

Dissertation

**Optimierung der Materialausrichtung von
orthotropen Materialien in
Schalenkonstruktionen**

zur Erlangung des Grades Dr. rer. nat. an der Universität Trier

vorgelegt durch Dipl.-Math. Heinz Zorn

eingereicht im Januar 2017

Gutachter: Prof. Dr. Volker Schulz (Universität Trier),
Prof. Dr. Michael Stingl (Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

Für meine Kinder Ilana und Emanuel.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir das Optimierungsproblem der optimalen Materialausrichtung orthotroper Materialien in der Hülle von dreidimensionalen Schalenkonstruktionen. Ziel der Optimierung ist dabei die Minimierung der Gesamtnachgiebigkeit der Konstruktion, was der Suche nach einem möglichst steifen Design entspricht.

Sowohl die mathematischen als auch die mechanischen Grundlagen werden in kompakter Form zusammengetragen und basierend darauf werden sowohl gradientenbasierte als auch auf mechanischen Prinzipien beruhende, neue Erweiterungen punktweise formulierter Optimierungsverfahren entwickelt und implementiert.

Die vorgestellten Verfahren werden anhand des Beispiels des Modells einer Flugzeugtragfläche mit praxisrelevanter Problemgröße getestet und verglichen. Schließlich werden die untersuchten Methoden in ihrer Koppelung mit einem Verfahren zur Topologieoptimierung, basierend auf dem topologischen Gradienten untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
1.1	Motivation	11
1.2	Ziele der Arbeit	13
1.3	Kapitelübersicht	13
2	Grundlagen	15
2.1	Funktionalanalytische Grundlagen	15
2.2	Optimierung in Banachräumen	25
2.3	Lineare Elastizität	27
2.3.1	Referenzkonfiguration und Deformation	27
2.3.2	Beschreibung der wirkenden Kräfte	31
2.3.3	Zusammenhang zwischen Verzerrung und Spannung, Elastizität und Hyperelastizität	34
2.3.4	Symmetrien des Elastizitätstensors	36
2.3.5	Voigt-Notation für Spannungen, Verzerrungen und Materialeigen- schaften	36
2.3.6	Elliptizität und Umkehrung des Elastizitätstensors	38
2.3.7	Das Verschiebungs-Traktions-Problem der linearen Elastizität . .	41
2.4	Transformation von Koordinatensystemen	45
2.4.1	Koordinatentransformation für vektorielle Größen	46
2.4.2	Koordinatentransformation für tensorielle Größen zweiter Stufe .	48
2.4.3	Koordinatentransformation für tensorielle Größen vierter Stufe .	50
2.4.4	Transformation der Elastizitäts- und der Nachgiebigkeitsmatrix .	51
2.4.5	Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrix für orthotrope Materialien	52
2.4.6	Transformationen erhalten Materialeigenschaften	55
3	Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit	57
3.1	Das Optimierungsproblem zur Minimierung der Nachgiebigkeit	58
3.2	Gradientenbasierte Optimierung - Adjungierte Methode	60
3.2.1	Selbstadjungiertheit der Nachgiebigkeit	61
3.2.2	Bestimmung des reduzierten Gradienten	65

3.2.3	Anwendung	66
3.3	Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen	68
3.3.1	Optimale Materialausrichtung für gegebene Spannungen	71
3.3.2	Mehrlastfälle	76
3.3.3	Glättung	78
3.3.4	Optimale Materialausrichtung für gegebene Verzerrungen	81
4	Numerische Ergebnisse	83
4.1	Definition der Testfälle	83
4.2	Wahl der Ansatzräume	86
4.3	Gradientenbasierte Optimierung - Adjungierte Methode	88
4.3.1	Ein einfaches Gradientenverfahren	88
4.3.2	Quasi-Newton-Verfahren	91
4.4	Spannungsmethode	93
4.5	Glättung der Materialausrichtungen	96
4.5.1	Glättung bei gradientenbasierten Verfahren	98
4.5.2	Glättung bei der Spannungsmethode	99
4.6	Mehrlastfälle	107
4.7	Vergleich der Spannungs- und Verzerrungsmethode	110
4.8	Kopplung mit Topologie-Optimierung	112
4.8.1	Kurzeinführung Topologieoptimierung mittels Formsensitivitäten	113
4.8.2	Das gekoppelte Optimierungsproblem	115
4.8.3	Numerische Umsetzung	116
4.8.4	Level-Set und Volumen-Penalisierung	116
4.8.5	Optimalitätskriterium für Topologieoptimierung mittels Level-Set- Funktion und Topologieableitung	117
4.8.6	Konkrete Implementierung	117
4.8.7	Numerische Ergebnisse	118
5	Fazit	121
5.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	121
5.2	Ausblick	122
	Literaturverzeichnis	125
A	Rechenregeln	129
A.1	Symmetrien des Elastizitätstensors	129
A.1.1	Rechte Subsymmetrie	129
A.1.2	Linke Subsymmetrie	129

A.1.3	Produkte symmetrischer Tensoren	130
A.2	Tensorrechenregeln	131
A.2.1	Symmetrien von Skalarprodukten von Tensoren	131
A.3	Transformation von Koordinatensystemen	132
A.3.1	Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Zweidimensionalen	132
A.3.2	Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Zweidimensionalen	133
A.3.3	Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen	133
A.3.4	Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen durch Vorgabe der rotierten Basis	137
A.3.5	Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen	137
A.3.6	Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen durch Vorgabe der rotierten Basis	139
A.4	Sonstige Rechenregeln	141
A.4.1	Greensche Identität für Vektorfelder	141
A.4.2	Ableitungsregel	142
A.5	Programmcode	145
A.5.1	MATLAB-Quellcode zur Verifikation der Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms bei der Spannungsmethode	145
A.5.2	MATLAB-Quellcode zur Verifikation der Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms bei der Verzerrungsmethode	146

1 Einleitung

1.1 Motivation

Das Streben nach Optimalität ist eine zentrale Triebkraft in vielen technischen Entwicklungsprozessen. Während das Konzept der Optimalität in der reinen Welt der Mathematik seit Jahrhunderten wohluntersucht ist und jeder Mathematikstudent nach wenigen Semestern notwendige und hinreichende Kriterien für Optimalität angeben und einfache Verfahren zur Optimierung einer oder mehrerer Veränderlicher implementieren kann, bietet die Brücke zwischen Mathematik und Realität weiterhin zahllose Problemstellungen, die ihrer Bearbeitung entgegen fiebern.

In dieser Arbeit betrachten wir die Optimierung des Modells einer Flugzeugtragfläche hinsichtlich seines Verformungsverhaltens unter Krafteinwirkung. Sowohl die rasante Entwicklung der computerbasierten Simulation und Optimierung, als auch die nicht weniger imposanten Fortschritte in der Fertigungstechnik eröffnen hierbei Möglichkeiten, die man vor wenigen Jahrzehnten wohl kaum hätte erahnen können. Während bis in die zweite Hälfte des vergangenen Jahrhunderts hinein jegliche Vorhersage des Verhaltens von Werkstücken weitestgehend auf händische Rechnungen für stark vereinfachte, ein- und zweidimensionale Probleme und deren Kombination reduziert war, liefert heute die Methode der finiten Elemente ein mächtiges Werkzeug um das Verhalten komplexer Geometrien in nahezu beliebiger Genauigkeit vorausszusagen. Ergänzt wird diese Entwicklung durch rasante Fortschritte in der Entwicklung und Fertigung neuartiger Werkstoffe mit maßgeschneiderten physikalischen Eigenschaften.

Die Verfahren zur Gestaltung optimaler Werkstücke können in drei Kategorien eingeteilt werden, die jedoch je nach Betrachtungsweise teilweise schwer voneinander zu trennen sind. Als erste Kategorie mit dem größten Maßstab kann die Optimierung der Form eines Körpers betrachtet werden, welche durch die Menge der Randpunkte des Körpers beschrieben wird. Auf einer zweiten, lokaleren Stufe kann die Topologie eines Werkstückes untersucht werden. Hierbei wird, häufig ausgehend von einem massiven Körper, untersucht, an welchen Punkten im Inneren des Körpers Material weggenommen oder hinzugefügt werden sollte, um eine physikalische Eigenschaft des

1 Einleitung

Gesamtkörpers zu optimieren. Spätestens ab dem Punkt, an dem im Inneren ein Loch oder ein Materialeinschluss vorhanden ist, dessen Form optimiert wird, verschwimmen die Grenzen zwischen Topologie- und Formoptimierung. Schließlich können im Rahmen von Materialoptimierung die Materialeigenschaften eines Werkstückes punktweise optimiert werden. Hierbei können beispielsweise unterschiedliche Werkstoffe oder Kombinationen verschiedener Materialien zum Einsatz kommen, bei der Verwendung von anisotropen Materialien kann eine optimale Ausrichtung der Anisotropieachsen gewählt werden oder auch bei isotropen Materialien kann durch Optimierung der Materialverteilung auf mikroskopischer Ebene ebenfalls ein makroskopisch anisotropes Verhalten hervorgerufen werden, das wiederum Raum zur Optimierung bietet. Auch die Grenzen zwischen dieser Art von Strukturoptimierung und der zuvor beschriebenen Form- und Topologieoptimierung verschwimmen beispielsweise dann, wenn bei der Kombination verschiedener Materialien oder bei der Konstruktion von Werkstoffen durch gezielte Einschlüsse auf kleinstem Maßstab Form und Topologie der Grenzflächen optimiert werden sollen.

Der zentrale Aspekt der Untersuchungen dieser Arbeit besteht in der Optimierung der Materialausrichtung von orthotropen Materialien in Form von Faserverbundwerkstoffen. Diese Faserverbundstoffe bestehen in ihrer einfachsten Form aus Fasern, beispielsweise Glas-, Kohlenstoff- oder Metallfasern, die in ein Trägermaterial, zumeist in Form einer Matrix aus Polymerkunststoffen, eingebettet sind. Die Festigkeit des Verbundstoffes wird maßgeblich durch die Fasern gewährleistet, wodurch sich ein sehr steifes und sehr festes Materialverhalten in Richtung der Fasern ergibt. Die Matrix hält die Fasern in Position und schützt sie vor physischen und chemischen Außeneinwirkungen. Von besonderem Interesse sind auch die Grenzschichten zwischen Matrix und Faser, welche zum einen die Spannungsübertragung zwischen den unterschiedlichen Materialien gewährleisten müssen und zum anderen bei fehlender Haftung eine potentielle Schwachstelle bieten, die zum Bruch des Materials führen kann. Da die verwendeten Kunststoffe der Matrix in der Regel eine geringere Festigkeit und Steifigkeit als die Fasern in Längsrichtung haben, sind die mechanischen Eigenschaften des Faserverbundstoffes in Querrichtung zur Faser deutlich schlechter als in Faserrichtung. Bei der aktuellen Verwendung von Faserverbundstoffen werden die schwachen Eigenschaften quer zur Faserrichtung zumeist durch eine Laminatbildung ausgeglichen, bei der in Schichten Fasern in Winkeln von 0° , 90° und $\pm 45^\circ$ übereinandergelegt werden. Das resultierende Material unterscheidet sich in seinem Elastizitätsverhalten in den unterschiedlichen Richtungen nicht mehr so stark wie es bei unidirektionalen Faserverbundstoffen der Fall ist. Die optimale Reihenfolge der Schichten, deren Anzahl und Dicken sind Gegenstand der aktuellen Forschung.

Die Mittelung der guten und schlechten Eigenschaften in den unterschiedlichen Richtungen bildet sowohl die große Stärke als auch einen großen Nachteil der Lamine gegenüber unidirektionalen Faserverbundstoffen, da die Verlegung von Fasern in „unnötigen“ Richtungen dem effizienten Einsatz von Material entgegensteht. Wenn es gelingt festzustellen, in welcher Richtung ein Material an jedem Punkt belastet wird, so kann über eine passgenaue Verlegung von Fasern in dieser Richtung eventuell ein Material kreiert werden, dass auf unnötige Verstärkungen in den übrigen Richtungen verzichten kann. Dadurch wäre es möglich das volle Potential der Faserverbundstoffe auszuschöpfen und so noch leichtere und leistungsstärkere Materialien zu produzieren. Wir wollen uns in dieser Arbeit von dem oben beschriebenen Grundaufbau der Faserverbundstoffe als Lamine lösen und erlauben stattdessen ein punktwise wechselndes Materialverhalten. Moderne Tape-Laying-Verfahren ermöglichen eine mit Einschränkungen punktgenaue Vorgabe der Faserausrichtung bei der Konstruktion eines Werkstückes. Sollten sich im Rahmen der hier geführten Untersuchungen weitestgehend glatte Felder von Materialausrichtungen einstellen, so würden diese wertvolle Erkenntnisse für ein optimale Materialdesign nachsichziehen.

1.2 Ziele der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin im Zwischenbereich zwischen Grundlagenforschung und praxisorientierter Anwendung das Potential und die Umsetzbarkeit von punktwise Optimierung der Materialausrichtung in Schalenkonstruktionen aus orthotropen Materialien im Dreidimensionalen zu untersuchen. In diesem Zusammenhang sollen numerische Optimierungsverfahren entwickelt und am Anwendungsfall des Modells einer Flugzeugtragfläche verifiziert werden. Insbesondere die Umsetzung für Geometrien mit praxisrelevanter Problemgröße ist von speziellem Interesse.

Schließlich sollen die entwickelten Verfahren im Zusammenspiel mit bereits existierenden Verfahren zur Topologieoptimierung im Innenraum der Tragfläche untersucht werden. Dabei sollen gekoppelte Verfahren implementiert und die gegenseitigen Einflüsse von Topologie- und Materialoptimierung untersucht werden.

1.3 Kapitelübersicht

Nach einer kurzen motivierenden Einführung der Thematik in Kapitel 1 befassen wir uns in Kapitel 2 mit den mathematischen Grundlagen die zur Behandlung des vorlie-

1 Einleitung

genden Themas benötigt werden. Hierbei fassen wir zunächst in aller Kürze die erforderlichen bekannten Aussagen aus den Bereichen der Analysis und der Optimierung in unendlich dimensionalen Räumen zusammen. Anschließend erörtern wir ebenfalls in kompakter Form die Theorie der linearen Elastizität, die das mechanische Verhalten der zu optimierenden Tragfläche beschreiben soll. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit der Herleitung der zur Simulation und Optimierung der Materialausrichtung erforderlichen Transformationsregeln für die physikalischen Größen des elastischen Verhaltens eines Körpers.

Kapitel 3 bildet das Kernstück der theoretischen Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit. Das zu lösende Optimierungsproblem wird definiert und unterschiedliche Lösungsverfahren werden hergeleitet. Hierbei untersuchen wir zunächst die klassische auf Sensitivitäten beruhende adjungierte Methode, wie sie für zahlreiche Problemformulierungen bei partiellen Differentialgleichungen Anwendung finden kann. Anschließend geben wir ein neues Verfahren zur Optimierung von Materialausrichtungen für eine minimale Nachgiebigkeit, basierend auf punktweise formulierten Optimalitätskriterien an. Dieses Verfahren erweitern wir schließlich um Konzepte der Glättung der resultierenden Optimallösungen und auf die Behandlung von Mehrlastfällen.

Die Umsetzbarkeit und die numerischen Resultate der vorgestellten Verfahren untersuchen wir in Kapitel 4. Beide Verfahren werden implementiert und nach der Definition von Testfällen an diesen getestet. Wir vergleichen die Ergebnisse der beiden Verfahren untereinander und untersuchen abschließend nach einer sehr kurzen Einführung in die Thematik der Topologieoptimierung die Kopplung von Optimierung der Materialausrichtung und Topologie.

Eine Zusammenfassung der erzielten Resultate formulieren wir in Kapitel 5. Die teilweise umfangreichen, wenn auch weitestgehend elementaren Rechnungen lagern wir, soweit es dem Verständnis nicht hinderlich ist, zur Förderung des Leseflusses in den Anhang aus.

2 Grundlagen

2.1 Funktionalanalytische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die für diese Arbeit erforderlichen Grundlagen aus dem Bereich der Funktionalanalysis zusammengefasst werden. Die benötigten Funktionenräume werden definiert und die für den behandelten Sachverhalt relevanten Aussagen werden zusammengetragen. Für die jeweiligen Beweise wird weitestgehend auf die Literatur verwiesen. Grundlegende mathematische Begrifflichkeiten werden vorausgesetzt. Für einen umfassenderen Einblick in das Gebiet der Funktionalanalysis wird ebenfalls auf die Literatur, etwa [47] oder [43] verwiesen.

Für sämtliche Betrachtungen dieses Kapitels sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ als ein beschränktes Gebiet vorausgesetzt, das heißt Ω ist offen, nichtleer und zusammenhängend. Um Begriffe wie Differenzierbarkeit auf $\bar{\Omega}$ mathematisch sauber betrachten zu können, sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Obermenge von Ω , für die $\bar{\Omega} \subset D$ gilt, die stets als Definitionsmenge für Funktionen herhält, deren Verhalten für hier geführte Betrachtungen nur auf $\bar{\Omega}$ von Interesse ist.

- Definition 2.1:**
1. Wir bezeichnen einen reellen Vektorraum V als Banachraum, wenn er mit einer Norm $\|\cdot\|_V$ ausgestattet ist und bezüglich dieser vollständig ist.
 2. Ein Hilbertraum ist ein reeller Vektorraum V , der mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ausgestattet ist und bezüglich der durch dieses Skalarprodukt induzierten Norm $\|v\|_V := \langle v, v \rangle_V^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist.

- Definition 2.2:**
1. Für normierte Vektorräume U und V bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(U, V)$ die Menge aller linearen Abbildungen $A : U \rightarrow V$, für die

$$\sup_{\|u\|_U=1} \|A(u)\|_V < \infty$$

2 Grundlagen

gilt. Die Elemente aus $\mathcal{L}(U, V)$ nennen wir stetige, lineare Operatoren und verwenden auch die Schreibweise

$$\langle A, u \rangle := A(u).$$

2. Für einen normierten Vektorraum V bezeichnen wir $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ als Dualraum zu V .

Satz 2.3: 1. Für normierte Räume U und V ist durch die sogenannte Operatornorm

$$\|A\|_{U,V} := \sup_{\|u\|_U=1} \|A(u)\|_V$$

eine Norm auf $\mathcal{L}(U, V)$ definiert.

2. Ist V Banachraum, so ist $\mathcal{L}(U, V)$ ausgestattet mit der Operatornorm ebenfalls ein Banachraum.

Beweis. [32] Satz 1.4.8

□

Definition 2.4: Für Banachräume U und V und einen linearen und stetigen Operator $A \in \mathcal{L}(U, V)$ ist durch

$$A^{\text{ad}} : V^* \rightarrow U^*, v^* \mapsto \langle v^*, A(\cdot) \rangle$$

ein stetiger, linearer Operator definiert, den wir als adjungierten Operator zu A bezeichnen. Damit gilt

$$\langle A^{\text{ad}}(v^*), u \rangle = \langle v^*, A(u) \rangle \quad \forall u \in U, v^* \in V^*.$$

Bemerkung 2.5: In der Literatur wird der adjungierte Operator auch häufig als dualer Operator bezeichnet. Gelegentlich findet auch eine Unterscheidung zwischen adjungiertem Operator für Hilberträume und dualem Operator für die hier betrachtete Verallgemeinerung auf Banachräumen statt.

Definition 2.6: 1. Für zwei normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und eine offene Teilmenge $U \subset X$ heißt ein Operator $A : U \rightarrow Y$ Frechet-differenzierbar an einer Stelle $u \in U$, falls ein stetiger, linearer Operator

$$A'(u) : X \rightarrow Y, h \mapsto A'(u)[h]$$

existiert, mit dem

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|A(u+h) - A(u) - A'(u)[h]\|_Y = 0$$

gilt. Der Operator $A'(u)$ wird als Frechet-Ableitung von A an der Stelle u bezeichnet.

2. Für multivariate Operatoren $A(x, y, \dots)$ wird die partielle Frechet-Ableitung bezüglich eines Arguments mit $\frac{\partial}{\partial x} A(x, y, \dots)[\cdot]$ bezeichnet.

Bemerkung 2.7: Aus der Definition der Frechet-Ableitung folgen sofort einige Eigenschaften. So entspricht die Frechet-Ableitung der Summe von Frechet-differenzierbaren Funktionen der Summe der Einzelableitungen. Entsprechendes gilt für skalare Vielfache von Frechet-differenzierbaren Funktionen. Weiter folgt unmittelbar aus der Definition, dass stetige, lineare Operatoren mit ihrer Ableitung übereinstimmen und, dass konstante Funktionen als Frechet-Ableitung die Nullfunktion besitzen. Da die Summation in der Definition der Frechet-Ableitung für Tensorfelder von Operatoren komponentenweise definiert ist, kann die Frechet-Ableitung eines solchen Tensorfeldes ebenfalls komponentenweise bestimmt werden.

Satz 2.8 (Kettenregel): Für drei normierte Räume U, V, W und für zwei Frechet-differenzierbare Operatoren $A : U \rightarrow V$ und $B : V \rightarrow W$ ist auch die Komposition $B \circ A : U \rightarrow W$ Frechet-differenzierbar und es gilt

$$(B \circ A)'(u) = B'(A(u)) \circ A'(u) \quad \forall u \in U.$$

Beweis. Ein elementarer Beweis der Satzaussage wird für den endlichdimensionalen Fall beispielsweise in [17], Kapitel I, Satz 3 geführt. Die dortigen Formulierungen lassen sich sofort auf den verallgemeinerten Fall der Frechet-Ableitung übertragen. \square

Bemerkung 2.9: Da lineare, stetige Operatoren mit ihrer Ableitung übereinstimmen folgt aus Satz 2.8 für einen Frechet-differenzierbaren Operator A , einen linearen, stetigen Operator B und deren Komposition

$$C : U \rightarrow W, u \mapsto B(A(u))$$

die Ableitungsregel $C'(u) = B \circ A'(u)$.

Aus der Kettenregel folgt folgende Rechenregel für das sogenannte totale Differenti-

2 Grundlagen

al.

Satz 2.10: 1. Für normierte Räume U , V und W und ein Frechet-differenzierbares $A : U \times V \rightarrow W$ existieren auch die partiellen Frechet-Ableitungen und es gilt

$$A'(u, v)[h_U, h_V] = \frac{\partial}{\partial U} A(u, v)[h_U] + \frac{\partial}{\partial V} A(u, v)[h_V] \quad \forall u, h_U \in U, v, h_V \in V.$$

2. Für normierte Räume U, V, W und X und Frechet-differenzierbare Operatoren $B : U \rightarrow V, C : U \rightarrow W$ und $A : V \times W \rightarrow X$ ist auch der Operator

$$D : U \rightarrow X, u \mapsto A(B(u), C(u))$$

Frechet-differenzierbar und es gilt

$$D'(u) = \frac{\partial}{\partial B(u)} A(B(u), C(u)) \circ B'(u) + \frac{\partial}{\partial C(u)} A(B(u), C(u)) \circ C'(u).$$

Beweis. 1. [26] Kapitel 1.4.1

2. Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.8 und Teil 1.

□

Handelt es sich bei den betrachteten Räumen spezieller um Banachalgebren, sind diese also insbesondere mit einem Produkt in sich selbst ausgestattet, so gilt folgende Ableitungsregel.

