_2$  aus Satz 4.2.6.

Wir setzen  $\Lambda_2 := (0, n_2)$ ,  $X := (0, \infty)$  und betrachten für  $0 \leq \lambda_1 \leq n_1$  den Kern

$$K(\lambda_2, x) := g_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \quad \text{für } (\lambda_2, x) \in \Lambda_2 \times X.$$

Nach Korollar 5.1.6 ist  $K(\lambda_2, x)$   $ERR_2$  bzgl.  $(\lambda_2, x) \in \Lambda_2 \times X$ . Ferner besitzt  $K(\lambda_2, x)$  für jedes feste  $\lambda_2 \in \Lambda_2$  ein eindeutig bestimmtes Maximum an  $M_{n_1, n_2, \lambda_1}^F(\lambda_2) \in X$ . Ordnen wir jedem  $\lambda_2 \in \Lambda_2$  diese Zahl zu, so entsteht eine Funktion  $\phi: \Lambda_2 \rightarrow X$ ,  $\phi(\lambda_2) = M_{n_1, n_2, \lambda_1}^F(\lambda_2)$ , die nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen differenzierbar nach  $\lambda_2$  ist. Die Anwendung von Satz 5.1.1 liefert die Behauptung.  $\square$

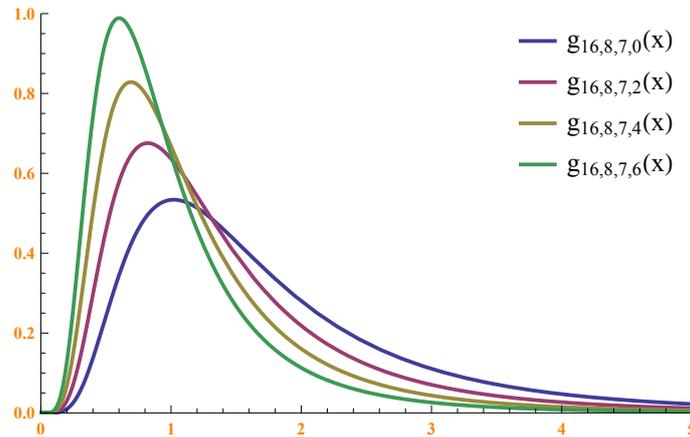


Abb. 5.2: Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen  $F$ -Modus bei Variation von  $\lambda_2$

Eine exemplarische Veranschaulichung von Satz 5.1.9 bzw. Satz 5.1.10 zeigt Abbildung 5.1 bzw. Abbildung 5.2.

### 5.1.2 Monotonieeigenschaft des doppelt nichtzentralen $t$ -Modus

In Satz 4.2.10 konnten wir eine hinreichende Bedingung für die Unimodalität der doppelt nichtzentralen  $t$ -Verteilung formulieren. Wir untersuchen im Folgenden den eindeutig bestimmten Modus als Funktion des Nichtzentralitätsparameters  $\mu$  und schreiben hierfür  $M_{n,\lambda}^t(\mu)$ .

**Satz 5.1.11.** *Es seien  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$ . Dann ist die Funktion*

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\mu) = M_{n,\lambda}^t(\mu)$$

*wohldefiniert und streng monoton wachsend.*

*Beweis.* Zunächst folgt die Wohldefiniertheit der Funktion  $\phi$  aus Satz 4.2.10. Wir betrachten für  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$  den Kern

$$K(\mu, x) := h_{\mu,n,\lambda}(x) \quad \text{für } (\mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Dieser ist nach Lemma 5.1.8  $ETP_2$  bzgl.  $(\mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Wegen  $0 \leq \lambda \leq n$  besitzt  $K(\mu, x)$  nach Satz 4.2.10 für jedes feste  $\mu \in \mathbb{R}$  eine eindeutig bestimmte Maximumstelle an  $M_{n,\lambda}^t(\mu) \in \mathbb{R}$ . Ordnen wir nun jedem  $\mu \in \mathbb{R}$  diese Stelle  $M_{n,\lambda}^t(\mu)$  zu, so erhalten wir die Funktion  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(\mu) = M_{n,\lambda}^t(\mu)$ , welche nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen differenzierbar nach  $\mu$  ist und somit nach Satz 5.1.1 streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$  ist.  $\square$