Satz 2.11 (Produktregel): Für Banachalgebren U, V sowie zwei Frechet-differenzierbare Abbildungen $A, B : U \rightarrow V$ und für die Abbildung

$$C : U \rightarrow V, u \mapsto A(u)B(u)$$

ist C ebenfalls Frechet-differenzierbar und es gilt die Produktregel

$$C'(u)[\cdot] = A'(u)[\cdot]B(u) + A(u)B'(u)[\cdot] \quad \forall u \in U.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in vollkommener Analogie zum rein reellen Fall wie er beispielsweise in [18] Kapitel 15, Satz 2, zu finden ist. □

Satz 2.12 (Rieszscher Darstellungssatz): Wir betrachten einen Hilbertraum H und dessen Dualraum H^* .

1. Für jedes stetige, lineare Funktional $l \in H^*$ existiert ein einziges Element $h \in H$, sodass

$$l(x) = \langle h, x \rangle_H \quad \forall x \in H$$

gilt. Dieses eindeutige Element wird als Riesz-Repräsentant des Funktionals bezeichnet.

2. Der Dualraum H^* ist ein Hilbertraum und isometrisch zu H mittels des nach 1. wohldefinierten Morphismus

$$H \rightarrow H^*, \quad u \mapsto \langle u, \cdot \rangle_H.$$

Das zugehörige Skalarprodukt auf H^* ergibt sich als

$$\langle u^*, v^* \rangle_{H^*} := \langle u, v \rangle_H$$

mit u und $v \in H$ als eindeutige Riesz-Repräsentanten von u^* und $v^* \in H^*$.

Beweis. [29] Kapitel 6, Theorem 4

□

Definition 2.13: Wir betrachten einen Hilbertraum U und einen normierten Raum V . Für eine Frechet-differenzierbare Abbildung $A : U \rightarrow V$ bezeichnen wir den nach Satz 2.12 eindeutigen Riesz-Repräsentanten zur Frechetableitung $A'(u)[\cdot]$ an einer Stelle $u \in U$ als Gradienten $\nabla A(u)$.

Bemerkung 2.14: 1. Für eine differenzierbare Abbildung $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht der Gradient $\nabla A(x)$ einem Skalar.

2. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht $\nabla A(x)$ dem Vektor aus den partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} A(x) \right)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d$.

3. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ entspricht $\nabla A(x)$ der Matrix deren Zeilen aus den Gradienten der Komponenten A_j ($j = 1, \dots, d$) besteht. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir den Gradienten in diesem Fall als Jacobimatrix

$$DA(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_i(x) \right)_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d.$$

Definition 2.15: 1. Der Raum aller reellwertigen, stetigen Funktionen auf Ω wird mit $C(\Omega)$ oder auch $C^0(\Omega)$ bezeichnet.

2 Grundlagen

2. Der Raum aller k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen für $k \in \mathbb{N}$ auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet.

3. Für $A \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq k$ bezeichnen wir mit

$$\partial^\alpha A(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} A(x)[\cdot]$$

die mehrfache partielle Ableitung nach Multiindex α .

4. Der Raum $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ bezeichnet die glatten Funktionen.

Bemerkung 2.16: Für alle definierten Funktionenräume gilt die Vereinbarung, dass durch zusätzliche hochgestellte Indizes Vektor- oder Tensorfelder der jeweiligen Räume dargestellt werden. So bezeichnet beispielsweise $C(\Omega)^d$ ein d -dimensionales Vektorfeld, dessen Komponenten aus stetigen Funktionen bestehen, und $C^\infty(\Omega)^{d \times d}$ einen Tensor zweiter Stufe aus unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen.

Definition 2.17: 1. Für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

Träger von f .

2. Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ wird die Menge aller Funktionen aus $C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger als $C_0^k(\Omega)$ bezeichnet.

Satz 2.18: Für jede Funktion $f \in C_0^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$ und $\partial^\alpha f \equiv 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

Beweis. Der Träger $\text{supp } f$ ist kompakte Teilmenge der offenen Menge Ω . Somit ist $\partial\Omega \cap \text{supp } f = \emptyset$ und somit folgt $f(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega$.

Nach Voraussetzung ist f unendlich oft differenzierbar, somit ist es auch jede Ableitung $\partial^\alpha f$. Der Träger jeder Ableitung ist Obermenge des Trägers der Ausgangsfunktion. Zusammen folgt, dass $\partial^\alpha f \in C_0^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und somit der zweite Teil der Behauptung. \square

Definition 2.19: Wir betrachten den Maßraum Ω versehen mit der Borelschen σ -Algebra und dem Lebesgue-Maß λ . Der Raum der p -fach integrierbaren Funktionen

auf Ω mit $1 \leq p < \infty$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar, } \int_{\Omega} |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty \right\}.$$

Für $p = \infty$ wird

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar, } \inf_{\lambda(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty \right\}$$

definiert. Durch die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-fast überall}$$

werden die Faktorräume $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$ definiert.

Bemerkung 2.20: 1. In dieser Arbeit beschränken wir uns bei der Wahl von Maßräumen generell auf Borelsche σ -Algebren mit dem zugehörigen Lebesgue-Maß. Da die Unterscheidung des Maßes bei der Integration dadurch entfällt, wird die verkürzte Schreibweise $\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x)$ verwendet.

2. In der Folge werden wir die Elemente aus $L^p(\Omega)$ als Funktionen auffassen. Genaugenommen betrachten wir dabei jeweils einen Repräsentanten aus der zugehörigen Äquivalenzklasse $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Satz 2.21: Versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ für $p < \infty$ ein vollständiger, normierter Raum. Entsprechendes gilt für $L^\infty(\Omega)$, ausgestattet mit

$$\inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|.$$

Beweis. [3] Satz 1.2.25 □

Satz 2.22: Auf dem Raum $L^2(\Omega)$ ist durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \left(\int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

2 Grundlagen

ein Skalarprodukt definiert, welches die Norm $\|\cdot\|_{L^2}$ gemäß Satz 2.21 induziert. Der Raum $L^2(\Omega)$ ist mit diesem Skalarprodukt ein Hilbertraum.

Beweis. [29] Kapitel 6, Beispiel 3 □

Satz 2.23 (Fundamentallemma der Variationsrechnung): Für eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ die

$$\langle f, v \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

erfüllt, gilt bereits $\|f\|_{L^2} = 0$.

Beweis. [22] Kapitel 1.5. □

Definition 2.24: 1. Der Raum der p-fach lokal integrierbaren Funktionen auf Ω mit $1 \leq p \leq \infty$ ist definiert durch

$$L_{\text{loc}}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid fv \in L^p(\Omega) \forall v \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

2. Für $\alpha \in \mathbf{N}^d$ heißt eine Funktion $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ schwach differenzierbar von Ordnung α , falls eine Funktion $g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ existiert, sodass

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha v(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) v(x) \, dx$$

für jede Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. Die Funktion g nennen wir schwache Ableitung von f und bezeichnen sie wie die klassische Ableitung ebenfalls mit $\partial^\alpha f$.

3. Der Raum aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, deren schwache Ableitungen $\partial^\alpha f$ bis zur Ordnung $|\alpha| = k$ ebenfalls in $L^p(\Omega)$ liegen, wird als Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Die Sobolev-Räume für $p = 2$ werden speziell mit $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ bezeichnet.

4. Für eine messbare Teilmenge $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit $\int_{\Gamma} 1 \, ds(x) > 0$ und $k \in \mathbf{N}$ bezeichnen wir diejenigen Funktionen aus $H^k(\Omega)$, die auf Γ verschwinden, mit

$$H_{\Gamma}^k(\Omega) := \{v \in H^k(\Omega) \mid v(x) = 0 \text{ fast überall in } \Gamma\}.$$

Die Schreibweise $\int_{\Gamma} f(x) \, ds(x)$ bezeichnet dabei die Integration auf einer hinreichend glatten Mannigfaltigkeit Γ der Dimension $d - 1$.

Satz 2.25: 1. Jeder Sobolew-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ist bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = \infty \end{cases}$$

vollständig.

2. Der Raum der glatten Funktionen $C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}})$.

Beweis. [33]

□

Bemerkung 2.26: 1. In Analogie zu den Sobolev-Räumen $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen wir für $p = 2$ auch die darauf definierten Normen mit $\|\cdot\|_{H^k} := \|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

2. Alle obigen Aussagen zu Sobolev-Räumen lassen sich auch für Tupel aus den entsprechenden Räumen $(W^{k,p}(\Omega))^d$ formulieren. Die zugehörigen Normen ergeben dabei durch zusätzliche Summation über die Einzelkomponenten als

$$\|u\|_{(W^{k,p})^d} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k, 1 \leq i \leq d} \|\partial^\alpha u_i\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k, 1 \leq i \leq d} \|\partial^\alpha u_i\|_{L^\infty}, & p = \infty \end{cases}.$$

Zur Vereinfachung der Notation werden wir im Nachfolgenden auf die explizite Angabe des Dimensions-Exponenten weitestgehend verzichten, solange sie nicht der Verständlichkeit dienlich erscheint.

Satz 2.27: Auf dem Raum $(H^1(\Omega))^d$ ist durch

$$|\cdot|_{H^1} : (H^1(\Omega))^d \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \left(\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Halbnorm definiert, wobei

$$\varepsilon(v) := \frac{1}{2} (Dv + Dv^\top)$$

und Dv die Jacobimatrix aus den schwachen Ableitungen der Komponenten von v bezeichnet. Der Doppelpunkt-Operator bezeichnet das Frobenius-Skalarprodukt

$$a : b := \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

2 Grundlagen

Beweis. Die benötigte absolute Homogenität und die Subadditivität werden komponentenweise von der L^2 -Norm vererbt, da das Ableiten linear ist. \square

Bemerkung 2.28: Bei $|\cdot|_{H^1}$ handelt es sich tatsächlich nur um eine Halbnorm, da die positive Definitheit beispielsweise für jede konstante Funktion verletzt ist.

Satz 2.29: Der Raum $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ ist ein bezüglich $\|\cdot\|_{H^1}$ abgeschlossener Unterraum in $H^1(\Omega)$ auf dem durch $|\cdot|_{H^1}$ eine Norm definiert ist, die äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist. Das heißt, dass ein $c > 0$ existiert für das

$$c^{-1}\|v\|_{H^1} \leq |v|_{H^1} \leq c\|v\|_{H^1}$$

gilt.

Beweis. [11] Satz 6.3-4 \square

Bemerkung 2.30: Aus der Abgeschlossenheit von $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ folgt insbesondere, dass es sich bei $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ mit der Norm $|\cdot|_{H^1}$ um einen Banachraum handelt. Weiter bildet $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{|H^1|} := \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

einen Hilbertraum.

Satz 2.31: Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit größtem Eigenwert λ_{\max} und kleinstem Eigenwert λ_{\min} gilt

$$\lambda_{\min} x \cdot x \leq x \cdot Ax \leq \lambda_{\max} x \cdot x$$

für beliebige Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, wobei mit

$$a \cdot b := \sum_{i=1}^d a_i b_i \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d$$

das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^d notiert wird.

Beweis. [21] Kapitel 7.5, Aufgabe 5 \square

Satz 2.32 (Lax und Milgram): 1. Es sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H . Weiter seien $\alpha_0, \beta_0 > 0$, sodass für alle $u, v \in H$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \alpha_0 \|u\| \|v\| \\ a(u, u) &\geq \beta_0 \|u\|^2 \end{aligned}$$

gilt. Dann besitzt die Variationsgleichung

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H$$

für jedes $l \in H^*$ eine eindeutige Lösung in H .

2. Für die Abbildung

$$A : H \rightarrow H^*, v \mapsto a(v, \cdot)$$

gilt $A \in \mathcal{L}(H, H^*)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(H^*, H)$ und $\|A^{-1}\|_{H^*, H} \leq \frac{1}{\beta_0}$. Insbesondere ist A^{-1} stetig.

Beweis. 1. [29] Kapitel 6, Satz 6

2. [26] Lemma 1.8

□

2.2 Optimierung in Banachräumen

Wir betrachten in diesem Kapitel drei Banachräume Y , U und Z , sowie Abbildungen $J : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$ als Zielfunktional und $c : Y \times U \rightarrow Z$ als einzuhaltende Nebenbedingung. Damit definieren wird das Optimierungsproblem

$$\min_{(y, u) \in Y \times U} J(y, u) \tag{2.1}$$

$$c(y, u) = 0. \tag{2.2}$$

Wir nehmen an, dass sowohl J als auch c hinreichend oft Frechet-differenzierbar sind, sodass alle im Folgenden auftauchenden Ableitungen wohldefiniert sind.

Wir gehen weiter davon aus, dass durch die Beschränkung $c(y, u) = 0$ für jedes Element $u \in U$ bereits ein eindeutiges Element $y = y(u) \in Y$ bestimmt ist und sprechen somit vom Steuerungsraum U und vom Zustandsraum Y . Garantiert wird diese Voraussetzung in der Regel durch die Annahme der stetigen Invertierbarkeit von $\frac{\partial}{\partial y} c(y, u)$

2 Grundlagen

und den Satz von der impliziten Funktion. Die eindeutige Zuordnung von Steuerungen auf Zustände rechtfertigt nachfolgende Definition.

Definition 2.33: Das zur Problemformulierung (2.1)-(2.2) äquivalente Minimierungsproblem

$$\min_{u \in U} \hat{J}(u) := J(y(u), u)$$

wird als reduzierte Formulierung des gleichungsbeschränkten Problems bezeichnet.

Definition 2.34: Für das Problem (2.1)-(2.2), einen Zustand $y \in Y$ und eine Steuerung $u \in U$ wird durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} c(y, u) \right)^{\text{ad}}(p) = - \frac{\partial}{\partial y} J(y, u)$$

die sogenannte zugehörige adjungierte Gleichung definiert. Die Lösung $p \in Z^*$ der adjungierten Gleichung wird als adjungierter Zustand bezeichnet.

Satz 2.35: Für die Frechet-Ableitung des reduzierten Zielfunktionals \hat{J} der Aufgabe (2.1)-(2.2) gilt

$$\hat{J}'(u) = \frac{\partial}{\partial u} J(y, u) + \left(\frac{\partial}{\partial u} c(y, u) \right)^{\text{ad}}(p),$$

wobei $p \in Z^*$ der zu u und $y(u)$ zugehörige adjungierte Zustand gemäß Definition 2.34 ist.

Beweis. Für jede Steuerung u und den zugehörigen Zustand $y(u)$ gilt $c(y(u), u) = 0$ und somit

$$\hat{J}(u) = J(y(u), u) = J(y(u), u) + \langle p, c(y(u), u) \rangle.$$

Nach Satz 2.10 gilt

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u) &= \frac{\partial}{\partial y(u)} J(y(u), u) \circ y'(u) + \frac{\partial}{\partial u} J(y(u), u) \\ &\quad + \left\langle p, \frac{\partial}{\partial y(u)} c(y(u), u) \circ y'(u) \right\rangle + \left\langle p, \frac{\partial}{\partial u} c(y(u), u) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nach der Definition des adjungierten Zustands gilt für beliebige $h \in Y$

$$-\frac{\partial}{\partial y} J(y, u)[h] = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y} c(y, u) \right)^{\text{ad}}(p), h \right\rangle = \left\langle p, \frac{\partial}{\partial y} c(y, u)[h] \right\rangle$$

woraus

$$\frac{\partial}{\partial y(u)} J(y(u), u) \circ y'(u) + \left\langle p, \frac{\partial}{\partial y(u)} c(y(u), u) \circ y'(u) \right\rangle = 0 \in U^*$$

folgt. Durch Einsetzen in (2.3) folgt die Behauptung. \square

2.3 Lineare Elastizität

Ziel dieser Arbeit ist die Optimierung von Materialeigenschaften zur Verbesserung des Verformungsverhaltens eines Werkstückes unter Kraftereinwirkung. In diesem Kapitel sollen die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung des Verformungsverhaltens eines Körpers gelegt werden. Hierzu werden die benötigten Größen zur Beschreibung von Deformationen und Kräften sowie die geltenden Gleichgewichtsbedingungen eingeführt. In dieser Arbeit gehen wir dabei von einem linear elastischem Verhalten aus, was zu vereinfachenden Annahmen sowohl für das verwendete Material, als auch für die beschreibenden Gleichungen führt.

2.3.1 Referenzkonfiguration und Deformation

Wir gehen davon aus, dass das zu untersuchende Werkstück ohne äußere Kraftereinwirkung einen natürlichen, undeformierten Zustand hat und identifizieren diesen Zustand mit der Punktmenge im dreidimensionalen Raum, die der Körper einnimmt. Wir gehen hierbei von einem Punktkontinuum aus. Zur Beschreibung der Punktmenge wählen wir ein festes kartesisches Koordinatensystem, sodass sich ein zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ergibt, für das $\bar{\Omega}$ die Massepunkte des Werkstücks umfasst, wobei $\bar{\Omega}$ den Abschluss des nach Definition offenen Gebiets Ω bezüglich der euklidischen Norm bezeichnet. Den Rand von Ω wollen wir mit $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$ bezeichnen. Für die Betrachtungen in dieser Arbeit werden verschiedene weitere Anforderungen an die Glattheit des Randes $\partial\Omega$ gestellt werden. Wir bezeichnen die Punktmenge $\bar{\Omega}$, die der Körper in seiner undeformierten Ausgangslage einnimmt, als Referenzkonfiguration.

Unter Einwirkung von äußeren Kräften wird das betrachtete Werkstück verformt. Die Deformation des Körpers lässt sich mittels einer Funktion

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

2 Grundlagen

beschreiben, sodass jedem Massepunkt $x \in \bar{\Omega}$ der Referenzkonfiguration die Position zugeordnet wird, die er im verformten Zustand einnimmt. Aus dem physikalischen Verständnis einer Deformation unter Krafteinwirkung lassen sich bereits einige Anforderungen an die Abbildung ϕ formulieren. Auch im verformten Zustand $\Phi(\bar{\Omega})$ soll es sich bei dem Werkstück um ein Punktkontinuum handeln. Das Gebiet soll weder gänzlich zerteilt werden, noch sollen durch Risse zusätzliche Randpunkte hinzukommen. Diese natürliche Eigenschaft ist durch Stetigkeit der Abbildung Φ sichergestellt. Die Annahme der Injektivität von Φ auf Ω sichert, dass keine unphysikalischen Materialdurchdringungen vorliegen. Bereiche des Randes $\partial\Omega$, auf denen Φ nicht injektiv ist, sind zur Beschreibung von Selbstberührungen denkbar. Schließlich garantiert die Eigenschaft

$$\det(D\Phi(x)) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

wobei $D\Phi(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ den sogenannten Deformationsgradienten in Form der Jacobimatrix von Φ bezeichnet, dass die Deformation orientierungserhaltend ist, und somit keine unphysikalischen Materialumstülpungen vorliegen. Zur Wohldefiniertheit des Deformationsgradienten $D\Phi$ gehen wir davon aus, dass die Abbildung Φ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $\bar{\Omega} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ ist. In erster Näherung beschreibt der Deformationsgradient das lokale Verformungsverhalten des Körpers in der Umgebung eines Materialpunkts $x \in \Omega$ mittels

$$\Phi(x + \delta x) = \Phi(x) + D\Phi(x) \delta x + o(|\delta x|). \quad (2.4)$$

Unser Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen den auf einen Körper wirkenden Kräften und dessen Verformung zu beschreiben. Fasst man die unverformte Referenzkonfiguration als trivialen Sonderfall von Deformation ohne wirkende Kräfte auf, so gilt für die zugehörige Deformationsabbildung

$$\Phi_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x$$

und für den Deformationsgradienten

$$D\Phi_0(x) = I \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Einheitsmatrix darstellt. Es entspricht dem physikalischen Verständnis, dass eine reine Starrkörpertransformation, die durch die Komposition einer Translation und einer Rotation beschrieben wird, ebenso wie die Referenzkonfiguration keine inneren Verschiebungen und wirkende Kräfte aufweist. Jede Starrkörpertransfor-

mation kann mittels der Deformationsabbildung

$$\Phi_R(x) = Qx + b$$

mit einer Rotationsmatrix

$$Q \in SO(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T A = I, \det A = 1\}$$

und einem Translationsvektor $b \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Für den zugehörigen Deformationsgradienten gilt

$$D\Phi_R(x) = Q \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Obwohl wir für Starrkörpertransformation dasselbe lokale Verformungsverhalten wie für die Referenzkonfiguration erwarten, stimmen die jeweiligen Deformationsgradienten im Allgemeinen nicht überein. Dem entgegen gelten die beiden nachfolgenden Aussagen.

Satz 2.36: 1. Wir betrachten eine offene, zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi \in C^1(\Omega)$ für die gilt

$$D\phi(x)^T D\phi(x) = I \quad \forall x \in \Omega.$$

Für jede solche Abbildung ϕ existieren eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $Q^T Q = I$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$\phi(x) = Qx + b \quad \forall x \in \Omega.$$

2. Es sei Ω wie oben und $\phi, \psi \in C^1(\Omega)$ mit

$$D\phi^T D\phi = D\psi^T D\psi \quad \forall x \in \Omega,$$

wobei ψ injektiv sei und $\det(D\psi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$ gelte. Dann existieren eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $Q^T Q = I$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$\phi(x) = Q \psi(x) + b \quad \forall x \in \Omega$$

gilt.

Beweis. 1. [11] Satz 1.8-1

2. [11] Satz 1.8-2

□

Zum einen besagt der erste Teil von Satz 2.36, dass es sich bei jeder Deformation Φ , für die wie für die undeformierte Referenzkonfiguration

$$D\Phi^\top D\Phi = I = D\Phi_0^\top D\Phi_0$$

gilt, um eine Starrkörpertransformation (eventuell ergänzt um eine Spiegelung) handelt. Zum anderen gilt für jede Starrkörpertransformation Φ_R

$$D\Phi_R^\top D\Phi_R = Q^\top Q = I.$$

Wir bezeichnen $C_\Phi(x) := D\Phi(x)^\top D\Phi(x)$ als rechten Cauchy-Green Verzerrungstensor. Für alle Konfigurationen mit identischem rechten Cauchy-Green Verzerrungstensor gilt nach dem zweiten Teil von Satz 2.36, dass sie sich nur um eine Starrkörpertransformation unterscheiden. Als Maß für die Abweichung einer Konfiguration Φ von einer Starrkörpertransformation Φ_R bietet sich somit die Differenz $C_\Phi - C_{\Phi_0} = C_\Phi - I$ an und wir definieren den sogenannten Green-Lagrange Verzerrungstensor als

$$E_\Phi(x) := \frac{1}{2}(C_\Phi(x) - I) \quad \forall x \in \Omega.$$

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Verformung eines Körpers besteht darin, dass wir einem Punkt der Referenzkonfiguration nicht die Position im verformten Zustand, sondern die Differenz zur Ausgangsposition zuordnen. Die hierdurch definierte Abbildung bezeichnen wir als Verschiebungen u und es gilt

$$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \Phi(x) - x.$$

Für den sogenannten Verschiebungsgradienten Du gilt

$$Du = D\Phi - I.$$

Für den rechten Cauchy-Green Verzerrungstensor ergibt sich daraus die Darstellung

$$C_\Phi = D\Phi^\top D\Phi = (Du + I)^\top (Du + I) = Du^\top Du + Du^\top + Du + I$$

und für den Green-Lagrange Verzerrungstensor in Abhängigkeit von u gilt

$$E_u = \frac{1}{2}(C_\Phi - I) = \frac{1}{2}(Du^\top + Du + Du^\top Du).$$

Die Einträge des Green-Lagrange Verzerrungstensors ergeben sich somit als Summe aus den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial_i} u_j$ der Verschiebungen mit Produkten dieser Ableitungen. Für kleine Werte der partiellen Ableitungen der Verschiebungen $|\frac{\partial}{\partial_i} u_j(x)| \ll 1$ sind die quadratischen Terme vernachlässigbar und wir erhalten schließlich als Maß der lokalen Deformation den linearisierten Verzerrungstensor

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(Du^\top + Du), \quad (2.5)$$

wobei zur Verbesserung der Übersichtlichkeit auf die explizite Ausformulierung der räumlichen Abhängigkeit von x in

$$\frac{1}{2} \left(Du(x)^\top + Du(x) \right)$$

im Weiteren verzichtet wird.

Bei der Herleitung des linearisierten Verzerrungstensors haben wir einige Annahmen bezüglich der Deformation und damit auch bezüglich der Verschiebungen herangezogen, die nachfolgend zusammen gefasst werden.

Annahme 1: Wir gehen davon aus, dass der Körper sowohl in der Referenzkonfiguration als auch in jeder hieraus durch Starrkörpertransformation resultierenden Konfiguration einen natürlichen Zustand ohne innere Verzerrungen hat. Wir nehmen weiter an, dass die Deformationsabbildung Φ stetig differenzierbar, injektiv und orientierungserhaltend ist. Schließlich nehmen wir an, dass die partiellen Ableitungen der zugehörigen Verschiebungen u klein sind.

2.3.2 Beschreibung der wirkenden Kräfte

Nachdem wir die physikalischen Größen zur Beschreibung von Deformationen vorgestellt haben, wollen wir nun auf die diese Verformung verursachenden Kräfte eingehen. Wir unterteilen die auf den Körper wirkenden Kräfte in zwei Arten. Die erste Art sind Oberflächenkräfte die auf Punkten des Randes $\partial\Omega$ wirken, und die etwa durch den Kontakt mit anderen Körpern oder durch einen von außen wirkenden Druck oder Sog verursacht werden können. Die zweite Art von wirkenden Kräften sind Volumenkräfte die auf jeden Massepunkt des Körpers $\bar{\Omega}$, also auch auf innere Punkte, wirken können. Beispiele hierfür sind etwa die durch Gravitation oder magnetische Felder wirkenden Kräfte.

Sowohl Oberflächen- als auch Volumenkräfte können mittels punktweise definierter

2 Grundlagen

Vektorfelder beschrieben werden. Für die Volumenkräfte definieren wir das beschreibende Vektorfeld als

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

das jedem inneren Massepunkt $x \in \Omega$ die an dieser Stelle wirkende Kraftdichte als vektorielle Größe $g(x)$ zuordnet. Die Kraftdichten der auf einen Teil $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ des Randes wirkenden Kräfte seien durch

$$f : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$$

gegeben.

Wir formulieren nun die Grundannahmen der Festkörpermechanik an die wirkenden Kräfte, für zeitlich stationäre Probleme.

Annahme 2: Für einen Körper im deformierten Zustand im stationären Gleichgewicht existiert ein Vektorfeld

$$t : \bar{\Omega} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$$

mit $S^1 := \{v \in \mathbb{R}^d \mid \|v\|_2 = 1\}$, das die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt.

1. Für jede Teilmenge $A \subset \bar{\Omega}$ und jeden Punkt $x \in \Gamma_N \cap A$, in dem der äußere Normalenvektor n wohldefiniert ist, gilt

$$t(x, n) = f(x).$$

2. Auf jeder messbaren Teilmenge $A \subset \bar{\Omega}$ mit hinreichend glattem Rand ∂A befinden sich die wirkenden Kräfte im Gleichgewicht

$$\int_A g(x) \, dx + \int_{\partial A} t(x, n) \, ds(x) = 0.$$

3. Auf jeder messbaren Teilmenge $A \subset \bar{\Omega}$ mit hinreichend glattem Rand ∂A befinden sich die Drehmomente im Gleichgewicht

$$\int_A x \times g(x) \, dx + \int_{\partial A} x \times t(x, n) \, ds(x) = 0.$$

4. Das Vektorfeld ist invariant unter durch Rotation des Koordinatensystems hervorgerufenen Beobachterwechseln. Für eine beliebige Rotationsmatrix $Q \in SO(3)$

gilt

$$t(x, Qn) = Qt(x, n) \quad \forall x \in \Omega.$$

Das in Annahme 2 beschriebene Vektorfeld t wird als Cauchysches Spannungsvektorfeld bezeichnet. Ausgehend von den in Annahme 2 formulierten Voraussetzungen lässt sich die nachfolgende fundamentale Aussage zeigen.

Satz 2.37 (Cauchyscher Spannungssatz): Das in Annahme 2 eingeführt Spannungsvektorfeld $t(x, n)$ sei stetig differenzierbar in x und stetig in n . Außerdem sei die die Volumenkräfte beschreibende Kraftdichte g stetig. Dann existiert ein stetig differenzierbares Tensorfeld

$$\sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d},$$

das Cauchysche Spannungstensorfeld genannt wird und die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt.

1. Das Spannungstensorfeld beschreibt das Spannungsvektorfeld in der Form

$$t(x, n) = \sigma(x)n \quad \forall x \in \bar{\Omega}, n \in S^1. \quad (2.6)$$

2. Es erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$-\operatorname{div} \sigma(x) = g(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (2.7)$$

3. Der Cauchysche Spannungstensor erfüllt

$$\sigma(x) = \sigma(x)^\top \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (2.8)$$

und ist somit symmetrisch.

4. Für die Oberflächenkraftdichte f gilt

$$\sigma(x)n = f(x) \quad \forall x \in \Gamma_n, \quad (2.9)$$

wobei n der äußere Normalenvektor im Punkt x ist.

Beweis. [11] Satz 2.3-1

□

Annahme 2 soll in der deformierten Konfiguration des zu untersuchenden Körpers gelten. Diese Konfiguration ist naturgemäß nicht bekannt, sondern vielmehr liegt ein Hauptaugenmerk der hier durchgeführten Untersuchungen auf der Bestimmung und Analyse dieser Konfiguration. Wir gehen erneut von kleinen Deformationen aus und ersparen uns so die Transformation des Cauchyschen Spannungstensors und der übrigen Größen in die Referenzkonfiguration. In der Theorie der linearen Elastizität ist diese Transformation der Spannungen über die Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensenoren ohne weitere als die noch folgenden Annahmen durchführbar. Da wir aus dieser keine zusätzlichen Erkenntnisse erhoffen verweisen wir für Details dazu auf [11].

2.3.3 Zusammenhang zwischen Verzerrung und Spannung, Elastizität und Hyperelastizität

In den vorausgehenden Betrachtungen haben wir mit Verzerrung und Spannung die zentralen Größen zur Beschreibung des Verformungsverhaltens eines Körpers unter Krafteinwirkung eingeführt und bereits einige vereinfachende Annahmen getroffen. Folgern konnten wir insbesondere, dass die Spannungen die partielle Differentialgleichung

$$-\operatorname{div} \sigma(x) = f(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (2.10)$$

erfüllen. Auch unter Ausnutzung der Symmetrie des Spannungstensors σ existieren in (2.10) sechs unabhängige Unbekannte zu deren Bestimmung bislang mit den Koeffizienten des Divergenzoperators lediglich drei Bestimmungsgleichungen vorliegen, sodass das System zunächst unterbestimmt ist. Die fehlenden Bestimmungsgleichungen finden wir in den Abhängigkeiten von Verzerrungen und Spannungen. Als ersten Schritt zu deren Darstellung treffen wir die Annahme von elastischem Materialverhalten.

Annahme 3: Wir nehmen an, dass das betrachtete Werkstück aus einem elastischen Material gefertigt ist. Ein Material heißt elastisch, wenn der Spannungszustand in einer deformierten Konfiguration in jedem Punkt $x \in \Omega$ einzig von x sowie dem Deformationsgradienten $D\Phi(x)$ abhängt. Es gibt somit eine Abbildung

$$(x, D\Phi) \mapsto \sigma(x, D\Phi).$$

Für ein elastisches Material gilt insbesondere, dass der Spannungszustand in einem Punkt weder von der zeitlichen Historie eines Verformungsverlaufs, noch vom Verformungszustand an anderen als dem betrachteten Punkt abhängig ist. Wir betrachten

gemäß Annahme 1 kleine Deformationen, was das Heranziehen des Green-Lagrange Verzerrungstensors $\varepsilon(u)$ anstelle des Deformationsgradienten rechtfertigt. Für die Referenzkonfiguration gilt $\varepsilon(u \equiv 0) = 0$. Da sich der Körper in dieser Konfiguration in einem natürlichen Zustand befinden soll, soll hier für die Spannungen ebenfalls $\sigma(x, \varepsilon(u \equiv 0)) = 0$ gelten.

Für kleine Verschiebungen u wollen wir uns für die in Annahme 3 geforderte Darstellung der Spannungen $\sigma(x, \varepsilon(u))$ auf die lineare Näherung beschränken und Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Hierdurch ergibt sich für diese

$$\sigma(x, \varepsilon(u)) = \mathbf{C}(x)\varepsilon(u) \quad (2.11)$$

mit einem Tensorfeld

$$\mathbf{C} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

vierter Stufe. Die komponentenweise Formulierung dieses Tensorproduktes lautet

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^d \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

und den Tensor \mathbf{C} bezeichnen wir als Elastizitätstensor.

Annahme 4: Wir nehmen an das betrachtete Werkstück ist aus einem hyperelastischen Material gefertigt. Ein Material heißt hyperelastisch, wenn eine differenzierbare Funktion w existiert, sodass an jedem Punkt $x \in \Omega$ für die Komponenten von Spannungstensor und Deformationsgradienten

$$\sigma_{ij}(x, D\Phi) = \frac{\partial}{\partial D\Phi_{ij}} w(x, D\Phi) \quad (2.12)$$

gilt. Die Abbildung w wird lokale Verzerrungsenergiedichte genannt.

Da die Verzerrungsenergie durch eine differentielle Formulierung definiert ist, ist sie bestenfalls bis auf einen konstanten Summanden festgelegt. In der Referenzkonfiguration soll sich der Körper in einem natürlichen spannungsfreien Zustand befinden. Wir setzen die lokale Verzerrungsenergie im undeformierten Zustand auf Null fest. Zusammen mit dem linearen Materialgesetz (2.11) ergibt sich für die lokale Verzerrungsenergie die Darstellung

$$w(x, \varepsilon(u)) = \frac{1}{2} \varepsilon(u) : \sigma(x, \varepsilon(u)) = \frac{1}{2} \varepsilon(u) : \mathbf{C}(x)\varepsilon(u). \quad (2.13)$$

2.3.4 Symmetrien des Elastizitätstensors

Nach Satz 2.37 ist der Spannungstensor σ , und nach Konstruktion auch der Verzerrungstensor ε symmetrisch. Hieraus folgen eine Reihe von Symmetrieeigenschaften für den Elastizitätstensor \mathbf{C} . Zum einen müssen die Bilder des symmetrischen Verzerrungstensors ε symmetrisch sein. Dies ist genau dann für jeden symmetrischen Verzerrungstensor gewährleistet, wenn der Elastizitätstensor die linke Subsymmetrie $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{jikl}$ ($i, j, k, l = 1, \dots, 3$) aufweist (vgl. A.1.2). Außerdem muss für eine eindeutige Darstellung des Elastizitätstensors gewährleistet sein, dass schiefsymmetrische Anteile eines abzubildenden Tensors wegfallen und das Bild somit nur vom symmetrischen Anteil abhängig ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn der Elastizitätstensor die rechte Subsymmetrie $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{ijlk}$ ($i, j, k, l = 1, \dots, 3$) erfüllt (vgl. A.1.1). Schließlich gilt nach (2.11) und (2.12) mit der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} w = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} w = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \sigma_{kl} = \mathbf{C}_{klij}$$

was als Hauptsymmetrie des Elastizitätstensors bezeichnet wird.

2.3.5 Voigt-Notation für Spannungen, Verzerrungen und Materialeigenschaften

Da der Spannungstensor symmetrisch ist, lässt er sich gemäß der Vorschrift

$$\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

als Vektor darstellen. Analog kann auch der Verzerrungstensor in eine Darstellung als Vektor $\varepsilon \in \mathbb{R}^6$ überführt werden.

Aufgrund der in Kapitel 2.3.4 erörterten Symmetrien des Elastizitätstensors \mathbf{C} lässt sich das Produkt $\mathbf{C}\varepsilon$ wie in A.1.3 beschrieben in ein Produkt aus einer Matrix $\hat{\mathbf{C}}$ und dem Vektor σ in der Form

$$\hat{\mathbf{C}}\varepsilon \tag{2.14}$$

umformulieren. Aufgrund der rechten Subsymmetrie des Elastizitätstensors verein-

facht sich die Darstellung aus A.1.3 weiter zu

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1111} & \mathbf{C}_{1122} & \mathbf{C}_{1133} & 2\mathbf{C}_{1123} & 2\mathbf{C}_{1113} & 2\mathbf{C}_{1112} \\ \mathbf{C}_{2211} & \mathbf{C}_{2222} & \mathbf{C}_{2233} & 2\mathbf{C}_{2223} & 2\mathbf{C}_{2213} & 2\mathbf{C}_{2212} \\ \mathbf{C}_{3311} & \mathbf{C}_{3322} & \mathbf{C}_{3333} & 2\mathbf{C}_{3323} & 2\mathbf{C}_{3313} & 2\mathbf{C}_{3312} \\ \mathbf{C}_{2311} & \mathbf{C}_{2322} & \mathbf{C}_{2333} & 2\mathbf{C}_{2323} & 2\mathbf{C}_{2313} & 2\mathbf{C}_{2312} \\ \mathbf{C}_{1311} & \mathbf{C}_{1322} & \mathbf{C}_{1333} & 2\mathbf{C}_{1323} & 2\mathbf{C}_{1313} & 2\mathbf{C}_{1312} \\ \mathbf{C}_{1211} & \mathbf{C}_{1222} & \mathbf{C}_{1233} & 2\mathbf{C}_{1223} & 2\mathbf{C}_{1213} & 2\mathbf{C}_{1212} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Bei der Darstellung des Verzerrungstensors als Vektor ist es sinnvoll, die vektorisierte Darstellung $\epsilon \in \mathbb{R}^6$ des Verzerrungstensors zusätzlich mit der Reuter Matrix R mit

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu multiplizieren. Dies führt zu der Darstellung

$$\epsilon := \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

die unter anderem den Vorteil bietet, dass sich die Verzerrungsenergiedichte w wie in der tensoriellen Darstellung als Skalarprodukt aus Spannung σ und Verzerrung ϵ gemäß

$$w = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon$$

berechnen lässt. Diese Art der Vektordarstellungen σ und ϵ für Spannungen und Verzerrungen wird als Voigt-Notation dieser Größen bezeichnet.

Kombiniert man die Voigt-Notation von Spannungen und Verzerrungen mit der unter Ausnutzung der Symmetrien von Elastizitäts- und Nachgiebigkeitstensor gewonnenen

2 Grundlagen

Darstellung (2.14)-(2.15), so ergibt sich

$$\sigma = \hat{C}\varepsilon = \hat{C}R^{-1}\epsilon,$$

was die Definition

$$C := \hat{C}R^{-1} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix}$$

motiviert. Die Matrix C wird als Elastizitätsmatrix in Voigt-Notation bezeichnet und ist unter Ausnutzung der Hauptsymmetrie von C symmetrisch.

2.3.6 Elliptizität und Umkehrung des Elastizitätstensors

Die das Verformungsverhalten eines Materials beschreibenden Größen sind im Rahmen der Theorie der linearen Elastizität vollständig durch den Elastizitätstensor gegeben. Neben den oben erörterten Symmetrien des Elastizitätstensors C und den daraus resultierenden Symmetrien der Elastizitätsmatrix C , sind weitere Einschränkungen an diese zu treffen, um ein physikalisches Verhalten von Materialien zu modellieren. Damit jede Deformation, die keiner reinen Starrkörpertransformation entspricht, eine punktweise positive Verzerrungsenergiedichte nach sich zieht, formulieren wir nachfolgende Annahme (vgl. [13] Kapitel 2.1).

Annahme 5: Wir nehmen an, dass für die Materialeigenschaften des betrachteten Körpers die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

1. Für den Elastizitätstensor C und beliebige symmetrische Tensoren $\eta \setminus 0$ gilt

$$\eta : C\eta > 0.$$

2. Die Elastizitätsmatrix C ist positiv definit, das heißt dass für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \in \mathbb{R}^6 \setminus 0$

$$v \cdot Cv > 0$$

gilt.

Ausgehend von Annahme 5 und den Symmetrieeigenschaften von \mathbf{C} können wir nun einige Eigenschaften herleiten, die die Lösbarkeit des Problems der linearen Elastizität gewährleisten werden.

Satz 2.38: 1. Durch

$$a^{\mathbf{C}}(u, v) := \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf $H^1(\Omega)^3$ definiert.

2. Es gilt

$$a^{\mathbf{C}}(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{C}Du : Dv \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^3.$$

3. Auf dem Raum $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ ist durch

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{C}} := a^{\mathbf{C}}(u, v)$$

ein Skalarprodukt definiert, bezüglich dessen er einen Hilbertraum bildet.

Beweis. 1. Die Abbildung $a^{\mathbf{C}}(u, v)$ ist linear in u und in v . Aufgrund der Hauptsymmetrie von \mathbf{C} gilt nach A.2.1

$$\mathbf{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v) = \varepsilon(u) : \mathbf{C}\varepsilon(v) = \mathbf{C}\varepsilon(v) : \varepsilon(u)$$

woraus die Symmetrie von $a^{\mathbf{C}}$ folgt.

2. Nach Definition gilt $\varepsilon(u) = \text{sym}(Du) = \frac{1}{2}(Du + Du^{\top})$. Nach A.2.1 gilt

$$\mathbf{C} \text{sym}(Du) : \text{sym}(Dv) = \text{sym}(\mathbf{C} \text{sym}(Du)) : Dv = \mathbf{C} \text{sym}(Du) : Dv,$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der linken Subsymmetrie von \mathbf{C} aus A.1.2 folgt. Erneut nach A.2.1 und A.1.2 folgt schließlich

$$\mathbf{C} \text{sym}(Du) : Dv = \text{sym}(Du) : \mathbf{C}Dv = Du : \text{sym}(\mathbf{C}Dv) = Du : \mathbf{C}Dv = \mathbf{C}Du : Dv$$

was der Behauptung entspricht.

3. Es ist zu zeigen, dass $a^{\mathbf{C}}$ positiv definit ist und dass $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ bezüglich der induzierten Norm

$$\|u\|_{\mathbf{C}} := \langle u, u \rangle_{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}}$$

vollständig ist.

2 Grundlagen

Nach Satz 2.29 ist auf $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ durch

$$|u|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(u) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm gegeben, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^1}$ ist und $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ ist abgeschlossen in $H^1(\Omega)^3$.

Für die äquivalenten Formulierungen in Voigt-Notation

$$\langle u, u \rangle_{|H^1|} = \int_{\Omega} \epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \, dx \quad \text{und} \quad \langle u, u \rangle_{\mathbf{C}} = \int_{\Omega} \mathbf{C}\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \, dx$$

gilt für λ_{\min} kleinsten und λ_{\max} größten Eigenwert von \mathbf{C} nach Satz 2.31

$$\lambda_{\min} \langle u, u \rangle_{|H^1|} \leq \langle u, u \rangle_{\mathbf{C}} \leq \lambda_{\max} \langle u, u \rangle_{|H^1|}$$

woraus mit

$$\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} |u|_{|H^1|} \leq \|u\|_{\mathbf{C}} \leq \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} |u|_{|H^1|}$$

sowohl die positive Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}}$, als auch die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{\mathbf{C}}$ zu $|\cdot|_{|H^1|}$ und somit auch zu $\|\cdot\|_{H^1}$ folgt. Nach Satz 2.25 ist $H^1(\Omega)^3$ bezüglich $\|\cdot\|_{H^1}$ vollständig und somit ist es auch die darin abgeschlossene Menge $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ bezüglich der äquivalenten Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{C}}$.

□

Annahme 5 gewährleistet außerdem, dass die Elastizitätsmatrix invertierbar ist, was die Definition der sogenannten Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{S} := \mathbf{C}^{-1}$ rechtfertigt, die ebenfalls symmetrisch und positiv definit ist. Eine Rücktransformation analog zur Herleitung der Elastizitätsmatrix aus dem Elastizitätstensor in umgekehrter Reihenfolge führt zu der Definition des Nachgiebigkeitstensors $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ dessen Einträge sich aus der Darstellung

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{1111} & \mathbf{S}_{1122} & \mathbf{S}_{1133} & 2\mathbf{S}_{1123} & 2\mathbf{S}_{1113} & 2\mathbf{S}_{1112} \\ \mathbf{S}_{2211} & \mathbf{S}_{2222} & \mathbf{S}_{2233} & 2\mathbf{S}_{2223} & 2\mathbf{S}_{2213} & 2\mathbf{S}_{2212} \\ \mathbf{S}_{3311} & \mathbf{S}_{3322} & \mathbf{S}_{3333} & 2\mathbf{S}_{3323} & 2\mathbf{S}_{3313} & 2\mathbf{S}_{3312} \\ 2\mathbf{S}_{2311} & 2\mathbf{S}_{2322} & 2\mathbf{S}_{2333} & 4\mathbf{S}_{2323} & 4\mathbf{S}_{2313} & 4\mathbf{S}_{2312} \\ 2\mathbf{S}_{1311} & 2\mathbf{S}_{1322} & 2\mathbf{S}_{1333} & 4\mathbf{S}_{1323} & 4\mathbf{S}_{1313} & 4\mathbf{S}_{1312} \\ 2\mathbf{S}_{1211} & 2\mathbf{S}_{1222} & 2\mathbf{S}_{1233} & 4\mathbf{S}_{1223} & 4\mathbf{S}_{1213} & 4\mathbf{S}_{1212} \end{pmatrix}$$

sowie einer Auffüllung gemäß der linken und rechten Subsymmetrie ergeben. Nach Konstruktion gilt damit

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \mathbf{S}\sigma$$

für beliebige symmetrische Tensoren $\sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

2.3.7 Das Verschiebungs-Traktions-Problem der linearen Elastizität

Das Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung der Gleichung zur Beschreibung des Verformungsverhaltens eines Körpers unter Krafteinwirkung. Wir haben nun die hierfür erforderlichen Bausteine erarbeitet. Die zentrale Gleichung zur Beschreibung des Verformungsverhaltens ergibt sich aus Satz 2.37 als die Differentialgleichung

$$-\operatorname{div} \sigma(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (2.17)$$

$$\sigma(x)n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Gamma_N, \quad (2.18)$$

wobei f und g die Kraftdichten der auf einen Teil $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ des Randes wirkenden Oberflächenkräfte bzw. der Volumenkräfte und n das äußere Normalenfeld des Körpers beschreibt.