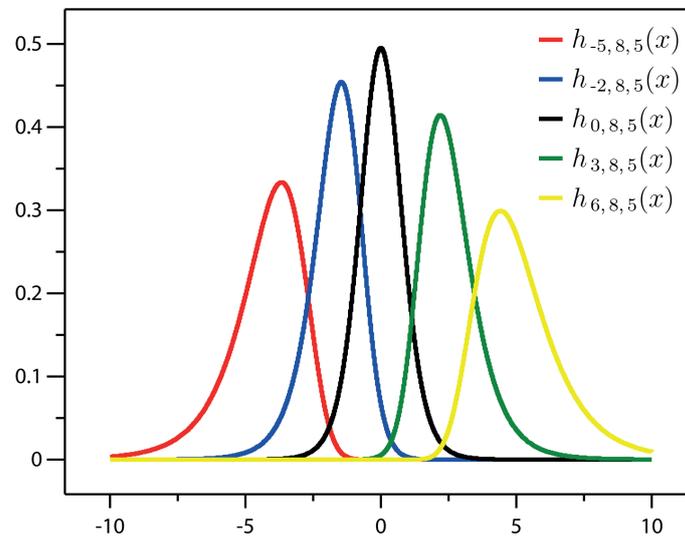


Abb. 5.3: Monotonieverhalten des doppelt nichtzentralen  $t$ -Modus bei Variation von  $\mu$

**Bemerkung 5.1.12.** Die Anwendung von Satz 5.1.1 und Satz 5.1.7 zum Nachweis einer entsprechenden Aussage für die Funktion

$$\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda) = M_{\mu,n}^t(\lambda)$$

gelingt aufgrund der Lagebeziehung des Modus, die wir Satz 4.2.10 entnehmen, leider nicht. Im Fall  $\mu = 0$  ist jedoch klar, dass die Funktion  $\phi$  konstant sein muss. Für  $\mu < 0$  legen exemplarische numerische Berechnungen die Vermutung nahe, dass  $\phi$  streng monoton wachsend und im Fall  $\mu > 0$  streng monoton fallend ist.

## 5.2 Monotonieeigenschaft des Modusfunktionswertes

**Satz 5.2.1.** Für  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$  besitzt die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\mu) = h_{\mu,n,\lambda}\left(M_{n,\lambda}^t(\mu)\right)$$

ein Maximum an  $\mu = 0$  und ist auf  $(-\infty, 0]$  streng monoton wachsend und auf  $[0, \infty)$  streng monoton fallend.

*Beweis.* Für  $n > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq n$  setzen wir

$$M(\mu) := M_{n,\lambda}^t(\mu) \quad \text{und} \quad h(x, \mu) := h_{\mu,n,\lambda}(x).$$

Dann folgt mit der Kettenregel und Satz 4.2.10

$$\varphi'(\mu) = h'_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right) \frac{d}{d\mu} M(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} h\left(M(\mu), \mu\right) = \frac{\partial}{\partial \mu} h_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right).$$

Unter erneuter Beachtung von Satz 4.2.10 rechnet man  $\varphi'(0) = 0$  direkt nach. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} h_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right) &= \frac{\partial}{\partial \mu} h_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right) + \frac{M(\mu)}{\mu} h'_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(M(\mu)\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right)^2} p_{n,\lambda}(t) \sqrt{t} \left(M(\mu)\sqrt{\frac{t}{n}} - \mu\right) \left(\frac{M(\mu)}{\mu}\sqrt{\frac{t}{n}} - 1\right) dt, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$\text{sign} \frac{\partial}{\partial \mu} h_{\mu,n,\lambda}\left(M(\mu)\right) = -\text{sign} \mu$$

und somit die Behauptung folgt.  $\square$

## 5.3 Weitere Fragestellungen und ungelöste Probleme

Aufgrund der Tatsache, dass der Modus der doppelt nichtzentralen Verteilungen nur implizit gegeben ist, interessiert man sich für möglichst genaue Lokalisationsabschätzungen. Satz 5.1.9, Satz 5.1.10 und Satz 5.1.11 liefern jeweils einseitige Abschätzungen der Modusschranken. Die Bestimmung der jeweils fehlenden Schranken setzt vermutlich ein gutes Verständnis des Ableitungsverhaltens der doppelt nichtzentralen Dichten voraus (vgl. [AG00a] für den einfach nichtzentralen Fall). Für die unskalierte doppelt nichtzentrale  $F$ -Dichte existiert eine rekursive Ableitungsformel, die wir im Folgenden herleiten.