Diese Gleichung ist zum einen unterbestimmt und enthält zum anderen noch nicht die eigentlich gesuchte Größe, nämlich die Verschiebungen u . Die Verschiebungen kommen über das Materialgesetz (2.11) (Seite 35) und ihre Darstellung in Form des linearisierten Verzerrungstensors gemäß (2.5) (Seite 31) ins Spiel. Zusätzlich zu den Gleichungen (2.17)-(2.18) erhalten wir somit

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left((Du(x))^T + Du(x) \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (2.19)$$

$$\sigma(x) = \mathbf{C}(x)\varepsilon(u) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.20)$$

wobei die Materialeigenschaften des Körpers in dem Elastizitätstensor \mathbf{C} enthalten sind.

Schließlich werden wir die Verschiebungen u auf einem nichtleeren Teil $\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ des Randes festsetzen müssen, um eine eindeutige Lösbarkeit des Systems (2.17)-(2.20) garantieren zu können. Dies geschieht mittels der Dirichlet-Randbedingung

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_D. \quad (2.21)$$

2 Grundlagen

Insgesamt erhalten wir das sogenannte Verschiebungs-Traktions-Problem, für dessen Lösung wir nachfolgende erste Definition festhalten.

Definition 2.39: Für stetige Kraftdichten $f : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennen wir eine Abbildung $u \in C^2(\bar{\Omega})$, die das System (2.17)-(2.21) erfüllt, starke Lösung des zugehörigen Verschiebungs-Traktions-Problems.

Das System (2.17)-(2.21) ist im Allgemeinen nicht lösbar. Wir betrachten die nachfolgende Aussage zur Motivation einer Problemumformulierung, die zum einen Lösbarkeit garantiert, und deren Lösung zum anderen im Falle der Existenz einer starken Lösung mit dieser zusammenfällt.

Satz 2.40: Es sei u eine starke Lösung des Systems (2.17)-(2.21). Dann erfüllt u die sogenannte schwache Formulierung

$$a^{\mathbf{C}}(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \quad (2.22)$$

für alle Testfunktionen v mit der symmetrischen Bilinearform

$$a^{\mathbf{C}}(u, v) := \int_{\Omega} Dv(x) : \mathbf{C}Du(x) \, dx \quad (2.23)$$

und dem linearen Operator

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x). \quad (2.24)$$

Beweis. Bildung des Skalarprodukts von Gleichung (2.17) mit einer beliebigen Testfunktion $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ und anschließende Integration über Ω ergibt

$$- \int_{\Omega} v(x) \cdot \operatorname{div} \sigma(x) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Durch Anwendung der Greenschen Identität A.4.1 und Einsetzen der Neumann-Randbedingung (2.18) erhält man

$$\int_{\Omega} Dv(x) : \sigma(x) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot f(x) \, ds(x),$$

wobei sich die linke Seite durch Einsetzen des linearen Materialgesetzes (2.11) (Seite 35) und Ausnutzung der rechten Subsymmetrie des Elastizitätstensors \mathbf{C} (vgl. A.1.1)

weiter zu

$$\int_{\Omega} Dv(x) : \sigma(x) \, dx = \int_{\Omega} Dv(x) : \mathbf{C} \operatorname{sym} Du(x) \, dx = \int_{\Omega} Dv(x) : \mathbf{C} Du(x) \, dx$$

und somit zu $a(u, v)$ vereinfachen lässt. Es gilt, dass a linear in u und in v ist und nach A.2.1 symmetrisch. Da $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$, reduziert sich das Randintegral zu

$$\int_{\partial\Omega} v(x) \cdot f(x) \, ds(x) = \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x),$$

womit die Aussage folgt. \square

Die Aussage von Satz 2.40 stellt sicher, dass jede starke Lösung des Systems (2.17)-(2.21) auch Lösung der schwachen Formulierung (2.22)-(2.24) ist. Offen bleibt hierbei letztlich die Frage der Existenz einer Lösung der schwachen Formulierung und in welchem Raum diese zu suchen ist. Aufschluss hierüber gibt der nachfolgende Satz.

Satz 2.41: Für $g \in L^2(\Omega)^3$ und $f \in L^2(\Gamma_N)^3$ existiert ein eindeutiges $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$, sodass die schwache Formulierung (2.22)-(2.24) erfüllt ist.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x). \quad (2.25)$$

Nach Satz 6.1-3 und Satz 6.1-7 in [11] ist $\langle l, \cdot \rangle$ stetig. Außerdem ist $\langle l, \cdot \rangle$ eine Linearform auf $L^2(\Omega)^3$ und insbesondere auch auf $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$.

Nach Satz 2.38 bildet $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}}$ einen Hilbertraum. Für diesen gilt $a^{\mathbf{C}}(u, u) = \|u\|_{\mathbf{C}}$ und nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt außerdem $|a^{\mathbf{C}}(u, v)| \leq \|u\|_{\mathbf{C}} \|v\|_{\mathbf{C}}$. Die Aussage folgt nun unmittelbar aus Satz 2.32. \square

Bemerkung 2.42: Der Beweis von Satz 6.3-5 in [11] ist für die etwas schwächeren Voraussetzungen $f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ und $g \in L^{\frac{5}{6}}(\Omega)$ geführt. Die Anforderungen an die Funktionen f und g in Satz 2.41 sind somit stärker als notwendig gefasst. Aufgrund der Beschränktheit der Menge Ω gilt $L^2(\Omega) \subset L^{\frac{5}{6}}(\Omega) \subset L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.

Als letztes Puzzleteil der Suche nach der Lösung des Verschiebungs-Traktions-Problems garantiert die nachfolgende Aussage, dass wir uns auf die Suche nach schwa-

2 Grundlagen

chen Lösungen beschränken können. Wir zeigen, dass im Falle der Existenz einer starken Lösung diese eindeutig ist und mit der schwachen Lösung übereinstimmt.

Satz 2.43: Erfüllt ein $u \in C^2(\bar{\Omega})^d \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$ die schwache Formulierung (2.22)-(2.24), so ist es eindeutige Lösung der klassischen Formulierung (2.17)-(2.21).

Beweis. Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})^d$ schwache Lösung und erfülle somit

$$\int_{\Omega} Dv(x) : \mathbf{C}Du(x) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x) \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d.$$

Wie im Beweis zu Satz 2.40 ergibt sich in umgekehrter Reihenfolge

$$\int_{\Omega} Dv(x) : \mathbf{C}Du(x) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \cdot \operatorname{div} \sigma(u(x)) \, dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot (\sigma(u(x))n(x)) \, ds(x),$$

was zusammen

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v(x) \cdot \operatorname{div} \sigma(u(x)) \, dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot (\sigma(u(x))n(x)) \, ds(x) = \\ \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x) \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \end{aligned} \quad (2.26)$$

ergibt. Wählt man spezieller $v \in C_0^\infty(\Omega)^d \subset H_0^1(\Omega)^d \subset H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$ so verschwinden nach Satz 2.18 die Randintegrale und es folgt

$$\int_{\Omega} v(x) \cdot (\operatorname{div} \sigma(u(x)) + g(x)) \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Aus Satz 2.23 folgt daraus, dass fast überall $\operatorname{div} \sigma(u(x)) + g(x) = 0$ gilt. Mit der Stetigkeit von u folgt hieraus

$$- \operatorname{div} \sigma(u(x)) = g(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Durch Einsetzen in (2.26) reduziert sich die Gleichung zu

$$\int_{\partial\Omega} v(x) \cdot (\sigma(u(x))n(x)) \, ds(x) = \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x) \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d.$$

Spezialisiert man die Wahl von v erneut, so folgt aus

$$\int_{\Gamma_N} v(x) \cdot (\sigma(u(x))n(x) - f(x)) \, ds(x) = 0 \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \cap C_0^\infty(\Gamma_N)$$

erneut mit Satz 2.23 die Neumann-Randbedingung (2.18). Durch die Wahl des Funk-

tionenraums $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$ ist schließlich auch die Dirichlet-Randbedingung (2.21) erfüllt.

Zur Eindeutigkeit: Nach Satz 2.41 besitzt die schwache Formulierung eine (im L^2 -Sinne) eindeutige Lösung. Gäbe es eine weitere Lösung $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})^d$ so wäre diese nach Satz 2.40 ebenfalls eine schwache Lösung, müsste also u fast überall entsprechen. Aus der Stetigkeit von u und \tilde{u} folgt die (starke) Gleichheit und somit die Eindeutigkeit der starken Lösung. \square

2.4 Transformation von Koordinatensystemen

In der Materialwissenschaft werden feste Werkstoffe, aber auch Flüssigkeiten und Gase, bezüglich ihrer physikalischen Eigenschaften untersucht. Betrachtet man die physikalischen Eigenschaften eines Materials, wie etwa dessen durch Kraftwirkung hervorgerufenen Verformungsverhalten oder Leitfähigkeit bezüglich Wärme oder Elektrizität, so kann das Material einer von zwei Kategorien zugeordnet werden. Ein Material, das sich bezüglich einer physikalischen Größe in allen Raumrichtungen gleich verhält, wird als isotrop bezüglich dieser Eigenschaft bezeichnet. Im Gegensatz dazu stehen Materialien mit anisotropem Verhalten bezüglich der physikalischen Eigenschaft, bei denen eine Änderung der Materialausrichtung zu einem veränderten Verhalten führt. Anisotropien können sowohl auf mikroskopischen Eigenschaften als auch auf makroskopischen Eigenschaften des Materials beruhen. Unter mikroskopischen Eigenschaften versteht man Eigenschaften die sich im kleinsten Maßstab, wie etwa der molekularen Gitterstruktur, eines Stoffes begründen. Makroskopische Eigenschaften beruhen auf Eigenheiten in größeren Maßstäben, wie etwa der räumlichen Verteilung eines isotropen Materials zur Erzeugung eines Werkstücks mit erwünschtem anisotropem Verhalten, oder etwa der Kombination unterschiedlicher Materialien in Form von Schichtungen oder Fasereinschlüssen. Eine Grenze zwischen mikroskopischen und makroskopischen Maßstäben ist nicht eindeutig für alle Untersuchungen zu ziehen. Vielmehr hängt es von der Gesamtgröße eines zu untersuchenden Systems, der benötigten Genauigkeit der Resultate sowie von dem Aufwand, den man bei der Untersuchung zu leisten bereit ist, ab, wie weit man ein Material bezüglich seiner Eigenschaften in Untersuchungen auflöst. Zu der in dieser Arbeit betriebenen Untersuchung des elastischen Verhaltens von Verbundstoffen wird häufig ein Homogenisierungsansatz gewählt, bei dem der Verbundstoff mit seinen Eigenschaften nicht bis auf die einzelnen Bestandteile aufgelöst wird. Vielmehr wird das Material als homogen bezüglich der zu untersuchenden Eigenschaften angenommen. Die hierzu benötigten homogenisierten Mate-

2 Grundlagen

rialeigenschaften können in einfachen Konstellationen rechnerisch bestimmt werden. In den meisten komplexen Zusammenstellungen werden sie jedoch durch Messversuche bestimmt. Zur Untersuchung von Effekten wie der sogenannten Delamination, das heißt der ungewollten Auftrennung von Verbundstoffen an den Kontaktflächen unterschiedlicher Materialien, kann es notwendig sein das Material ohne die beschriebene Homogenisierungsidee zu betrachten.

Für die Beschreibung und Untersuchung von Anisotropien sind diejenigen Ebenen von besonderem Interesse, bezüglich derer die Materialeigenschaften Symmetrien aufweisen. Bei isotropem Verhalten stellt jede Schnittebene durch das Material eine solche Symmetrieebene dar. Der Charakter einer vorliegenden Anisotropie kann durch Angabe von Anzahl und Ausrichtung der vorhandenen Symmetrieebenen genauer definiert werden.

Wie in den Kapiteln 2.3.3 und 2.3.6 beschrieben, werden die elastischen Materialeigenschaften im Elastizitätstensor \mathbf{C} und im Nachgiebigkeitstensor \mathbf{S} bzw. deren Darstellungen C und S in Voigt-Notation angegeben. Bei bezüglich des elastischen Verhaltens anisotropen Materialien wird die Angabe der Materialeigenschaften von der Wahl des Bezugskordinatensystems abhängen. Wird das Bezugskordinatensystem, in dem die Größen wie Spannungen σ und Verzerrungen ε angegeben sind, so gewählt, dass die Koordinatenachsen orthogonal zu den Symmetrieebenen des elastischen Verhaltens stehen, so werden die Tensoren und Matrizen zur Beschreibung des elastischen Verhaltens spezielle Strukturen aufweisen. Im Folgenden werden zunächst die Grundlagen zur Abhängigkeit der Darstellung der zu untersuchenden physikalischen Größen von der Wahl des Bezugskordinatensystems erläutert, und anschließend werden hieraus Folgerungen für besondere Strukturen gezogen, die bei verschiedenen Arten der Anisotropie vorliegen.

2.4.1 Koordinatentransformation für vektorielle Größen

Für alle Betrachtungen in dieser Arbeit wird von einem fixierten karthesischen Koordinatensystem, meist im Dreidimensionalen, als Referenzkoordinaten ausgegangen bezüglich dessen alle Größen angegeben werden, die nicht anders gekennzeichnet sind. Von besonderem Interesse für die Untersuchung von Materialausrichtungen sind Koordinatensysteme, die durch Rotation um eine oder mehrere Achsen aus dem Referenzkoordinatensystem entstehen. Im zweidimensionalen Fall sind auf diese Art lediglich Drehungen um eine gedachte Achse in der dritten Raumdimension möglich. Im dreidimensionalen Fall kann jede durch Drehung entstandene Ausrichtung eines

2.4 Transformation von Koordinatensystemen

karthesischen Koordinatensystems durch Komposition von drei Drehungen jeweils um eine der Koordinatenachsen erreicht werden. Im zweidimensionalen Fall wird die Drehung eines Koordinatensystems um einen Winkel α durch die Multiplikation eines Koordinatenvektors mit der Rotationsmatrix

$$R(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

beschrieben. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ die Koordinatendarstellung eines Punktes bezüglich des Referenzkoordinatensystems mit orthonormalen Basisvektoren e_i ($i = 1,2$) und sei weiter $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ die Darstellung desselben Punktes bezüglich eines um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn rotierten Koordinatensystems mit orthonormalen Basisvektoren \tilde{e}_i ($i = 1,2$), so gilt

$$\tilde{x} = R(\alpha)x.$$

Für die Rücktransformation, die durch Multiplikation mit der Inversen beschrieben wird gilt

$$R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^\top.$$

Analog werden im dreidimensionalen Fall Rotationen um die jeweiligen Koordinatenachsen e_i ($i = 1,2,3$) durch

$$R_1(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$R_2(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$R_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

beschrieben und es gilt wieder

$$R_i(\alpha)^{-1} = R_i(-\alpha) = R_i(\alpha)^\top \quad (i = 1,2,3)$$

für die Rücktransformation.

Durch Komposition von maximal drei Drehungen der Form (2.28)-(2.30) lässt sich das Referenzkoordinatensystem e_i ($i = 1,2,3$) auf ein beliebiges anderes karthesisches

2 Grundlagen

Koordinatensystem mit orthonormalen Basisvektoren \tilde{e}_i ($i = 1,2,3$) abbilden. Die resultierende Gesamtrotaion ist weiterhin linear und ist somit durch die Zuordnungen der drei Basisvektoren $e_j \mapsto \tilde{e}_j$ eindeutig bestimmt. Ihre Darstellung als Tensor zweiter Stufe ergibt sich dadurch als

$$R_{\tilde{e}_i} := \begin{pmatrix} \tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_1^2 & \tilde{e}_1^3 \\ \tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_2^2 & \tilde{e}_2^3 \\ \tilde{e}_3^1 & \tilde{e}_3^2 & \tilde{e}_3^3 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

wobei die Einträge \tilde{e}_i^j ($i, j = 1,2,3$) jeweils die eindeutigen Koeffizienten zur Darstellung des Basisvektors \tilde{e}_i bezüglich der Basis e_j ($j = 1,2,3$) bezeichnen. Damit lässt sich jede Darstellung $x \in \mathbb{R}^3$ eines Punktes bezüglich des Referenzkoordinatensystems mittels der Vorschrift $x \mapsto \tilde{x} = R_{\tilde{e}_i} x$ in seine Darstellung bezüglich der rotierten Basis überführen. Wie auch schon bei der Rotation um eine der Koordinatenachsen ist auch hier die Rücktransformation über die Multiplikation mit der transponierten Rotationsmatrix möglich, denn es gilt $R_{\tilde{e}_i}^{-1} = R_{\tilde{e}_i}^\top$.

2.4.2 Koordinatentransformation für tensorielle Größen zweiter Stufe

Ein Tensor zweiter Stufe beschreibt eine lineare Abbildung zwischen vektoriellen Größen. Diese Abbildung ist durch ihre Wirkung auf eine beliebige Basis des abzubildenden Vektorraums eindeutig bestimmt. Im Folgenden sei $\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Darstellung eines Tensors zweiter Stufe bezüglich des Referenzkoordinatensystems und $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Darstellung desselben Tensors bezüglich des mittels $R(\alpha)$ um einen Winkel α rotierten Koordinatensystems. Aufgrund der Linearität der durch Matrixmultiplikation beschriebenen Rotation muss für jeden Vektor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\eta} \tilde{x} = R(\alpha) \eta R(\alpha)^\top \tilde{x},$$

und somit auch

$$\tilde{\eta} = R(\alpha) \eta R(\alpha)^\top \quad (2.32)$$

gelten. Über einen Koeffizientenvergleich lässt sich für die Tensortransformation (2.32) die Darstellung $\tilde{\eta} = \mathbf{T}(\alpha) \eta$ mit dem Tensor $\mathbf{T}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2 \times 2}$ vierter Stufe gemäß A.3.1 ermitteln. Analoge Berechnungen ergeben im dreidimensionalen Fall jeweils die zu $R_i(\alpha)$ ($i = 1,2,3$) gehörigen Tensorrotationstensoren $\mathbf{T}_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ ($i = 1,2,3$) gemäß A.3.3, bzw. den zu $R_{\tilde{e}_i}$ gehörigen Tensor $\mathbf{T}_{\tilde{e}_i}$ gemäß A.3.4. Da $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha)$ sowie $R_i(\alpha)^{-1} = R_i(-\alpha)$ ($i = 1,2,3$) gilt, ergeben sich die Tensordarstellungen der Rücktransformationen $\mathbf{T}(\alpha)^{\text{inv}}$ zu $\mathbf{T}(\alpha)$ und $\mathbf{T}_i(\alpha)^{\text{inv}}$ ($i = 1,2,3$) zu $\mathbf{T}_i(\alpha)$ ($i = 1,2,3$) aufgrund

2.4 Transformation von Koordinatensystemen

der Symmetrieeigenschaften $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, jeweils durch Vorzeichenwechsel der nicht quadrierten Sinusterme in A.3.1 und A.3.3. Da $R_{\tilde{e}_i}^{-1} = R_{\tilde{e}_i}^\top$ gilt, erhält man die Rücktransformation $T_{\tilde{e}_i}^{\text{inv}}$ zu $T_{\tilde{e}_i}$ durch jeweiliges Vertauschen der hoch- und tiefgestellten Indizes der \tilde{e}_j^i ($i, j = 1, 2, 3$) in A.3.4.

Symmetrische Tensoren η zweiter Stufe lassen sich im zweidimensionalen Fall gemäß

$$\text{pr}_{2\text{D}} : \{\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2} | \eta \text{ symmetrisch}\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{22} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

bzw. gemäß

$$\text{pr}_{3\text{D}} : \{\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \eta \text{ symmetrisch}\} \rightarrow \mathbb{R}^6, \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{22} \\ \eta_{33} \\ \eta_{23} \\ \eta_{13} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

im dreidimensionalen Fall, als Vektoren $\eta \in \mathbb{R}^3$ im zweidimensionalen und $\eta \in \mathbb{R}^6$ im dreidimensionalen Fall darstellen. Hierdurch vereinfachen sich die Rotationen $T(\alpha)$ und $T_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) der Tensoren zu

$$\tilde{\eta} = T(\alpha)\eta \text{ bzw. } \tilde{\eta}_i = T_i(\alpha)\eta \quad (i = 1, 2, 3)$$

mit $T(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gemäß A.3.2 im zweidimensionalen und $T_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ($i = 1, 2, 3$) gemäß A.3.5 im dreidimensionalen Fall. Analog zum nicht symmetrischen Fall ergeben sich die Rücktransformationen $T(\alpha)^{\text{inv}}$ zu $T(\alpha)$ und $T_i(\alpha)^{\text{inv}}$ zu $T_i(\alpha)$ durch Umkehren der Vorzeichen der Sinusterme, wodurch sich hier die jeweiligen Inversen der Matrizen im herkömmlichen Sinne ergeben. Für die durch $T_{\tilde{e}_i}$ definierte Rotation durch Vorgabe der rotierten Basis ergibt sich die zugehörige Matrixdarstellung $T_{\tilde{e}_i} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ gemäß A.3.6, wobei sich die Inverse $T_{\tilde{e}_i}^{\text{inv}}$ erneut durch Vertauschen der hoch- und tiefgestellten Indizes bestimmen lässt.

Eine direkte Anwendung dieser Transformationsregeln ist für den stets symmetrischen Spannungstensor σ in seiner vektoriellen Darstellung σ in Voigt-Notation möglich. Für die Darstellung $\tilde{\epsilon}$ des Verzerrungsvektors ϵ in Voigt-Notation in einem rotierten Koordinatensystem ergibt sich dahingegen zusammen mit (2.16)

$$\tilde{\epsilon} = R\tilde{\epsilon} = RT\epsilon = RTR^{-1}\epsilon,$$

2 Grundlagen

wobei $T \in \{T(\alpha), T_i(\alpha), T_{\tilde{e}_i}\}$ eine der obigen Rotationsmatrizen und R die Reutermatrix ist. Für die Rücktransformation gilt analog $\epsilon = RT^{\text{inv}}R^{-1}\tilde{\epsilon}$.