**Satz 5.3.1.** Für  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  und  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \frac{n_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right) \\ &+ \frac{\lambda_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+4, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+4, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \left( \frac{n_1-2}{2x} - \frac{n_1+n_2}{2(x+1)} \right) \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \frac{\lambda_2}{2(x+1)} \tilde{g}_{n_1, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \\ &+ \frac{\lambda_1}{2x(x+1)} \tilde{g}_{n_1+2, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x). \end{aligned}$$

*Beweis.* Es seien  $n_1 > 2$ ,  $n_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  und  $x > 0$ . Mit Bemerkung 2.2.4 zeigt man zunächst

$$\tilde{g}'_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}(x) = \frac{n_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2, \lambda_1, 0}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2, \lambda_1, 0}(x) \right).$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und Definition 2.1.2 folgt dann

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \int_0^\infty p'_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2, \lambda_2}(t) t^2 dt = \int_0^\infty p'_{n_1, \lambda_1}(xt) \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^j p_{n_2+2j, 0}(t) t^2 dt \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^j \int_0^\infty p'_{n_1, \lambda_1}(xt) p_{n_2+2j, 0}(t) t^2 dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^j \tilde{g}'_{n_1, n_2+2j, \lambda_1, 0}(x) \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^j \frac{n_2+2j}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2j+2, \lambda_1, 0}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2j+2, \lambda_1, 0}(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^j \frac{n_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2j+2, \lambda_1, 0}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2j+2, \lambda_1, 0}(x) \right) \\ &+ \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_2}{2}}}{j!} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right)^{j+1} \frac{n_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2j+4, \lambda_1, 0}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2j+4, \lambda_1, 0}(x) \right) \\ &= \frac{n_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right) + \frac{\lambda_2}{2} \left( \tilde{g}_{n_1-2, n_2+4, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2+4, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\tilde{g}'_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}(x) = \frac{1}{2x} \left( \left( n_1 - 2 - \frac{x(n_1 + n_2)}{1+x} \right) \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, 0}(x) + \frac{\lambda_1}{1+x} \tilde{g}_{n_1+2, n_2, \lambda_1, 0}(x) \right)$$

(vgl. [AG00a, S. 294]) folgt die zweite Identität analog.  $\square$

Von deutlich einfacherer Gestalt ist die Ableitung nach den Nichtzentralitätsparametern.

**Lemma 5.3.2.** Für  $n_1, n_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  und  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_{n_1+2, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right), \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_{n_1, n_2+2, \lambda_1, \lambda_2}(x) - \tilde{g}_{n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2}(x) \right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Anwendung von Satz 2.1.9 ergibt sich sofort die Behauptung.  $\square$

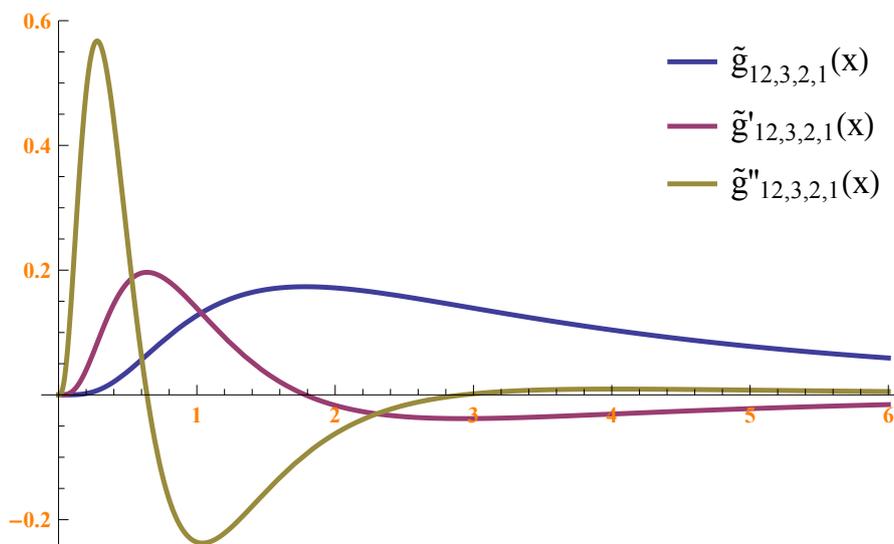


Abb. 5.4: Ableitungen der unskalierten doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte

Allgemeingültige Resultate über Modusschranken unimodaler Verteilungen setzen den Modus mit der Standardabweichung, dem Erwartungswert bzw. dem Median der Verteilung in Beziehung (vgl. [BD97]). Für die doppelt nichtzentralen Verteilungen würden sich diese Ergebnisse aufgrund der Komplexität der auftretenden Größen in voluminösen Formeln für die Modusschranken widerspiegeln (vgl. [JKB95, S. 500], [JKB95, S. 534] für den Erwartungswert der doppelt nichtzentralen  $F$ - bzw.  $t$ -Verteilung). Im einfach nichtzentralen Fall gelingt die Bestimmung guter und einfacher Modusschranken durch

das Ausnutzen zweier Ableitungsformeln und das Monotonieverhalten des Modusfunktionwertes. Entsprechende Resultate stehen für den doppelt nichtzentralen Fall nicht zur Verfügung, weshalb die Bestimmung guter Modusschranken für die doppelt nichtzentralen Verteilungen ein ungelöstes Problem darstellt.

Ähnlich verhält es sich mit der vollständigen asymptotischen Entwicklung des doppelt nichtzentralen  $F$ -Modus, was vor allem der Gestalt der Rekursionsformel aus Satz 5.3.1 und dem Doppelreihencharakter der  $F$ -Dichte geschuldet ist. Entsprechendes gilt für den doppelt nichtzentralen  $t$ -Modus.

Eingangs erwähnten wir bereits, wie die Implementierung der nichtzentralen Verteilungen innerhalb von Computeralgebrasystemen hilft, Vermutungen über die Gestalt der Dichten und das Verhalten zugehöriger Modi aufzustellen. Wir halten abschließend fest, dass speziell die Differentiation der doppelt nichtzentralen  $F$ -Dichte in *Mathematica 9* standardmäßig nicht möglich ist. Satz 5.3.1 beseitigt diesen Missstand und hilft somit, das Verhalten höherer Ableitungen besser zu verstehen (vgl. Abbildung 5.4).

# Literaturverzeichnis

- [AAR99] ANDREWS, George E. ; ASKEY, Richard ; ROY, Ranjan: *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999
- [AG00a] AUBEL, Andrea v. ; GAWRONSKI, Wolfgang: Asymptotics and bounds for the modes of noncentral distributions. In: *Statistics and Decisions - International Journal for Stochastic Methods and Models* 18 (2000), Nr. 3, S. 291–310
- [AG00b] AUBEL, Andrea v. ; GAWRONSKI, Wolfgang: On the unimodality and the bell-shape of noncentral distributions. In: *Methods and Applications of Analysis* 7 (2000), Nr. 1, S. 233–250
- [AG03] AUBEL, Andrea v. ; GAWRONSKI, Wolfgang: Analytic properties of noncentral distributions. In: *Applied Mathematics and Computation* 141 (2003), Nr. 1, S. 3–12
- [Bar10] BARICZ, Árpád: *Generalized Bessel Functions of the First Kind*. Springer, 2010
- [BD97] BASU, Sanjib ; DASGUPTA, Anirban: The Mean, Median, and Mode of Unimodal Distributions: A Characterization. In: *Theory of Probability & Its Applications* 41 (1997), Nr. 2, S. 210–223
- [BP02] BUTLER, Ronald W. ; PAOLELLA, Marc S.: Calculating the density and distribution function for the singly and doubly noncentral F. In: *Statistics and Computing* 12 (2002), Nr. 1, S. 9–16
- [BP07] BRODA, Simon ; PAOLELLA, Marc S.: Saddlepoint approximations for the doubly noncentral t distribution. In: *Computational statistics & data analysis* 51 (2007), Nr. 6, S. 2907–2918
- [BTC97] BERTIN, Emile M. J. ; THEODORESCU, Radu ; CUCULESCU, Ioan: *Unimodality of Probability Measures*. Springer, 1997
- [CS11] CZADO, Claudia ; SCHMIDT, Thorsten: *Mathematische Statistik*. Springer, 2011
- [DG98] DEBENEDICTIS, Linda F. ; GILES, David E.: Diagnostic Testing in Econometrics: Variable Addition, RESET, and Fourier Approximations. In: *Statistics: Textbooks and Monographs* 155 (1998), S. 383–418
- [Els11] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2011