2.4.3 Koordinatentransformation für tensorielle Größen vierter Stufe

Bei Untersuchung des elastischen Verhaltens eines Werkstücks sind die Verzerrungen und Spannungen, welche beide als Tensoren zweiter Stufe dargestellt werden, sowie lineare Abbildungen zwischen diesen Größen von zentraler Bedeutung. Lineare Abbildungen zwischen Tensoren zweiter Stufe werden durch Tensoren vierter Stufe dargestellt. Bezüglich eines Referenzkoordinatensystems wird ein Tensor vierter Stufe als $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ dargestellt. Für die Darstellung $\eta \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eines Tensors zweiter Stufe bezüglich desselben Referenzkoordinatensystems ist die lineare Transformation von η komponentenweise gemäß

$$(\mathbf{A}\eta)_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} \quad (i, j = 1, \dots, d)$$

definiert. Für die Darstellung des Tensors \mathbf{A} in einem rotierten Koordinatensystem muss

$$\mathbf{A}\eta = \mathbf{T}^{\text{inv}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T} \eta$$

gelten, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ die Tensorarstellung von \mathbf{A} bezüglich der rotierten Basis darstellt und $\mathbf{T} \in \{\mathbf{T}(\alpha), \mathbf{T}_i(\alpha) (i = 1, 2, 3), \mathbf{T}_{\tilde{e}_i}\}$ einer der Rotationstensoren aus Kapitel 2.4.2 ist. Hieraus folgt die Transformationsregel

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{\text{inv}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T}. \quad (2.35)$$

Gemäß A.1.3 lässt sich das Produkt eines Tensors $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ vierter Stufe, der die linke Subsymmetrie $\mathbf{A}_{ijkl} = \mathbf{A}_{jikl} (i, j, k, l = 1, \dots, d)$ aufweist, und eines symmetrischen Tensors $\eta \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe mittels der Vektordarstellung aus (2.33) und (2.34) zu einem Produkt aus einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ im zweidimensionalen Fall bzw. $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ im dreidimensionalen Fall und einem Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\eta \in \mathbb{R}^6$ umformulieren. Zur Darstellung \tilde{A} der Matrixdarstellung A in einem rotierten Koordinatensystem betrachten wir die Gleichheit

$$A\eta = \mathbf{T}^{\text{inv}} \tilde{A} \mathbf{T} \eta,$$

die für jede Vektordarstellung eines symmetrischen Tensors gelten muss, wobei mit $T \in \{T(\alpha), T_i(\alpha), T_{\tilde{e}_i}\}$ eine der zugehörigen Rotationsmatrizen aus Kapitel 2.4.2 bezeichnet ist. Hieraus ergibt sich für A die Transformationsregel $A = T^{\text{inv}} \tilde{A} T$ und analog

die Rücktransformation $\tilde{A} = T^{\text{inv}}AT$.

2.4.4 Transformation der Elastizitäts- und der Nachgiebigkeitsmatrix

Die Materialeigenschaften orthotroper Materialien liegen üblicherweise in Form der Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrizen in ihrer Darstellung bezüglich des durch die Orthotropieachsen definierten Koordinatensystems vor. Im Weiteren werden diese Matrizen mit C^{mat} und S^{mat} bezeichnet. Da die Ausrichtung der Orthotropieachsen optimiert werden soll, wird sie im Allgemeinen im Ort variieren, sodass das für spätere Berechnungen zugrunde gelegte Referenzkoordinatensystem nur in Sonderfällen mit dem durch die Orthotropieachsen definierten Materialkoordinatensystem zusammenfallen wird. Wir werden nun die bisherigen Resultate dieses Kapitels verwenden, um die (Rück-)Transformation der Materialeigenschaften in verschiedentlich ausgerichteten Materialkoordinatensystemen in ein globales Referenzkoordinatensystem zu beschreiben. Wie die Elastizitäts- und die Nachgiebigkeitsmatrix werden dabei Größen bezüglich eines rotierten Materialkoordinatensystems durch ein übergesetztes „mat“ gekennzeichnet, wohingegen sich Größen ohne diese Kennzeichnung stets auf das unrotierte Referenzkoordinatensystem beziehen.

Betrachten wir ein Materialkoordinatensystem, das entweder durch Vorgabe der Orthotropieachsen oder durch Rotation des Referenzkoordinatensystems mit einem Winkel α um eine der Koordinatenachsen entstanden ist, so gilt für die Transformation von Spannung und Verzerrung in Voigt-Notation wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben

$$\sigma^{\text{mat}} = T\sigma, \quad \sigma = T^{\text{inv}}\sigma^{\text{mat}}, \quad \epsilon^{\text{mat}} = RTR^{-1}\epsilon \quad \text{und} \quad \epsilon = RT^{\text{inv}}R^{-1}\epsilon^{\text{mat}},$$

wobei $T \in \{T(\alpha), T_i(\alpha), T_{\tilde{e}_i}\}$ erneut eine der Rotationsmatrizen aus Kapitel 2.4.2 ist. Hieraus abgeleitet seien die Transformationsmatrizen

$$T_{\sigma}^{\text{s} \leftarrow \text{m}} := T^{\text{inv}} \quad (\text{Spannung vom Material- ins Referenzkoordinatensystem}) \quad (2.36)$$

$$T_{\sigma}^{\text{m} \leftarrow \text{s}} := T \quad (\text{Spannung vom Referenz- ins Materialkoordinatensystem}) \quad (2.37)$$

$$T_{\epsilon}^{\text{s} \leftarrow \text{m}} := RT^{\text{inv}}R^{-1} \quad (\text{Verzerrung vom Material- ins Referenzkoordinatensystem}) \quad (2.38)$$

$$T_{\epsilon}^{\text{m} \leftarrow \text{s}} := RTR^{-1} \quad (\text{Verzerrung vom Referenz- ins Materialkoordinatensystem}) \quad (2.39)$$

definiert. Zur Transformation der Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrizen folgen da-

2 Grundlagen

mit die Implikationen

$$\mathbf{C} \underset{\epsilon}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} = \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{C} \underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \Rightarrow \mathbf{C} = \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{C} \underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \quad (2.40)$$

$$\underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} = \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \Rightarrow \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} = \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{S} \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} = \underset{\epsilon}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{S} \underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \Rightarrow \mathbf{S} = \underset{\epsilon}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{S} \underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \quad (2.42)$$

$$\underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} = \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \Rightarrow \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} = \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \underset{\sigma}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{S}}} \quad (2.43)$$

Schließlich weisen die Transformationsmatrizen aus (2.36)-(2.39) die Symmetrieeigenschaften $\underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{T}_{\sigma} = \left(\underset{\epsilon}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \mathbf{T}_{\epsilon} \right)^{\top}$ und $\underset{\epsilon}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{T}_{\epsilon} = \left(\underset{\sigma}{\overset{m \leftarrow s}{\text{mat}}} \mathbf{T}_{\sigma} \right)^{\top}$ auf, was die Darstellung der Transformationsregeln aus (2.40)-(2.43) beispielsweise zu

$$\mathbf{C} = \underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \underset{\epsilon}{\overset{\text{mat}}{\mathbf{C}}} \left(\underset{\sigma}{\overset{s \leftarrow m}{\text{mat}}} \mathbf{T}_{\sigma} \right)^{\top} \quad (2.44)$$

vereinfacht.

2.4.5 Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrix für orthotrope Materialien

Abschließend wollen wir in diesem Kapitel nun die Darstellung von Materialien mit speziellen Symmetrieeigenschaften untersuchen. Im Rahmen dieser Arbeit soll die optimale Materialausrichtung von Faserverbundstoffen untersucht werden. Für einen unidirektionalen Faserverbundstoff bildet jede Schnittebene, die parallel zum Faserverlauf oder orthogonal zu diesem ist, eine Symmetrieebene bezüglich des elastischen Materialverhaltens. Die in dieser Arbeit geführten Untersuchungen führen wir jedoch für die allgemeinere Kategorie von sogenannten orthotropen Materialien, bei denen lediglich drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen existieren. Wir wählen die Klasse von orthotropen Materialien zum einen, weil zahlreiche Verbundstoffe, wie etwa Laminat aus mehreren unidirektionalen Faserschichten, orthotrope Eigenschaften aufweisen, und zum anderen, weil die hier geführten Überlegungen für diese allgemeinere Materialklasse ohne zusätzlichen Aufwand durchführbar sind.

Die beschriebenen Symmetrien führen zu speziellen Strukturen für die Materialeigenschaften, die in Form der Elastizitäts- und der Nachgiebigkeitsmatrix vorgegeben sind. Wir gehen zunächst von der Nachgiebigkeitsmatrix $\underset{\text{mat}}{\mathbf{S}}$ in ihrer Darstellung bezüglich des Koordinatensystems ihrer Symmetrieebenen aus. Für einen Wechsel des zur Darstellung gewählten Koordinatensystems, der sich durch eine Drehung um 180° um

eine der drei Koordinatenachsen ergibt, darf sich nach der Annahme orthotropen Verhaltens die Nachgiebigkeitsmatrix nicht verändern. Eine exemplarische Rotation der Materialeigenschaften um die dritte Koordinatenachse ergibt sich gemäß (2.42) als

$$S = T_3(180^\circ)^T \overset{\text{mat}}{S} T_3(180^\circ)$$

mit

$$T_3(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus sich die geforderte Gleichheit

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & -S_{14} & -S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & -S_{24} & -S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & -S_{34} & -S_{35} & S_{36} \\ -S_{14} & -S_{24} & -S_{34} & S_{44} & S_{45} & -S_{46} \\ -S_{15} & -S_{25} & -S_{35} & S_{45} & S_{55} & -S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & -S_{46} & -S_{56} & S_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{pmatrix}$$

und somit in einem ersten Schritt

$$\overset{\text{mat}}{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}$$

ergibt. Analoge Überlegungen für Drehungen um die übrigen Achsen liefern für die

2 Grundlagen

Besetztheitsstruktur der Nachgiebigkeitsmatrix $\overset{\text{mat}}{S}$

$$\overset{\text{mat}}{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}$$

und über Invertierung auch für die Elastizitätsmatrix $\overset{\text{mat}}{C}$

$$\overset{\text{mat}}{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Für ein isotropes Material, dessen Materialeigenschaften bezüglich beliebiger Drehungen konstant sind, ergibt sich in analoger Weise für beliebige Drehwinkel, dass sich das gesamte Materialverhalten in Abhängigkeit von lediglich zwei skalaren Größen beschreiben lässt. Diese beiden Größen werden als der Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl ν bezeichnet und es gilt

$$C_{E,\nu} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

und

$$S_{E,\nu} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{pmatrix}.$$

2.4.6 Transformationen erhalten Materialeigenschaften

Sowohl zur Herleitung als auch zur Lösbarkeit der Erhaltungsgleichung der linearen Elastizität waren einige Voraussetzungen an die in der Elastizitäts- und der Nachgiebigkeitsmatrix enthaltenen Materialeigenschaften notwendig. Wir wollen in diesem Kapitel abschließend kurz auf die Erhaltung dieser Eigenschaften eingehen.

Die Elastizitätsmatrix $\overset{\text{mat}}{C}$ und die Nachgiebigkeitsmatrix $\overset{\text{mat}}{S}$ sind symmetrisch und positiv definit. Durch Transformationen der Form

$$C = T^{\top} \overset{\text{mat}}{C} T \quad \text{und} \quad S = T^{\top} \overset{\text{mat}}{S} T$$

mit geeigneten invertierbaren Matrizen T werden die Materialeigenschaften punktweise in beliebige orthonormale Koordinatensysteme transformiert. Wegen

$$\left(T^{\top} \overset{\text{mat}}{C} T \right)^{\top} = T^{\top} \left(\overset{\text{mat}}{C} \right)^{\top} T = T^{\top} \overset{\text{mat}}{C} T$$

und analoger Überlegung für S bleibt die Symmetrie bei diesen Transformationen erhalten. Eine Variablentransformation der Form $y := T^{-1}x$ sichert durch

$$x \cdot Cx = x \cdot T^{\top} \overset{\text{mat}}{C} Tx = y \cdot \overset{\text{mat}}{C} y > 0 \quad \forall x \neq 0$$

ebenso die Erhaltung der positiven Definitheit.

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Nachdem wir in den vorausgehenden Kapiteln alle Grundlagen gelegt haben, die zur Bearbeitung des Problems der optimalen Materialausrichtung orthotroper Materialien benötigt werden, wollen wir uns in diesem Kapitel mit der theoretischen Aufarbeitung der Thematik befassen. In Kapitel 3.1 präzisieren wir das Optimierungsproblem der minimalen Nachgiebigkeit auf unsere Anwendung für eine Flugzeugtragfläche. Neben dem Zielfunktional und den einzuhaltenden Nebenbedingungen werden auch Zustands- und Steuerungsraum angegeben, die eine schlüssige mathematische Bearbeitung ermöglichen.

In Kapitel 3.2 wenden wir die allgemeinen Resultate zur Optimierung in Banachräumen aus Kapitel 2.2 auf das gegebene Anwendungsproblem an. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse liefern zum einen das nötige Werkzeug zur Implementierung erster einfacher gradientenbasierter Optimierungsverfahren. Zum anderen wird die Angabe der Sensitivitäten des reduzierten Problems bezüglich der Steuerung ein nützliches Maß zur Überprüfung von Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für spätere Verfahren liefern.

Schließlich werden wir in Kapitel 3.3 eine neue Methode zur Behandlung des vorliegenden Problems vorstellen. Bei dieser Methode handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Methoden zur Bearbeitung der Problemstellung im zweidimensionalen Fall auf den hier untersuchten dreidimensionalen Fall. Neben der Minimierung der Nachgiebigkeit werden ebenfalls die Behandlung von Mehrlastfällen und ein Verfahren zur Glättung der numerischen Ergebnisse entwickelt.

3.1 Das Optimierungsproblem zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Materialausrichtung eines orthotropen Materials in einer Schalenkonstruktion punktweise derart zu wählen, dass ein möglichst „steifes“ Werkstück entsteht. Als lokale Größe zur Beschreibung der an einem Ort vorliegenden Verformungsenergie haben wir in Kapitel 2.3.3 die lokale Verzerrungsenergie w ausgemacht. Als zu minimierende Gesamtverformungsenergie wählen wir als Maß die sogenannte Nachgiebigkeit die wir durch

$$W := \int_{\Omega} w(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(x) \boldsymbol{\varepsilon}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) \, dx$$

definieren.

In diese Definition gehen über \mathbf{C} die zu optimierenden Materialeigenschaften, die räumlich variieren können, ein. Weiter geht über $\boldsymbol{\varepsilon}(u)$ der Verformungszustand in Form der Verschiebungen u ein. Dieser enthält wiederum implizit sowohl die auf den Körper wirkenden Kräfte und ist auch erneut von den Materialeigenschaften abhängig, da er sich als Lösung des in Kapitel 2.3.7 untersuchten Verschiebungs-Traktions-Problems ergibt.

Die freie Größe der Optimierung soll in der punktweisen Ausrichtung eines orthotropen Materials - etwa in Form von Fasern in einem Faserverbundstoff - in der Schale einer dreidimensionalen Schalenkonstruktion bestehen. In jedem Punkt der Schale ist eine Symmetrieachse des orthotropen Materialverhaltens bereits durch die Vorgabe der Schalenausrichtung fest vorgegeben. Diese ist in Form der Normalenrichtung der Schale in jedem Punkt verfügbar. In jedem Punkt verbleibt ein Freiheitsgrad, nämlich die Rotation der übrigen beiden Symmetrieebenen um die durch die Normalenrichtung in dem jeweiligen Punkt vorgegebene Achse. Diese Materialrotation kann in Form eines skalaren Feldes $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ angegeben werden.

Gemäß den Ergebnissen aus Kapitel 2.4.4 ergibt sich das Materialverhalten in Form des Elastizitätstensors \mathbf{C} dann punktweise durch eine Transformation in ein durch die Schale definiertes Koordinatensystem und anschließende Rotation dieses Koordinatensystems. Der Elastizitätstensor sei in seiner Darstellung bezüglich des durch die Orthotropieachsen vorgegebenen Koordinatensystems vorgegeben und mit \mathbf{C}^{mat} bezeichnet.

In einem ersten Schritt wird an jedem Materialpunkt $x \in \Omega$ ein Koordinatensystem vor-

3.1 Das Optimierungsproblem zur Minimierung der Nachgiebigkeit

gegeben, dessen dritte Achse der äußeren Normalenrichtung der Schalenkonstruktion an diesem Punkt entspricht. Die Transformation des Elastizitätstensors erfolgt nach (2.35) durch

$$\tilde{\mathbf{C}}(x) = \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)},$$

mit einem ortsabhängigen Koordinatensystem $\tilde{e}_j = \tilde{e}_j(x)$ ($j = 1, \dots, 3$).

In einem zweiten Schritt findet in jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Rotation um den Drehwinkel $\alpha(x)$ statt. Die zugehörige Transformation ergibt sich erneut nach (2.35) als

$$\mathbf{C}(x, \alpha) = \mathbf{T}_3^{\text{inv}}(\alpha(x)) \tilde{\mathbf{C}}(x) \mathbf{T}_3(\alpha(x)) = \mathbf{T}_3^{\text{inv}}(\alpha(x)) \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)} \mathbf{T}_3(\alpha(x)).$$

Zur abkürzenden Notation definieren wir die Gesamttransformationstensoren

$$\mathbf{T}(x, \alpha) := \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)} \mathbf{T}_3(\alpha(x)) \text{ und } \mathbf{T}^{\text{inv}}(x, \alpha) := \mathbf{T}_3^{\text{inv}}(\alpha(x)) \mathbf{T}_{\tilde{e}_j(x)}^{\text{inv}}.$$

Als Raum der zulässigen Steuerungen wählen wir den Banachraum $L^\infty(\Omega)$. Diese Wahl treffen wir aus zwei Gründen. Gemäß Kapitel 2.4.6 bleiben die erforderlichen Eigenschaften des Elastizitätstensors \mathbf{C} , wie Elliptizität oder Symmetrien für beliebige endliche Drehwinkelwerte α erhalten. Solange Messbarkeitsvoraussetzungen erfüllt bleiben und die Materialeigenschaften punktweise fast sicher wohldefiniert sind, sind keine weiteren Regularitätsanforderungen notwendig. Auch starke Ausreißer mit hohen Werten von $|\alpha|$ sind unproblematisch, da aufgrund der Orthotropieeigenschaften ein periodisches Verhalten mit der Periodenlänge von 180° vorliegt. Der zweite Grund für die Wahl des Steuerungsraums $L^\infty(\Omega)$ besteht darin, dass die in den Transformationen der Materialeigenschaften auftauchenden trigonometrischen Terme dort im Gegensatz zu jedem Raum $L^p(\Omega)$ mit $p < \infty$ differenzierbar sind (vgl. [28] Kapitel 20.3).

Wie haben nun alle erforderlichen Vorarbeiten getroffen, um das Optimierungsproblem der minimalen Nachgiebigkeit einer Schalenkonstruktion aus orthotropem Material zu formulieren. Hierzu betrachten wir die Abbildungen

$$\mathbf{C} : \Omega \times L^\infty(\Omega), (x, \alpha) \mapsto \mathbf{T}^{\text{inv}}(x, \alpha) \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}(x, \alpha)$$

und

$$J : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \times L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, (u, \alpha) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(x, \alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

und formulieren für $f \in L^2(\Gamma_N)^3$ und $g \in L^2(\Omega)^3$ das Minimierungsproblem

$$\min_{\alpha \in L^\infty(\Omega)} J(u, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(x, \alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \quad (3.1)$$

$$\text{unter } \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbf{C}(x, \alpha) \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} v(x) \cdot f(x) \, ds(x) \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3. \quad (3.2)$$

Aufgrund der geforderten Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors lässt sich die in der Problemformulierung auftauchende Bilinearform in den drei äquivalenten Formulierungen

$$\int_{\Omega} Dv : \mathbf{C}Du \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \mathbf{C}\varepsilon(u) \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon(v) \cdot C\varepsilon(u) \, dx$$

ausdrücken. Schließlich ist ebenfalls die Formulierung mittels der Spannungen und des Nachgiebigkeitstensors in den Formen

$$\int_{\Omega} \sigma : \mathbf{S}\sigma \, dx = \int_{\Omega} \sigma \cdot S\sigma \, dx$$

möglich. Wir wollen im Folgenden die im jeweiligen Kontext vorteilhafteste der äquivalenten Formulierungen wählen.

3.2 Gradientenbasierte Optimierung - Adjungierte Methode

Ein im Kontext der optimalen Steuerung bei Differentialgleichungen generell einsetzbares Konzept besteht im sogenannten adjungierten Ansatz. Im endlichdimensionalen Fall der gleichungsbeschränkten Optimierung kann mittels Lagrange-Multiplikatoren und einer Lagrange-Funktion die Lösung des gleichungsbeschränkten Problems unter günstigen Bedingungen auf die Ermittlung von stationären Punkten der Lagrange-Funktion zurückgeführt werden. In Analogie zu den Lagrange-Multiplikatoren existiert im hier betrachteten unendlichdimensionalen Fall der sogenannte adjungierte Zustand, mittels dessen Sensitivitäten des Zielfunktional unter Einhaltung der Gleichungsnebenbedingung effizient bestimmt werden können.

Wir haben in Kapitel 2.2 bereits die hier benötigten Grundlagen zur Optimierung in Banachräumen zusammengetragen. Für einen weiterführenden Einblick in die entsprechenden theoretischen Grundlagen verweisen wir auf [26]. Zahlreiche Beispiele

werden ausführlich in [46] diskutiert. Ein umfassender Einblick in die numerische Behandlung von Optimierungsproblemen bei partiellen Differentialgleichungen wird in [7] gegeben.

Die adjungierte Methode ist grundsätzlich für eine Vielzahl unterschiedlicher Zielfunktionale und einzuhaltende Differentialgleichungen anwendbar. Forderungen sind lediglich an die hinreichende Glattheit der beteiligten Abbildungen und an die Wohlgestelltheit der Zuordnung von zulässigen Steuerungen auf zulässige Zustände zu stellen. Erweiterungen der hier untersuchten Problemklasse auf Fragestellungen mit Zustands- und Steuerungsbeschränkungen sind im Rahmen der Theorie der Optimierung in Banachräumen ebenfalls erfasst. Für Details hierzu wird auf die Literatur, etwa [26], verwiesen.

Wir wollen nun die in Kapitel 2.2 zusammengestellten Ergebnisse auf die zu untersuchende Anwendung der minimalen Nachgiebigkeit anwenden. Im Zusammenspiel des Zielfunktional der Nachgiebigkeit mit der einzuhaltenden Beschränkung der linearen Elastizität wird sich das Phänomen der Selbstadjungiertheit einstellen, bei dem sich für jede Steuerung und den zugehörigen Zustand der adjungierte Zustand in einfacher Weise aus dem Zustand ermitteln lässt. Zusätzlicher Aufwand in Form der Notwendigkeit des Lösen einer adjungierten Differentialgleichung entfällt hierdurch.

3.2.1 Selbstadjungiertheit der Nachgiebigkeit

Als gleichungsbeschränktes Optimierungsproblem im Banachraum gemäß (2.1)-(2.2) betrachten wir nun konkret das Problem der minimalen Nachgiebigkeit unter Einhaltung der Gleichungen der schwachen Formulierung der linearen Elastizität.

Das Optimierungsproblem ergibt sich somit als

$$\min_{u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3, \alpha \in L^\infty(\Omega)} J(u, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(x, \alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx$$

$$\text{unter } c(u, \alpha) = \mathbf{a}^{\mathbf{C}(\alpha)}(u, \cdot) - \langle l, \cdot \rangle = 0 \in \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \right)^*$$

mit

$$\mathbf{a}^{\mathbf{C}(\alpha)}(u, \cdot) : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{C}(x, \alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

gemäß Satz 2.38 und

$$\langle l, \cdot \rangle : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \int_{\Omega} g(x) \cdot v(x) \, dx + \int_{\Gamma_N} f(x) \cdot v(x) \, ds(x).$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Die nachfolgenden Überlegungen sind zunächst unabhängig von der konkreten Gestalt der Abbildung

$$\alpha \mapsto \mathbf{C}(\alpha) := \mathbf{C}(\cdot, \alpha)$$

gültig. Wir setzen lediglich hinreichende Differenzierbarkeit der Abbildung voraus, damit alle formulierten Ableitungen wohldefiniert sind. Im Teil 3.2.3 werden wir speziellere Aussagen für das konkret untersuchte Anwendungsbeispiel treffen.

Nach Satz 2.41 definiert die Bedingung $c(u, \alpha) = 0$ für jede Steuerung $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ einen eindeutigen Zustand $u = u(\alpha)$, weshalb sich das betrachtete Optimierungsproblem in seiner reduzierten Darstellung als

$$\min_{\alpha \in L^\infty(\Omega)} \hat{J}(\alpha) := J(u(\alpha), \alpha) \quad (3.3)$$

darstellen lässt. Unser nächstes Ziel soll die Bestimmung der Frechet-Ableitung $\hat{J}'(\alpha)$ des reduzierten Zielfunktional gemäß Satz 2.35 sein. Hierfür müssen zunächst die benötigten partiellen Ableitungen der Funktionen J und c berechnet werden.

Satz 3.1: 1. Für die partiellen Ableitungen des Zielfunktional J gilt

a) $\frac{\partial J}{\partial u}(u, \alpha) : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{C}(\alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(h) \, dx$

b) $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(u, \alpha) : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx.$

2. Für die partiellen Ableitungen der Gleichungsbeschränkung c gilt

a) $\frac{\partial c}{\partial u}(u, \alpha) : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \rightarrow \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3\right)^*, h \mapsto a^{\mathbf{C}(\alpha)}(h, \cdot)$

b) $\frac{\partial c}{\partial \alpha}(u, \alpha) : L^\infty(\Omega) \rightarrow \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d\right)^*, h \mapsto a^{\partial \alpha, h}(u, \cdot)$
mit $a^{\partial \alpha, h}(u, \cdot) : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx.$

Beweis. 1. a) Für das Zielfunktional J gilt

$$J(u, \alpha) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)}$ das Skalarprodukt auf $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ gemäß Satz 2.38 ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} J(u+h, \alpha) &= \frac{1}{2} \langle u+h, u+h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \langle u, u \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} + \langle u, h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} + \frac{1}{2} \langle h, h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)}. \end{aligned}$$

3.2 Gradientenbasierte Optimierung - Adjungierte Methode

Für den dritten Summanden gilt

$$\frac{1}{2} \langle h, h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} = \frac{1}{2} \|h\|_{\mathbf{C}(\alpha)}^2$$

und schließlich gilt

$$\frac{\frac{1}{2} \|h\|_{\mathbf{C}(\alpha)}^2}{\|h\|_{\mathbf{C}(\alpha)}} \rightarrow 0$$

für $\|h\|_{\mathbf{C}(\alpha)} \rightarrow 0$.

- b) Wir betrachten das Zielfunktional J für festes $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ und somit nur in Abhängigkeit von $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ und definieren hierzu

$$J^u := J(u, \cdot) : \alpha \mapsto J(u, \alpha).$$

J^u lässt sich als Komposition der beiden Abbildungen

$$\varphi : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)^{d \times d \times d \times d}, \alpha \mapsto \mathbf{C}(\alpha)$$

und

$$\psi^u : L^\infty(\Omega)^{d \times d \times d \times d} \rightarrow \mathbb{R}, \zeta \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx$$

in der Form $J^u(\alpha) = \psi^u(\varphi(\alpha))$ darstellen. Die Abbildung ψ^u ist als Komposition linearer, stetiger Abbildungen ebenfalls linear und stetig wodurch sich für die Frechet-Ableitung der Abbildung J^u nach Bemerkung 2.9

$$(J^u)'(\alpha) : h \mapsto \psi^u(\varphi'(\alpha)[h])$$

ergibt. Rückeinsetzen der Funktionsvorschriften ψ^u und φ liefert die Aussage.

2. a) Es gilt

$$c(u, \alpha) = a^{\mathbf{C}(\alpha)}(u, \cdot) - \langle l, \cdot \rangle$$

wobei der erste Summand linear in u und der zweite Summand unabhängig von u ist. Für die Ableitung gilt somit nach Bemerkung 2.7

$$\frac{\partial}{\partial u} c(u, \alpha)[h] = \frac{\partial}{\partial u} a^{\mathbf{C}(\alpha)}(u, \cdot)[h] = a^{\mathbf{C}(\alpha)}(h, \cdot).$$

- b) Es gilt erneut

$$c(u, \alpha) = a^{\mathbf{C}(\alpha)}(u, \cdot) - \langle l, \cdot \rangle$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

und der zweite Summand ist auch unabhängig von α woraus

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} a^{c(\alpha)}(u, \cdot)$$

folgt. Analog zum Beweis von 1b) lässt sich

$$a^{c(\alpha)}(u, \cdot) : v \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{C}(\alpha) \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

als Komposition

$$v \mapsto \psi^{u,v}(\varphi(\alpha))$$

mit

$$\varphi : L^{\infty}(\Omega) \rightarrow L^{\infty}(\Omega)^{3 \times 3 \times 3 \times 3}, \alpha \mapsto \mathbf{C}(\alpha)$$

und

$$\psi^{u,v} : L^{\infty}(\Omega)^{3 \times 3 \times 3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \zeta \mapsto \int_{\Omega} \zeta \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

schreiben. Auch die Abbildung $\psi^{u,v}$ ist linear in ζ und somit folgt die Aussage wie in 1b).

□

Satz 3.2 (Selbstadjungiertheit der Nachgiebigkeit): Sei $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ eine Steuerung für das reduzierte Problem (3.3) und $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ der zugehörige Zustand. Dann ist der zu α und u gehörige adjungierte Zustand gegeben durch

$$p : \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \right)^* \rightarrow \mathbb{R}, h^* \mapsto h^*(-u).$$

Beweis. Wir betrachten die Gleichungsnebenbedingung

$$c : H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \times L^{\infty}(\Omega) \rightarrow \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \right)^*.$$

Im Dualraum des Zielraums ist der adjungierte Zustand zu suchen. Es gilt somit

$$p \in \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \right)^{**},$$

wobei $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$ mittels $\langle \cdot, \cdot \rangle_{c(\alpha)}$ ein Hilbertraum ist.

Nach Definition gilt für p

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} c(u, \alpha) \right)^{\text{ad}}(p) = - \frac{\partial}{\partial u} J(u, \alpha)$$

und somit für beliebiges $h \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial u} c(u, \alpha)[h] \right) = - \frac{\partial}{\partial u} J(u, \alpha)[h].$$

Einsetzen von Satz 3.1 liefert

$$\rho \left(\langle h, \cdot \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} \right) = - \langle u, h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} \quad \forall h \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3.$$

In seiner Schreibweise als duale Paarung gilt für den rechten Teil

$$- \langle u, h \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)} = \langle \langle h, \cdot \rangle_{\mathbf{C}(\alpha)}, -u \rangle \quad \forall h \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$$

woraus mit dem Rieszischen Darstellungssatz 2.12

$$\rho(h^*) = h^*(-u) \quad \forall h^* \in \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3 \right)^*$$

folgt. □

3.2.2 Bestimmung des reduzierten Gradienten

Satz 3.3: Für eine Steuerung $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ gilt für die Frechet-Ableitung des reduzierten Problems (3.3)

$$\hat{J}'(\alpha)[h] = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \quad \forall h \in L^\infty(\Omega)$$

wobei u den der Steuerung α zugehörigen Zustand bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten den der Steuerung α zugehörigen Zustand $u = u(\alpha)$, sowie den zu α und u gehörigen adjungierten Zustand p . Nach Satz 2.35 gilt

$$\hat{J}'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(u, \alpha) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha) \right)^{\text{ad}}(p). \quad (3.4)$$

Für beliebiges $h \in L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha) \right)^{\text{ad}}(p), h \right\rangle = \rho \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha)[h] \right)$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Einsetzen von Satz 3.1 und Satz 3.2 ergibt

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha)[h] \right) = \rho \left(\int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(\cdot) \, dx \right) = - \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx$$

woraus mit (3.4) und erneut Satz 3.1 schließlich

$$\begin{aligned} \hat{J}'(\alpha)[h] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J(u, \alpha)[h] + \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} c(u, \alpha) \right)^{\text{ad}}(\rho), h \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{C}'(\alpha)[h] \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \end{aligned}$$

und damit die Behauptung folgt. \square

3.2.3 Anwendung

Wir wollen nun die oben allgemein erarbeiteten Aussagen auf die konkrete Problemstellung anwenden. Die zulässigen Materialausrichtungen werden in unserem Anwendungsfall durch Rotationen um die Normalenrichtung einer Schalenkonstruktion beschrieben. Von besonderem Interesse ist die Transformation der Materialeigenschaften in Form des Elastizitätstensors von seiner Darstellung \mathbf{C}^{mat} bezüglich des in der Schale rotierten Koordinatensystems, zurück in seine Darstellung bezüglich des globalen Referenzkoordinatensystem e_i ($i = 1, \dots, 3$). Für jeden Punkt $x \in \Omega$ der Schalenkonstruktion sei durch $\tilde{e}_i(x)$ ($i = 1, \dots, 3$) ein Koordinatensystem definiert, dessen dritte Achse $\tilde{e}_3(x)$ mit der Normalenrichtung der Schalenkonstruktion zusammenfällt. Die Gesamttransformation des rotierten Koordinatensystems aus dem Referenzkoordinatensystem e_i ($i = 1, \dots, 3$) ergibt sich somit aus der Nacheinanderausführung der Transformation auf das Schalenkoordinatensystem $\tilde{e}_i(x)$ ($i = 1, \dots, 3$) mittels $\mathbf{T}_{\tilde{e}_i(x)}$ gemäß A.3.4 und eine Rotation um die dritte Achse mit einem ebenfalls ortsabhängigen Winkelfeld $\alpha(x)$ mittels $\mathbf{T}_3(\alpha(x))$ gemäß A.3.3.

Satz 3.4: Für die Sensitivität des Elastizitätstensors \mathbf{C} in Abhängigkeit vom Drehwinkel α gilt

$$\mathbf{C}'(\alpha)[h](x) = \mathbf{C}^{\#}(\alpha, x)h(x) \quad \forall h \in L^{\infty}(\Omega), x \in \Omega$$

mit

$$\mathbf{C}^{\#}(\alpha, x) = \left(\mathbf{T}_3^{\text{inv}} \right)^{\#}(\alpha(x)) \mathbf{T}_{\tilde{e}_i(x)}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_i(x)} \mathbf{T}_3(\alpha(x)) + \mathbf{T}_3^{\text{inv}}(\alpha(x)) \mathbf{T}_{\tilde{e}_i(x)}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_i(x)} \mathbf{T}_3^{\#}(\alpha(x)),$$

wobei $\left(\mathbf{T}_3^{\text{inv}} \right)^{\#}$ und $\mathbf{T}_3^{\#}$ die komponentenweisen Ableitungen von $\mathbf{T}_3^{\text{inv}}$ und \mathbf{T}_3 gemäß

A.4.2 sind.

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus einer punkweisen Betrachtung für jeden Punkt $x \in \Omega$. Zum Nutzen der Übersichtlichkeit wird die explizite Angabe der Ortsabhängigkeit weitestgehend weggelassen.

Der Elastizitätstensor ist durch seine Darstellung \mathbf{C}^{mat} bezüglich des durch die Symmetrieachsen des Materials definierten Koordinatensystems gegeben. Diese Darstellung wird in ein rotiertes Koordinatensystem transformiert, dessen Ausrichtung sich in zwei Schritten ergibt.

Für die Frechet-Ableitung $\mathbf{C}'(\alpha)$ ergibt sich nach der Produktregel 2.11 und nach 2.9 als

$$\mathbf{C}(\alpha) = \left(\mathbf{T}_3^{\text{inv}} \right)'(\alpha) \mathbf{T}_{\tilde{e}_i}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_i} \mathbf{T}_3(\alpha) + \mathbf{T}_3^{\text{inv}}(\alpha) \mathbf{T}_{\tilde{e}_i}^{\text{inv}} \mathbf{C}^{\text{mat}} \mathbf{T}_{\tilde{e}_i} \mathbf{T}_3'(\alpha).$$

Die Aussage folgt dann nach A.4.2. □

Für die Berechnung der Frechet-Ableitung des reduzierten Problems (3.3) und insbesondere für die Berechnung von $\mathbf{C}'(\alpha)$ ist es essentiell, dass als Raum der zulässigen Steuerungen der Grundraum $L^\infty(\Omega)$ gewählt wird, da die auftretenden trigonometrischen Funktionen als Abbildungen auf den Räumen $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$ nicht differenzierbar sind. Da es sich beim Raum $L^\infty(\Omega)$ um keinen Hilbertraum handelt, existiert in diesem kein Skalarprodukt welches die Definition eines Gradienten zur Konstruktion eines Verfahrens des steilsten Abstiegs ermöglicht. Durch die spezielle Struktur der Frechet-Ableitung $\hat{\mathcal{J}}'(\alpha)[h]$ lassen sich jedoch die benötigten Gradienten-Eigenschaften vom Raum $L^2(\Omega)$ in den Raum $L^\infty(\Omega)$ wie folgt herüberretten.

Satz 3.5: Für das reduzierte Problem (3.3) ist durch

$$\hat{h} : x \mapsto \frac{1}{2} \mathbf{C}^\#(\alpha, x) Du(x) : Du(x)$$

die Richtung des steilsten Abstiegs im Sinne

$$\hat{h} = \underset{\|h\|_{L^2(\Omega)} = \|\hat{h}\|_{L^2(\Omega)}}{\text{argmin}} \hat{\mathcal{J}}'(\alpha)[h]$$

gegeben.

Beweis. Zunächst gilt für ein beschränktes Gebiet Ω , dass $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, weswegen alle auftauchenden Skalarprodukte und Normen wohldefiniert sind. Nach Satz 3.3 und

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Satz 3.4 gilt

$$\hat{J}'(\alpha)[h] = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathbf{C}^{\#}(\alpha, x) h(x) \right) Du(x) : Du(x) \, dx$$

was sich in Form des Skalarproduktes im Raum $L^2(\Omega)$ als

$$\hat{J}'(\alpha)[h] = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{C}^{\#}(\alpha, x) Du(x) : Du(x) \right) h(x) \, dx = -\langle \hat{h}, h \rangle_{L^2(\Omega)}$$

darstellen lässt. Sei nun $\tilde{h} \in L^{\infty}(\Omega)$ derart gewählt, dass

$$\langle \hat{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ und } \|\tilde{h}\|_{L^2} = \|\hat{h}\|_{L^2}$$

gilt. Unter der Annahme $\hat{h} \neq \tilde{h}$ gilt dann

$$0 < \|\tilde{h} - \hat{h}\|_{L^2(\Omega)} = \langle \tilde{h} - \hat{h}, \tilde{h} - \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\Omega)} - 2\langle \tilde{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)},$$

woraus

$$2\langle \tilde{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} < \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} = \|\tilde{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\|\hat{h}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und somit ein Widerspruch zu $\langle \hat{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)}$ folgt.

Daraus folgt

$$\langle \hat{h}, h \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall h \in L^{\infty}(\Omega) \text{ mit } \|h\|_{L^2(\Omega)} = \|\hat{h}\|_{L^2(\Omega)}$$

und schließlich

$$\hat{J}'(\alpha)[\hat{h}] \leq \hat{J}'(\alpha)[h] \quad \forall h \in L^{\infty}(\Omega) \text{ mit } \|h\|_{L^2(\Omega)} = \|\hat{h}\|_{L^2(\Omega)}$$

und somit die Aussage. □

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

Die Ergebnisse des vorausgegangenen Kapitels sind grundsätzlich für beliebige hinreichend glatte Problemstellungen anwendbar. Durch die Selbstadjungiertheit des betrachteten Problems entfällt hier sogar die Notwendigkeit des Lösen einer adjungierten Differentialgleichung, was den Berechnungsaufwand gegenüber allgemeinerer Problemstellungen deutlich reduziert. Die numerischen Betrachtungen in Kapitel 4.3

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

werden jedoch zeigen, dass gradientenbasierte Verfahren für das untersuchte Problem keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern. Gründe hierfür liegen zum einen in der Existenz zahlreicher lokaler Extrema und zum anderen in der bei der hier betrachteten Anwendung lokal sehr stark variierenden Verzerrungsenergiedichte, die zu lokal ebenfalls sehr stark variierenden Gradientenbeiträgen führt und eine effiziente Schrittweitsuche für gradientenbasierte Verfahren erschwert.

Zusätzliche Erkenntnisse liefert die Analyse der lokalen Zusammenhänge zwischen Materialeigenschaften, Spannungen, Verzerrungen und der Verzerrungsenergiedichte in jedem einzelnen Punkt des zu untersuchenden Körpers. In der Literatur finden sich seit den 1980er Jahren zahlreiche Veröffentlichungen die sich der Frage der optimalen Ausrichtung orthotroper Materialien zur Minimierung der Nachgiebigkeit widmen, auf die wir kurz zusammenfassend eingehen. Im Rahmen der zweidimensionalen Theorie liegen weitreichende Ergebnisse zur Charakterisierung und Bestimmung von optimalen Materialorientierungen vor. Ausgehend von der Annahme eines konstanten Feldes von Verzerrungen gelang es Banichuk 1979 [4] für dieses Verzerrungsfeld optimale Materialausrichtungen für orthotrope Materialien anzugeben. Dieselben Ergebnisse hat Pedersen ab 1989 [37, 38, 39] unabhängig davon hergeleitet. Die zentralen Erkenntnisse dabei sind, dass für optimale Materialausrichtungen die Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsrichtungen zusammenfallen. Für Materialien mit sogenannter niedriger relativer Schersteifigkeit fallen die Orthotropieachsen ebenfalls mit dieser Ausrichtung zusammen. Für sämtliche Materialien sind globale und lokale Extrema in Form von Drehwinkeln zwischen Materialausrichtung und Hauptverzerrungsrichtungen analytisch bestimmt und angegeben. Diaz und Bendsøe [15] leiteten 1992 die entsprechenden Ergebnisse ausgehend von einem als konstant angesehenen Spannungsfeld her, wobei auch Mehrlastfälle in Form einer gewichteten Summe von Einzellastfällen betrachtet wurden. Diese beiden grundsätzlichen Ansätze werden in der Literatur als verzerrungsbasierte (strain based) bzw. spannungsbasierte (stress based) Methode bezeichnet. Beide Ansätze haben als Gemeinsamkeit, dass jeweils durch die als konstant angenommenen Verzerrungen bzw. Spannungen das Referenzkoordinatensystem definiert wird, bezüglich dessen die optimalen Drehwinkel angegeben werden. Hiervon trennten sich 1994 Cheng et al. [10]. Durch die Darstellung aller betrachteten Größen in einem globalen Koordinatensystem kann zum einen auch die Verzerrungsmethode zur Untersuchung von Mehrlastfällen herangezogen werden und zum anderen kann das Verfahren analog auf die Optimierung von Eigenfrequenzen angewendet werden. Ein weiteres Resultat von [10] ist, dass die Spannungsmethode in iterativer Umsetzung für die dort untersuchten Anwendungen numerisch stabilerer Ergebnisse erzielt als die Verzerrungsmethode.

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Sowohl die Spannungs- als auch die Verzerrungsmethode vernachlässigen den impliziten Einfluss, den eine lokale Änderung der Materialausrichtung nicht nur auf die lokalen sondern auch auf die globalen Spannungen und Verzerrungen nach sich zieht. Zwar gelang es Setoodeh et al. [44] zu zeigen, dass für die Spannungsmethode eine punktweise Minimierung der Verzerrungsenergiegedichte äquivalent zur Ausgangsproblem der Minimierung der Nachgiebigkeit ist, eine umfassende mathematische Klärung des Sachverhaltes ist nach bestem Wissen des Autors jedoch noch ausstehend. Luo und Gea [30] stellten 1998 mit der sogenannten energiebasierten (energy based) Methode eine Verallgemeinerung von Spannungs- und Verzerrungsmethode vor, bei der mittels eines zunächst zu bestimmenden Energiefaktors eine damit gewichtete Summe aus Verzerrungen und Spannungen als konstant angenommen wird. Die Herleitung dieser Methode gibt Einblicke in die unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen von als fest angenommenen Spannungen bzw. Verzerrungen, die numerischen Ergebnisse der energiebasierten Methode stimmen jedoch für die in [30] untersuchten Beispiele weitestgehend mit denen der Spannungsmethode überein.

Bei allen im Vorausgehenden betrachteten Verfahren handelt es sich um Optimierungsverfahren die auf einem zweidimensionalen Elastizitätsmodell beruhen. Cowin [12] zeigte 1994, dass auch im dreidimensionalen Fall zusammenfallende Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsrichtungen notwendig für eine Maximierung oder Minimierung der Nachgiebigkeit sind und es gelang ihm die optimalen Materialausrichtungen für wenige spezielle Spannungsfelder und Materialien anzugeben. Die allgemeine Lösung des dreidimensionalen Problems ist nach bestem Wissen des Autors bislang ungelöst. Wir wollen nun eine neue Verallgemeinerung der skizzierten zweidimensionalen Spannungs- und Verzerrungsmethode herleiten, die die bekannten Ergebnisse auf den Fall der dreidimensionalen linearisierten Elastizität überträgt. Während für das Elastizitätsverhalten das volle dreidimensionale Verhalten herangezogen wird, bleibt die zu optimierende Steuerungsgröße weiterhin auf einen einfachen Drehwinkel in einer zuvor festgelegten Ebene beschränkt. Diese Ebene ist jedoch in jedem Punkt des zu optimierenden Körpers frei wählbar. In natürlicher Weise existiert eine solche punktweise vorgegebene Ebene mit der Schalenmittelfläche einer Schalenkonstruktion. Neben der Verallgemeinerung der bekannten Verfahren auf den dreidimensionalen Fall, bei der auch die Möglichkeit der Behandlung von Mehrlastfällen erhalten bleibt, werden wir außerdem ein Verfahren zur Glättung der entstehenden Drehwinkelfelder entwickeln, dass sich nahtlos in die entwickelte Theorie eingliedert. Das hergeleitete dreidimensionale Verfahren fällt unter Vernachlässigung der Größen in der zur Drehebene orthogonalen Richtung auf die Spannungsmethode bzw. die Verzerrungsmethode im zweidimensionalen Fall zurück.

3.3.1 Optimale Materialausrichtung für gegebene Spannungen

Wir wollen in diesem Kapitel, in Analogie zur Spannungsmethode im zweidimensionalen Fall, Optimalitätsbedingungen an das Drehwinkelfeld α für ein im Ort variierendes, aber an jedem Punkt als konstant angenommenes, Spannungsfeld $\sigma(x)$ herleiten. Nach der Problemstellung ist der einzige Freiheitsgrad der Materialausrichtung ein Drehwinkel α , mit dem die Faserausrichtung um eine Drehachse, die durch die äußere Normale der Schalenkonstruktion definiert ist, gedreht wird. Wir gehen davon aus, dass die Spannungen punktweise jeweils bezüglich eines Koordinatensystems gegeben sind, dessen dritte Achse mit der äußeren Normalen der Schalenkonstruktion an diesem Punkt zusammenfallen. Wir bezeichnen dieses ortsabhängige Koordinatensystem als (unrotiertes) Schalenkoordinatensystem.