- [Hei11] HEIDRICH, Peter: *Vorzeichenreguläre Funktionen und Integraltransformationen*. Unveröffentlichte Staatsexamensarbeit, Universität Trier, 2011
- [HR85] HELSTROM, Carl W. ; RITCEY, James A.: Evaluation of the Noncentral F-Distribution by Numerical Contour Integration. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 6 (1985), Nr. 3, S. 505–514
- [JKB95] JOHNSON, Norman L. ; KOTZ, Samuel ; BALAKRISHNAN, Narayanaswamy: *Continuous Univariate Distributions, Vol. 2*. John Wiley & Sons, 1995
- [Joh02] JOHNSON, Warren P.: The Curious History of Faà di Bruno’s Formula. In: *The American Mathematical Monthly* 109 (2002), Nr. 3, S. 217–234
- [Kar63] KARLIN, Samuel: Total positivity and convexity preserving transformations. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* Bd. 7, 1963, S. 329–347
- [Kar68] KARLIN, Samuel: *Total Positivity*. Stanford University Press, 1968
- [KK91] KOCHERLAKOTA, Kathleen ; KOCHERLAKOTA, Subrahmaniam: On the doubly noncentral t distribution. In: *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 20 (1991), Nr. 1, S. 23–31
- [KO98] KURUMAI, Hiroko ; OHTANI, Kazuhiro: The exact distribution and density functions of a pre-test estimator of the error variance in a linear regression model with proxy variables. In: *Statistical Papers* 39 (1998), Nr. 2, S. 163–177
- [MC76] MUDHOLKAR, Govind S. ; CHAUBEY, Yogendra P.: A simple approximation for the doubly noncentral t-distribution. In: *Communication Statistics - Simulation and Computation* 5 (1976), Nr. 2-3, S. 85–92
- [MOA10] MARSHALL, Albert W. ; OLKIN, Ingram ; ARNOLD, Barry C.: *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Springer, 2010
- [MP88] MIN’KO, A. A. ; PETUNIN, Yu I.: Unimodality of a noncentral chi-square distribution. In: *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 36 (1988), S. 91–96
- [Olv10] OLVER, Frank W.: *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, 2010
- [Pes98] PESTMAN, Wiebe R.: *Mathematical Statistics*. Walter de Gruyter, 1998
- [Pri64] PRICE, Robert: Some non-central F-distributions expressed in closed form. In: *Biometrika* (1964), S. 107–122
- [PS70] PÓLYA, George ; SZEGŐ, Gábor: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 1: Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie*. Springer, 1970
- [PS71] PÓLYA, George ; SZEGŐ, Gábor: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2: Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie*. Springer, 1971

- [Ram69] RAMSEY, James B.: Tests for Specification Errors in Classical Linear Least-Squares Regression Analysis. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* (1969), S. 350–371
- [Ras95] RASCH, Dieter: *Einführung in die mathematische Statistik*. Barth, 1995
- [Roy88] ROYDEN, Halsey L.: *Real Analysis*. Macmillan, 1988
- [Sch59] SCHEFFÉ, Henry: *The Analysis of Variance*. John Wiley & Sons, 1959
- [SW93] STORCH, Uwe ; WIEBE, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik: Analysis mehrerer Veränderlicher - Integrationstheorie*. Bd. 3. Spektrum Akademischer Verlag, 1993
- [Sze85] SZEGŐ, Gabor: *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1985
- [Tem96] TEMME, Nico M.: *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, 1996
- [Ün06] ÜNAL, Deniz: The doubly non-central F distribution in a regression model with proxy variables. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 30 (2006), Nr. 3, S. 391–396
- [Wal07] WALTER, Rolf: *Einführung in die Analysis 2*. Walter de Gruyter, 2007
- [Wat66] WATSON, George N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1966
- [Yu11] YU, Yaming: *The Shape of the Noncentral Chi-square Density*. 26.06.2011. – <http://arxiv.org/abs/1106.5241v1>