Sei

$$\hat{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$$

das vorgegebene Spannungsfeld in Voigt-Notation, in seiner Darstellung bezüglich des Schalenkoordinatensystems. Über die in der Nachgiebigkeitsmatrix S enthaltenen Materialeigenschaften ist dem Spannungszustand mit $\epsilon = S\sigma$ ein eindeutiger Verzerrungszustand $\epsilon \in \mathbb{R}^6$ zugeordnet. Die Nachgiebigkeitsmatrix für ein orthotropes Material liegt für gewöhnlich in ihrer Darstellung $\overset{\text{mat}}{S}$ bezüglich des durch die Orthotropieachsen definierten Koordinatensystems vor, und nimmt dann die in Kapitel 2.4.5 beschriebene Gestalt an. Die Darstellungen der betrachteten Größen lassen sich gemäß den Resultaten aus Kapitel 2.4.4 zwischen Referenz- und Materialkoordinatensystem transformieren. In dem gerade betrachteten Fall, in dem lediglich eine Materialdrehung um die dritte Achse zulässig ist, ist die zugrunde liegende Transformationsmatrix T als $T_3(\alpha)$ gemäß A.3.5 durch

$$T_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Nachgiebigkeitsmatrix in ihrer Darstellung bezüglich des Referenzkoordinatensystems ergibt sich nach (2.37)-(2.38) und (2.42) in Abhängigkeit vom Drehwinkel α als

$$S(\alpha) = \overset{s \leftarrow m}{T_\epsilon}(\alpha) \overset{\text{mat } m \leftarrow s}{S} \overset{\text{mat}}{T_\sigma}(\alpha) = R T_3(\alpha)^{\text{inv}} R^{-1} \overset{\text{mat}}{S} T_3(\alpha) = T_3(\alpha)^\top \overset{\text{mat}}{S} T_3(\alpha), \quad (3.5)$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

wobei α den Winkel beschreibt, um den die Orthotropieachsen, ausgehend vom Schalenkoordinatensystem, um die dritte Achse gedreht wurden.

Unser Ziel ist es, die Nachgiebigkeit der Schalenkonstruktion zu minimieren. Diese wird mittels der Gleichung

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \epsilon(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot S(\alpha(x)) \sigma(x) \, dx \quad (3.6)$$

ausgewertet. Wir wollen uns zunächst auf die punktweise Betrachtung zurückziehen.

Satz 3.6: Für ein als fest angenommenes Spannungsfeld $\hat{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ sei das skalare Feld $\hat{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ derart definiert, dass für alle $x \in \Omega$ und alle zulässigen Winkelfelder $\alpha \in U_{\text{ad}}$ und für die Abbildung

$$w : U_{\text{ad}} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, x) \mapsto \hat{\sigma}(x) \cdot S(\alpha(x)) \hat{\sigma}(x)$$

punktweise

$$w(\hat{\alpha}, x) \leq w(\alpha, x)$$

gelte. Dann gilt

$$W(\hat{\alpha}) \leq W(\alpha) \quad \forall \alpha \in U_{\text{ad}}.$$

Beweis. Für beliebiges $\alpha \in U_{\text{ad}}$ gilt nach Konstruktion von $\hat{\alpha}$

$$w(\hat{\alpha}, x) \leq w(\alpha, x) \quad \forall x \in \Omega$$

woraus

$$w(\alpha, x) - w(\hat{\alpha}, x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

folgt. Weiter gilt

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\alpha, x) \, dx \quad \text{und} \quad W(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\hat{\alpha}, x) \, dx$$

woraus mit der Monotonie und der Linearität des Integrals

$$W(\alpha) - W(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\alpha, x) - w(\hat{\alpha}, x) \, dx \geq 0$$

und somit die Behauptung folgt. □

In Satz 3.6 wurde die Existenz des optimalen Winkelfeldes $\hat{\alpha}$ stillschweigend voraus-

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

gesetzt. Durch die punktweise Definition lässt sich wie folgt die Existenz begründen und der zulässige Raum U_{ad} ohne Einschränkung konkretisieren.

Satz 3.7: 1. Für die Verzerrungsenergiedichte w existieren skalare Felder $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1$ und \tilde{b}_2 unabhängig von α , sodass

$$w(\alpha, x) = \tilde{a}_0(x) + \tilde{a}_1(x) \sin(2\alpha(x)) + \tilde{a}_2(x) \sin(4\alpha(x)) \\ + \tilde{b}_1(x) \cos(2\alpha(x)) + \tilde{b}_2(x) \cos(4\alpha(x))$$

gilt.

2. Für jedes $\alpha \in U_{ad}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\alpha(x) \in [0, \pi) \quad \forall x \in \Omega$$

gilt.

3. Es existiert ein $\hat{\alpha} \in U_{ad}$ für das

$$w(\hat{\alpha}, x) \leq w(\alpha, x) \quad \forall \alpha \in U_{ad}, \forall x \in \Omega$$

gilt.

Beweis. 1. Einsetzen von (3.5) in (3.6) und anschließendes Ausmultiplizieren und Vereinfachen unter Ausnutzung der trigonometrischen Additionstheoreme liefert die Aussage für

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(x) &= (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}) \left(\frac{3}{8} \hat{\sigma}_1^2 + \frac{3}{8} \hat{\sigma}_2^2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_6^2 + \frac{1}{4} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \right) + \mathbf{S}_{33} \hat{\sigma}_3^2 + \\ &+ (\mathbf{S}_{44} + \mathbf{S}_{55}) \left(\frac{1}{2} \hat{\sigma}_4^2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_5^2 \right) + \mathbf{S}_{66} \left(\frac{1}{8} \hat{\sigma}_1^2 + \frac{1}{8} \hat{\sigma}_2^2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_6^2 - \frac{1}{4} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \right) + \\ &+ \mathbf{S}_{12} \left(\frac{1}{4} \hat{\sigma}_1^2 + \frac{1}{4} \hat{\sigma}_2^2 - \hat{\sigma}_6^2 + \frac{3}{2} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \right) + (\mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{23}) (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3) \\ \tilde{a}_1(x) &= (\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22}) (\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2) \hat{\sigma}_6 + 2(\mathbf{S}_{13} - \mathbf{S}_{23}) \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_6 + (\mathbf{S}_{55} - \mathbf{S}_{44}) \hat{\sigma}_4 \hat{\sigma}_5 \\ \tilde{a}_2(x) &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}) - \mathbf{S}_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{66} (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) \hat{\sigma}_6 \\ \tilde{b}_1(x) &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22}) (\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{44} - \mathbf{S}_{55}) (\hat{\sigma}_4^2 - \hat{\sigma}_5^2) + \\ &+ (\mathbf{S}_{13} - \mathbf{S}_{23}) (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) \hat{\sigma}_3 \\ \tilde{b}_2(x) &= (\hat{\sigma}_6^2 - \frac{1}{4} (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)^2) \left(\mathbf{S}_{12} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{66} - \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}) \right). \end{aligned}$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Die Verifikation der Rechnung ist mittels A.5.1 gewährleistet. Auf die explizite Ausformulierung der Ortsabhängigkeit der $\hat{\sigma}_i(x)$ wurde zur Wahrung einer Restübersichtlichkeit verzichtet.

2. Die Abbildung w lässt sich gemäß 1. als Linearkombination von $\sin(2\alpha)$, $\sin(4\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\cos(4\alpha)$ sowie eines in α konstanten Summanden darstellen. Alle diese Summanden haben eine Periodenlänge von π , sodass ohne Veränderung des Wertes $w(\alpha, x)$ stets von $\alpha \in U_{\text{ad}}$ auf

$$\tilde{\alpha} : \Omega \rightarrow [0, \pi), x \mapsto \alpha(x) - \left\lfloor \frac{\alpha(x)}{\pi} \right\rfloor \pi$$

übergegangen werden kann, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ das ganzzahlige Abrunden kennzeichnet. Die zur Zugehörigkeit zu $L^\infty(\Omega)$ erforderlichen Messbarkeitseigenschaften bleiben hierdurch unberührt.

3. Nach 1. und 2. ergibt sich $\hat{\alpha}(x)$ punktweise als

$$\underset{\alpha \in [0, 2\pi)}{\operatorname{argmin}} \tilde{w}(\alpha, x)$$

mit

$$\tilde{w}(\alpha, x) = \tilde{a}_0(x) + \tilde{a}_1(x) \sin(2\alpha) + \tilde{a}_2(x) \sin(4\alpha) + \tilde{b}_1(x) \cos(2\alpha) + \tilde{b}_2(x) \cos(4\alpha).$$

Die Abbildung ist stetig in α und kann aufgrund ihrer Periodizität mittels

$$\tilde{w}(\pi, x) := \tilde{w}(0, x) \quad \forall x \in \Omega$$

stetig auf das kompakte Intervall $[0, \pi]$ fortgesetzt werden, auf dem sie als stetige Funktion ihr Minimum annehmen muss. Wegen $\tilde{w}(\pi) = \tilde{w}(0)$ nimmt sie ihr Minimum auch auf $[0, \pi)$ an.

□

Wir haben uns vergewissert, dass das Zielfunktional W unter der Annahme konstanter Spannungen durch punktweise Minimierung an jedem Punkt $x \in \Omega$ minimiert werden kann, und dass die entstehenden punktwweisen Minimierungsproblem jeweils lösbar sind. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Lösung dieser punktwweisen Optimierungsprobleme und definieren hierzu für jede Stelle $x \in \Omega$ und für das vorgegeben

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

Spannungsfeld $\hat{\sigma}$ das zu minimierende Funktional

$$p : [0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}, \alpha \mapsto \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sin(2\alpha) + \tilde{a}_2 \sin(4\alpha) + \tilde{b}_1 \cos(2\alpha) + \tilde{b}_2 \cos(4\alpha) \quad (3.7)$$

mit $\tilde{a}_i = \tilde{a}_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) und $\tilde{b}_i = \tilde{b}_i(x)$ ($i = 1, 2$) aus Satz 3.7. Zur Bestimmung der punktweise optimalen Drehwinkel wollen wir nun Optimalitätsbedingungen erster Ordnung in einer numerisch vorteilhaften Darstellung herleiten.

Satz 3.8: Für jede Extremstelle $\bar{\alpha}$ des Funktionals p aus (3.7) gilt

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \arg \bar{z},$$

wobei \bar{z} die Nullstellen eines geeigneten komplexen Polynoms

$$z \mapsto \sum_{k=-2}^2 c_k z^{k+2}$$

mit $|\bar{z}| = 1$ sind.

Beweis. Das Funktional p ist stetig und differenzierbar (auch auf einer offenen Obermenge von $[0, \pi)$). Die Extremstellen ergeben sich somit als die Nullstellen der Ableitung

$$p' : [0, \pi), \alpha \mapsto a_1 \sin(2\alpha) + a_2 \sin(4\alpha) + b_1 \cos(2\alpha) + b_2 \cos(4\alpha)$$

mit $a_1 := -2\tilde{b}_1$, $a_2 := -4\tilde{b}_2$, $b_1 := 2\tilde{a}_1$ und $b_2 := 4\tilde{a}_2$. Eine lineare Variablensubstitution mit $\beta := 2\alpha$ ergibt

$$q(\beta) := a_1 \sin(\beta) + a_2 \sin(2\beta) + b_1 \cos(\beta) + b_2 \cos(2\beta) \stackrel{!}{=} 0$$

mit $\beta \in [0, 2\pi)$. Nach der Eulerschen Formel lässt sich dies umformulieren zu

$$q(\beta) = a_1 \frac{\exp(i\beta) - \exp(i\beta)^{-1}}{2i} + a_2 \frac{\exp(i\beta)^2 - \exp(i\beta)^{-2}}{2i} + b_1 \frac{\exp(i\beta) + \exp(i\beta)^{-1}}{2} + b_2 \frac{\exp(i\beta)^2 + \exp(i\beta)^{-2}}{2}.$$

Eine erneute Substitution mit

$$[0, 2\pi) \rightarrow S^1, \beta \mapsto z := \exp(i\beta)$$

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

und Zusammenfassen gleicher Potenzen ergibt $q(\beta) = q_{\mathbb{C}}(z)$ mit

$$q_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{k=-2}^2 c_k z^k$$

wobei

$$c_0 = 0, c_k = \frac{b_k - ia_k}{2} \text{ und } c_{-k} = \frac{b_k + ia_k}{2} \quad (k = 1, 2). \quad (3.8)$$

Die gesuchten Extremalstellen von p entsprechen somit denjenigen Nullstellen der rationalen Funktion $q_{\mathbb{C}}$, die sich auf dem Rand des komplexen Einheitskreis S^1 befinden. Ein Erweitern von $q_{\mathbb{C}}$ mit z^2 ergibt das Polynom

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=-2}^2 c_k z^{k+2},$$

das außerhalb der Null dieselben Nullstellen besitzt.

Die Rücktransformation erfolgt über $\beta = \arg(z)$ und $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. □

Die Bestimmung der optimalen Materialausrichtung reduziert sich somit punktweise zur Bestimmung der Nullstellen eines komplexen Polynoms vierten Grades. Eine analytische Bestimmung dieser Wurzeln ist möglich. Bekannte Verfahren hierzu sind jedoch numerisch instabil (vgl. [25] Kap. 26.3.3.), weswegen wir in der numerischen Umsetzung stabilen iterativen Verfahren den Vorzug gewähren werden.

3.3.2 Mehrlastfälle

Wir untersuchen nun sogenannte Mehrlastfälle, bei denen für ein $n \in \mathbb{N}$ jeweils im Allgemeinen unterschiedliche Oberflächenkraftdichten

$$f^i : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \dots, n)$$

und Volumenkraftdichten

$$g^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \dots, n)$$

zu n unterschiedlichen Deformationen mit zugehörigen Spannungsfeldern

$$\sigma^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6 \quad (i = 1, \dots, n)$$

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

führen. Als zu minimierendes Zielfunktional betrachten wir eine gewichtete Summe der Nachgiebigkeiten der Einzellastfälle in der Form

$$W^{\Sigma}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \gamma_i W^i(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \gamma_i \int_{\Omega} \sigma^i(x) \cdot S(\alpha(x)) \sigma^i(x) \, dx \quad (3.9)$$

mit Gewichten $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$ ($i = 1, \dots, n$). Betrachten wir dabei erneut die Spannungsfelder σ^i ($i = 1, \dots, n$) als konstant unter Änderungen des Drehwinkelfeldes α , so sind die Ergebnisse des in Kapitel 3.3.1 beschriebenen Einzellastfalles in nachfolgender Form auf den Mehrlastfall übertragbar.

Satz 3.9: Für das Zielfunktional (3.9) des Mehrlastfalles gilt unter der Annahme, dass die zugehörigen Spannungsfelder unabhängig vom Drehwinkelfeld α konstant sind, dass sich das minimierende Winkelfeld punktweise als $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \arg(\bar{z})$ ergibt, wobei \bar{z} Nullstelle des komplexen Polynoms

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=-2}^2 \left[\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i c_k^i \right) z^{k+2} \right]$$

mit $|z| = 1$ ist. Die c_k^i ($i = 1, \dots, n$, $k = -2, \dots, 2$) ergeben sich dabei als die entsprechenden Koeffizienten der zugehörigen Einlastfalles gemäß (3.8).

Beweis. Analog zu Satz 3.6 besitzt das Problem

$$\min_{\alpha \in L^{\infty}(\Omega)} W^{\Sigma}(\alpha)$$

eine Lösung, die durch punktweise Minimierung von

$$w^{\Sigma}(\alpha, x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma^i(x) \cdot S(\alpha(x)) \sigma^i(x)$$

ermittelt werden kann. Wie in Satz 3.7 ergeben sich die einzelnen Summanden von w^{Σ} als

$$w^i(\alpha, x) = \gamma_i \left(\tilde{a}_0^i(x) + \tilde{a}_1^i(x) \sin(2\alpha(x)) + \tilde{a}_2^i(x) \sin(4\alpha(x)) + \tilde{b}_1^i(x) \cos(2\alpha(x)) + \tilde{b}_2^i(x) \cos(4\alpha(x)) \right),$$

wobei sich die Koeffizienten $\tilde{a}_k^i(x)$, $\tilde{b}_k^i(x)$ analog zum Einzellastfall aus Anteilen aus lokalen Spannungen $\sigma^i(x)$ des jeweiligen Lastfalls und aus für alle Lastfälle und an

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

jedem Ort identischen Materialeigenschaften aus $\overset{\text{mat}}{S}$ zusammensetzen. Damit ergibt sich punktweise das zu minimierende trigonometrische Polynom

$$p^\Sigma : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{a}_0^i \right) + \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{a}_1^i \right) \sin(2\alpha) + \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{a}_2^i \right) \sin(4\alpha) \\ + \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{b}_1^i \right) \cos(2\alpha) + \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{b}_2^i \right) \cos(4\alpha)$$

analog zu (3.7). Mit den Bezeichnungen

$$\tilde{a}_k^\Sigma := \sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{a}_k^i \quad (k = 0, \dots, 2) \quad \text{und} \quad \tilde{b}_k^\Sigma := \sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{b}_k^i \quad (k = 1, 2)$$

lässt sich nun Satz 3.8 auf

$$p^\Sigma(\alpha) = \tilde{a}_0^\Sigma + \tilde{a}_1^\Sigma \sin(2\alpha) + \tilde{a}_2^\Sigma \sin(4\alpha) + \tilde{b}_1^\Sigma \cos(2\alpha) + \tilde{b}_2^\Sigma \cos(4\alpha)$$

anwenden. Nach Differentiation und Setzen von

$$a_1^\Sigma := -2\tilde{b}_1^\Sigma, \quad a_2^\Sigma := -4\tilde{b}_2^\Sigma, \quad b_1 := 2\tilde{a}_1^\Sigma \quad \text{und} \quad b_2^\Sigma := 4\tilde{a}_2^\Sigma$$

ergeben sich die entsprechenden Koeffizienten als $c_0^\Sigma = 0$,

$$c_k^\Sigma = \frac{b_k^\Sigma - ia_k^\Sigma}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i b_k^i - i \sum_{i=1}^n \gamma_i a_k^i}{2} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{b_k^i - ia_k^i}{2} = \sum_{i=1}^n \gamma_i c_k^i \quad (k = 1, 2)$$

und analog

$$c_{-k}^\Sigma = \sum_{i=1}^n \gamma_i c_{-k}^i \quad (k = 1, 2)$$

mit c_k^i ($k = -2, \dots, 2$, $i = 1, \dots, n$) aus den jeweils zugehörigen Einzellastfällen, was der Behauptung entspricht. \square

3.3.3 Glättung

Aus verschiedenen Gründen kann es gewünscht oder erforderlich sein nicht die analytisch berechnete optimale Materialausrichtung, die eine minimale Nachgiebigkeit liefert, zu wählen, sondern von dieser zu Gunsten anderer Eigenschaften abzuweichen. Zu diesem Zwecke wollen wir nun das in den Kapiteln 3.3.1 und 3.3.2 erarbeitete Konzept um eine Technik zur Glättung der Faserausrichtung erweitern.

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

Sei $\bar{\alpha} \in [0, \pi)$ ein Drehwinkel, der einer „favorisierten“ Materialausrichtung entspricht. Damit ist gemeint, dass zwar weiterhin die Nachgiebigkeit minimiert werden soll, hierbei jedoch eine starke Abweichung der optimalen Rotation von $\bar{\alpha}$ bestraft werden soll. Eine Möglichkeit dies zu erreichen ist, dass man das Zielfunktional um einen Strafterm $\text{Pen} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ zu

$$W^{\text{pen}}(\alpha) := W(\alpha) + \text{Pen}(\alpha; \bar{\alpha})$$

ergänzt. Das unpenalisierte Zielfunktional $W(\alpha)$ kann dabei beispielsweise die Nachgiebigkeit im Einzellastfall gemäß Kapitel 3.3.1 oder im Mehrlastfall gemäß Kapitel 3.3.2 sein. Die Funktion Pen sollte folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Für den bevorzugten Drehwinkel $\bar{\alpha}$ soll $\text{Pen}(\bar{\alpha}; \bar{\alpha}) = 0$ gelten.
- Die Periodizität des Zielfunktionals soll auch für den Strafterm Pen vorliegen. Es ist nicht ersichtlich warum eine Materialausrichtung, die für orthotrope Materialien identisches Verhalten nach sich zieht, durch einen Strafterm bestraft wird.
- Der Strafterm soll sich mit wenig Aufwand in die sonstige Theorie eingliedern lassen.

Eine Möglichkeit zur Wahl eines geeigneten Strafterms ist Gegenstand des nachfolgenden Satzes.

Satz 3.10: 1. Für die periodische Penalty-Funktion

$$\text{pen}(\cdot, \bar{\alpha}) : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^+, \alpha \mapsto 1 + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right) \sin(2\alpha) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right) \cos(2\alpha)$$

gilt

- $\text{pen}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in [0, \pi),$
- $\text{pen}(\alpha + \pi, \bar{\alpha}) = \text{pen}(\alpha, \bar{\alpha}) \quad \forall \alpha, \bar{\alpha} \in [0, \pi).$

2. Wir betrachten das Zielfunktional $W^\Sigma(\alpha)$ des Mehrlastfalles gemäß (3.9) und

$$W^{\text{pen}}(\alpha) = W^\Sigma(\alpha) + \mu \int_{\Omega} \text{pen}(\alpha(x); \bar{\alpha}(x)) \, dx$$

mit einem Skalierungsfaktor $\mu \in \mathbb{R}^+$ und einem vorgegebenen Drehwinkelfeld $\bar{\alpha}$. Damit ergibt sich die Bestimmung des minimierenden Drehwinkelfeldes erneut punktweise als Nullstellenproblem eines geeigneten komplexen Polynoms.

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Beweis. 1. a) Es gelten die Symmetrien der trigonometrischen Abbildungen

$$\cos(\xi) = \cos(-\xi) \text{ und } \sin(-\xi) = -\sin(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

und die Phasenverschiebung

$$\cos(\xi) = \sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{pen}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) &= 1 + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right) \sin(2\bar{\alpha}) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right) \cos(2\bar{\alpha}) \\ &= 1 + \sin(-2\bar{\alpha}) \sin(2\bar{\alpha}) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\bar{\alpha}\right) \cos(2\bar{\alpha}) \\ &= 1 - \left(\sin(2\bar{\alpha})^2 + \cos(2\bar{\alpha})^2\right) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Identität

$$\sin(\xi)^2 + \cos(\xi)^2 = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

folgt. Die ausgenutzten trigonometrischen Identitäten finden sich beispielsweise in [6] Kapitel 3.

b) Die Periodizität ergibt sich sofort aus den entsprechenden Periodizitäten der trigonometrischen Terme in den Einzelsummanden.

2. Analog zu den Beweisen der Sätze 3.6 und 3.9 ergibt sich hier das punktweise zu minimierende trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned} p^{\text{Pen}}(\alpha) &= \left(\tilde{a}_0^{\Sigma} + \tilde{a}_0^{\text{Pen}}\right) + \left(\tilde{a}_1^{\Sigma} + \tilde{a}_1^{\text{Pen}}\right) \sin(2\alpha) + \tilde{a}_2^{\Sigma} \sin(4\alpha) \\ &\quad + \left(\tilde{b}_1^{\Sigma} + \tilde{b}_1^{\text{Pen}}\right) \cos(2\alpha) + \tilde{b}_2^{\Sigma} \cos(4\alpha) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{a}_0^{\text{Pen}} := \mu, \tilde{a}_1^{\text{Pen}} := \mu \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right) \text{ und } \tilde{b}_1^{\text{Pen}} := \mu \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\bar{\alpha}\right).$$

Differenzieren führt zu

$$\begin{aligned} \left(p^{\text{Pen}}\right)'(\alpha) &= 2\left(\tilde{a}_1^{\Sigma} + \tilde{a}_1^{\text{Pen}}\right) \cos(2\alpha) + 4\tilde{a}_2^{\Sigma} \cos(4\alpha) \\ &\quad - 2\left(\tilde{b}_1^{\Sigma} + \tilde{b}_1^{\text{Pen}}\right) \sin(2\alpha) - 4\tilde{b}_2^{\Sigma} \sin(4\alpha) \end{aligned}$$

3.3 Punktweise analytische Bestimmung der optimalen Ausrichtungen

und Transformation analog wie in den Sätzen 3.6 und 3.9 schließlich zum komplexen Polynom

$$P^{\text{Pen}}(z) = \sum_{k=-2}^2 c_k^{\text{Pen}} z^{k+2}$$

mit

$$\begin{aligned} c_0^{\text{Pen}} &= 0, \\ c_{\pm 2}^{\text{Pen}} &= c_{\pm 2}^{\Sigma}, \\ c_1^{\text{Pen}} &= \left(\tilde{b}_1^{\Sigma} + \tilde{b}_1^{\text{Pen}} \right) - i \left(\tilde{a}_1^{\Sigma} + \tilde{a}_1^{\text{Pen}} \right) \text{ und} \\ c_{-1}^{\text{Pen}} &= \left(\tilde{b}_1^{\Sigma} + \tilde{b}_1^{\text{Pen}} \right) + i \left(\tilde{a}_1^{\Sigma} + \tilde{a}_1^{\text{Pen}} \right), \end{aligned}$$

dessen Nullstellen \bar{z} mit $|\bar{z}| = 1$ nach Rücktransformation die punktweisen Extremalstellen des Zielfunktionals definieren.

□

3.3.4 Optimale Materialausrichtung für gegebene Verzerrungen

In Kapitel 3.3.1 haben wir ausgehend von der Annahme, dass ein gegebenes Spannungsfeld invariant unter der Änderung der Materialausrichtung konstant bleibt, eine optimale Materialausrichtung, die zu einer minimalen Nachgiebigkeit für dieses Spannungsfeld führt, bestimmt. Analoge Überlegungen sind auch für ein als konstant angenommenes Verzerrungsfeld, entsprechend der Verzerrungsmethode im zweidimensionalen Fall, durchführbar.

Im Folgenden sei $\hat{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ das fixierte Verzerrungsfeld in seiner Darstellung bezüglich des unrotierten Referenzkoordinatensystems in Voigt-Notation. Wir nehmen an, dass dieses Verzerrungsfeld bei einem Wechsel des Drehwinkelfeldes der Materialausrichtung unverändert bleibt, und wollen dasjenige Winkelfeld bestimmen, für das die Nachgiebigkeit des Werkstückes extreme Werte annimmt. Wir betrachten die Nachgiebigkeit somit für feste Verzerrungen $\hat{\epsilon}$ und für vom Drehwinkelfeld α abhängige Spannungen $\sigma(\alpha)$ als

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(x, \alpha(x)) : \hat{\epsilon}(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C(\alpha(x)) \hat{\epsilon}(x) : \hat{\epsilon}(x) \, dx. \quad (3.10)$$

Satz 3.11: Für ein von der Materialausrichtung unabhängiges Verzerrungsfeld $\hat{\epsilon}$, ein

3 Optimierungsverfahren zur Minimierung der Nachgiebigkeit

Drehwinkelfeld α und die Nachgiebigkeit gemäß (3.10) gilt

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\alpha, x) \, dx$$

mit

$$w(\alpha, x) = \bar{a}_0(x) + \bar{a}_1(x) \sin(2\alpha(x)) + \bar{a}_2(x) \sin(4\alpha(x)) \\ + \bar{b}_1(x) \cos(2\alpha(x)) + \bar{b}_2(x) \cos(4\alpha(x))$$

und

$$\begin{aligned} \bar{a}_0(x) &= \frac{1}{8} (\overset{\text{mat}}{C}_{11} + \overset{\text{mat}}{C}_{22}) (3\hat{\epsilon}_1^2 + 3\hat{\epsilon}_2^2 + \hat{\epsilon}_6^2 + 2\hat{\epsilon}_1\hat{\epsilon}_2) + \overset{\text{mat}}{C}_{33}\hat{\epsilon}_3^2 + \frac{1}{2} (\overset{\text{mat}}{C}_{44} + \overset{\text{mat}}{C}_{55}) (\hat{\epsilon}_4^2 + \hat{\epsilon}_5^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \overset{\text{mat}}{C}_{66} ((\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2)^2 + \hat{\epsilon}_6^2) + \overset{\text{mat}}{C}_{12} \left(\frac{1}{4}\hat{\epsilon}_1^2 + \frac{1}{4}\hat{\epsilon}_2^2 - \frac{1}{4}\hat{\epsilon}_6^2 + \frac{3}{2}\hat{\epsilon}_1\hat{\epsilon}_2 \right) \\ &\quad + (\overset{\text{mat}}{C}_{13} + \overset{\text{mat}}{C}_{23}) (\hat{\epsilon}_1\hat{\epsilon}_3 + \hat{\epsilon}_2\hat{\epsilon}_3) \\ \bar{a}_1(x) &= \frac{1}{2} (\overset{\text{mat}}{C}_{11} - \overset{\text{mat}}{C}_{22}) \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2) \hat{\epsilon}_6 + (\overset{\text{mat}}{C}_{13} - \overset{\text{mat}}{C}_{23}) \hat{\epsilon}_3 \hat{\epsilon}_6 + (\overset{\text{mat}}{C}_{55} - \overset{\text{mat}}{C}_{44}) \hat{\epsilon}_4 \hat{\epsilon}_5 \\ \bar{a}_2(x) &= \frac{1}{4} (\overset{\text{mat}}{C}_{11} + \overset{\text{mat}}{C}_{22}) - \frac{1}{2} \overset{\text{mat}}{C}_{12} - \overset{\text{mat}}{C}_{66}) \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2) s_6 \\ \bar{b}_1(x) &= \frac{1}{2} (\overset{\text{mat}}{C}_{11} - \overset{\text{mat}}{C}_{22}) \hat{\epsilon}_1^2 - \hat{\epsilon}_2^2) + \frac{1}{2} (\overset{\text{mat}}{C}_{44} - \overset{\text{mat}}{C}_{55}) \hat{\epsilon}_4^2 - \hat{\epsilon}_5^2) + (\overset{\text{mat}}{C}_{13} - \overset{\text{mat}}{C}_{23}) \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2) s_3 \\ \bar{b}_2(x) &= \frac{1}{8} (\overset{\text{mat}}{C}_{11} + \overset{\text{mat}}{C}_{22} - 2\overset{\text{mat}}{C}_{12} - 4\overset{\text{mat}}{C}_{66}) (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2)^2 - \hat{\epsilon}_6^2). \end{aligned}$$

Auf die explizite Ausformulierung der Ortsabhängigkeit der $\hat{\epsilon}(x)_i$ wurde erneut aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Beweis. Nach (2.40), (2.36) und (2.39) gilt

$$C(\alpha(x)) = T_3(\alpha(x)) \overset{\text{inv}}{\overset{\text{mat}}{C}} \left(T_3(\alpha(x)) \overset{\text{inv}}{} \right)^{\top}.$$

Durch Ausformulieren und Vereinfachen folgt die Behauptung wie A.5.2 zeigt. \square

Die restlichen Resultate des Kapitels 3.3.1 sowie sämtliche Resultate der Kapitel 3.3.2 zu Mehrlastfällen und 3.3.3 zur Glättung sind vollständig auf den Fall mit fixierten Verzerrungen übertragbar. In sämtlichen Aussagen sind lediglich die ortsabhängigen Koeffizienten $\bar{a}_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) und $\bar{b}_i(x)$ ($i = 1, 2$) durch die entsprechenden $\tilde{a}_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) und $\tilde{b}_i(x)$ ($i = 1, 2$) aus 3.11 zu ersetzen.

4 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse der vorausgehenden Kapitel numerisch behandelt werden. Hierzu wollen wir zunächst in den Kapiteln 4.1 und 4.2 die zur Diskretisierung verwendeten Gittergeometrien, Randbedingungen und Ansatzräume angeben. Insbesondere die Periodizität des Materialverhaltens bezüglich der Materialausrichtung erfordert hier spezielle Aufmerksamkeit.

In den Kapiteln 4.3 und 4.4 werden die theoretisch hergeleiteten Verfahren zur gradientenbasierten Optimierung und der Spannungsmethode numerisch getestet und ausgewertet. In den Kapiteln 4.5 und 4.6 betrachten wir die numerischen Ergebnisse zur Glättung und die Behandlung von Mehrlastfällen. Nach einem kurzen numerischen Vergleich von Spannungs- und Verzerrungsmethode in Kapitel 4.7 schließen wir unsere Untersuchungen in Kapitel 4.8 mit der finalen Kopplung der Spannungsmethode mit der Optimierung der Topologie im Inneren des Flügels ab.

4.1 Definition der Testfälle

Als Anwendungsfall für die numerischen Betrachtungen wird die Optimierung der Materialausrichtung in der Schale eines Modells einer Flugzeugtragfläche gewählt. Als Material der Schale wird als orthotropes Material der kohlenstofffaserverstärkte Kunststoff AS4D/9310 verwendet. Hierbei handelt es sich um einen Verbundwerkstoff aus mit Carbonfasern verstärktem Epoxidharz, der in zahlreichen wissenschaftlichen Untersuchungen wie etwa [5, 41, 20, 42, 36] herangezogen wird. Die Materialeigenschaften von AS4D/9310 in der Konfiguration mit unidirektional verlaufender Faserausrichtung sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Das Innere des Tragflächenmodells besteht in den meisten Testfällen aus Verstrebungsplatten aus isotropem Material mit den Kenngrößen $E = 100$ GPa und $\nu = 0,3$. Die Geometrie des Tragflügelmodells wird in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die Tragfläche ist an der Kopfseite fixiert, was zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen für die Lösung der Elastizitätsgleichung in diesem Bereich führt. Auf die Mantelfläche der Tragfläche wirken Kräfte, die Neumann-Randbedingungen definieren. Die

4 Numerische Ergebnisse

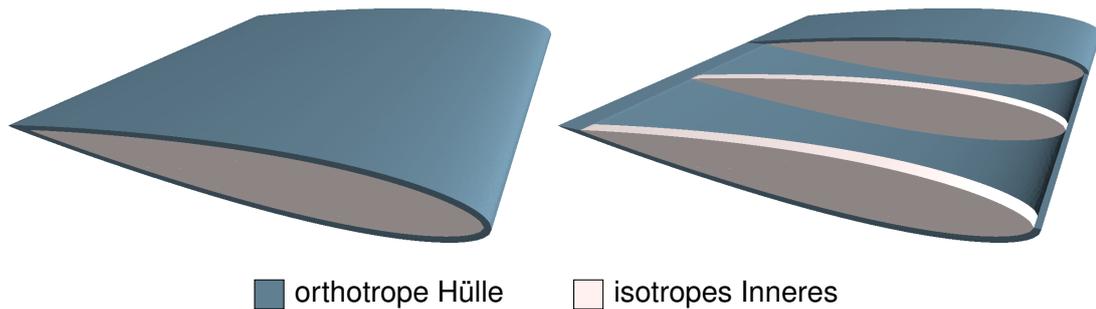


Abbildung 4.1: Geometrie des Tragflügelmodells

Tabelle 4.1: Materialeigenschaften AS4D/9310 und Aluminium im Vergleich

	Einheit	AS4D/9310 [5]	Aluminium 7005 [34]
E_1	[GPa]	133,86	70,5
$E_2 = E_3$	[GPa]	7,706	70,5
$G_{12} = G_{13}$	[GPa]	7,706	26,2
G_{23}	[GPa]	2,76	26,2
$\nu_{12} = \nu_{13}$		0,301	0,343
ν_{23}		0,396	0,343
ρ	[g/cm ³]	1,52	2,779

dem Dirichlet-Rand gegenüberliegende Kopfseite ist frei von vordefinierten Außenwirkungen, was als homogene Neumann-Randbedingung aufgefasst werden kann. Abbildung 4.2 zeigt die unterschiedlichen Randbereiche des Tragflächenmodells. Bei dem Tragflächenmodell handelt es sich um ein NACA-Profil 0012 in der x-y-Ebene, das auf Einheitslänge in z-Richtung extrudiert ist (vgl. Abbildung 4.2). Hierbei handelt es sich um ein symmetrisches Tragflächenprofil, das häufig in wissenschaftlichen Veröffentlichungen wie etwa [14, 1, 24] Verwendung findet.

Die auf die Tragflächen wirkenden Kraftdichten, die die Neumann-Randbedingungen definieren, werden durch Luftdruckdichten vorgegeben, die in Form eines um Null zentrierten und skalierten Druckkoeffizienten c_p angegeben werden. Die in den meisten Testfällen dieser Arbeit verwendeten c_p -Werte sind in Abbildung 4.3 abgebildet. Bei den Werten handelt es sich um Messergebnisse aus Windkanalmessungen (vgl. [31]). Das Druckprofil zeigt den auf die Unter- und auf die Oberseite des Tragflächenmodells wirkenden Luftdruck in Abhängigkeit von der x-Position. Die Druckverteilung wird als in z-Richtung konstant angenommen.

Die Lösung der Elastizitätsgleichung simuliert das Verformungsverhalten der Tragfläche, die am Rumpf eines Flugzeuges fixiert ist unter dem Einfluss der durch den Luft-

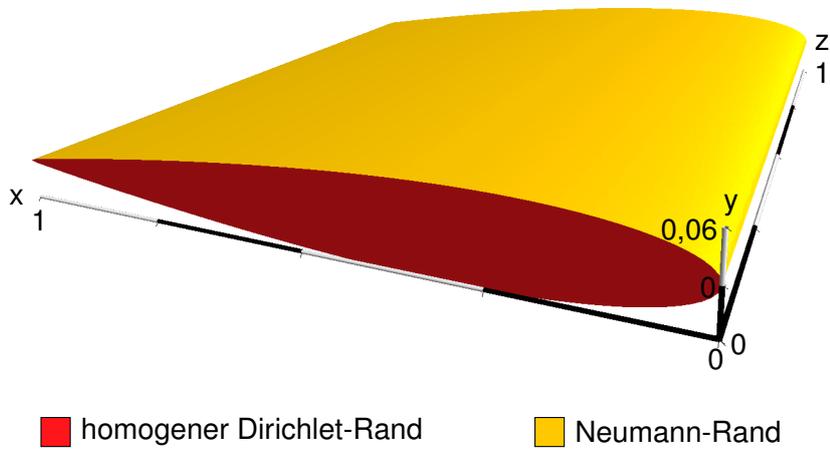


Abbildung 4.2: Dirichlet- und Neumann-Ränder am Tragflächenmodell

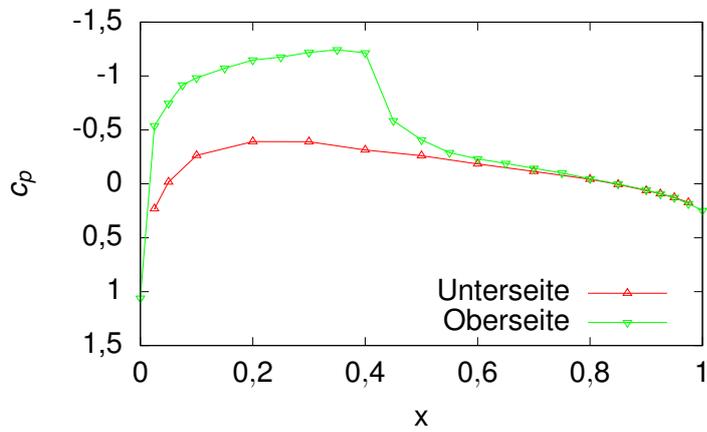


Abbildung 4.3: Druckprofil der Neumann-Randbedingungen, Anstellwinkel 2°

Tabelle 4.2: Unterschiedliche Gitterauflösungen der Tragflächengeometrie

	Zellen	Punkte
Gitter 1	201 446	61 012
Gitter 2	1 133 691	304 111
Gitter 3	10 471 879	2 477 995
Gitter 4	59 576 289	12 417 303

strom während des Fluges hervorgerufenen Kräfte. Diese Verformung setzt sich aus einem Durchbiegen des gesamten Flügels und einem Ein- oder Ausbeulen der Tragflächenschale zwischen den Verstrebungen zusammen. Als Kenngröße für die Verformung soll die Nachgiebigkeit in Abhängigkeit von der in der Schale vorliegenden Materialausrichtung minimiert werden.

Für die numerischen Untersuchungen werden vier unterschiedliche Gitterauflösungen der Geometrie des Tragflügelmodells herangezogen. Es handelt sich dabei um unstrukturierte Gitter, die mit der offenen Software Gmsh [23] mit unterschiedlichen Diskretisierungseinheiten erstellt sind. Kenngrößen der unterschiedlichen Gitter können Tabelle 4.2 und Darstellungen der Gitter können Abbildung 4.4 entnommen werden.

4.2 Wahl der Ansatzräume

Nach Satz 2.41 existiert die Lösung der Elastizitätsgleichung (im schwachen Sinne) im Raum $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^3$. Einen adäquaten endlichdimensionalen Unterraum zur Annäherung der Lösung mittels der Methode der Finiten Elemente bilden die stetigen, stückweise linearen Funktionen mit Freiheitsgraden in den Gitterpunkten des zugrunde liegenden Gitters. Diese werden zur Darstellung des diskretisierten Verschiebungsfeldes als Lösung der Elastizitätsgleichung gewählt.

Zur Darstellung der Drehwinkel in den numerischen Ergebnissen wird eine Farbdarstellung gemäß der Farbskala in Abbildung 4.5 gewählt, welche die Periodizität der Materialeigenschaften bezüglich des Drehwinkels aufgreift. Aufgrund dieser Periodizität ist eine Darstellung des diskretisierten Drehwinkelfeldes in einem stetigen Ansatzraum mit Freiheitsgraden in den Gitterpunkten nur bedingt geeignet. Sollte der Drehwinkel etwa in einem Eckpunkt einer Gitterzelle bei 1° und in einem benachbarten Eckpunkt bei 179° liegen, so beschreibe dies zwar ein ähnliches Materialverhalten in beiden Eckpunkten, eine stetige Interpolation auf der verbindenden Kante würde jedoch eine vollständige Umdrehung des Materialverhaltens auf den Zwischenpunkten

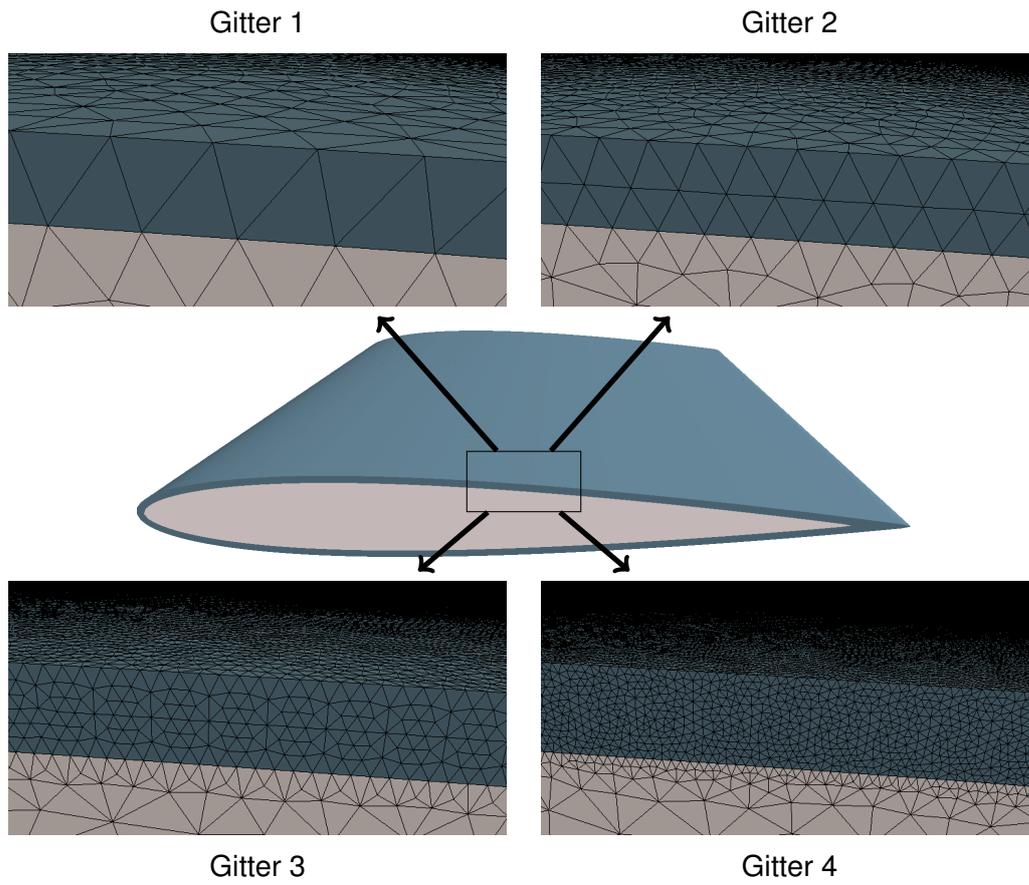


Abbildung 4.4: Unterschiedliche Gitterauflösungen

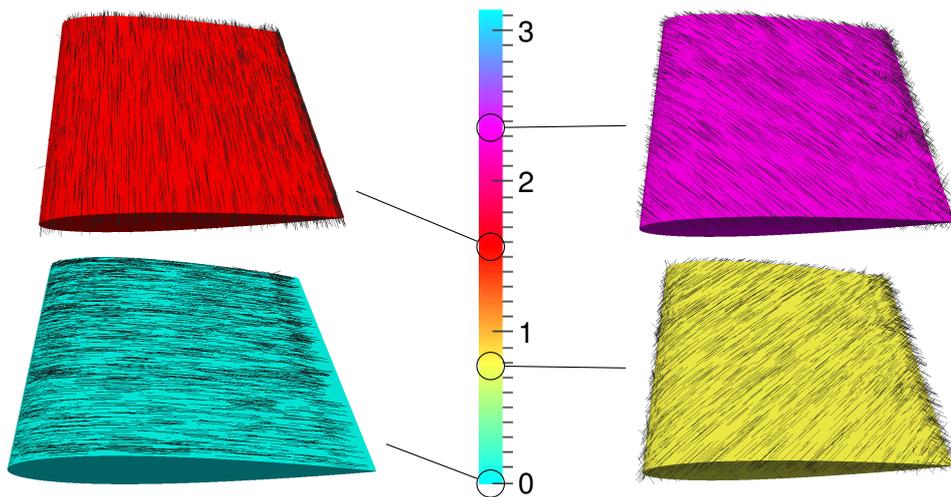


Abbildung 4.5: Farbschema der Drehwinkel für 0°, 45°, 90° und 135°

4 Numerische Ergebnisse

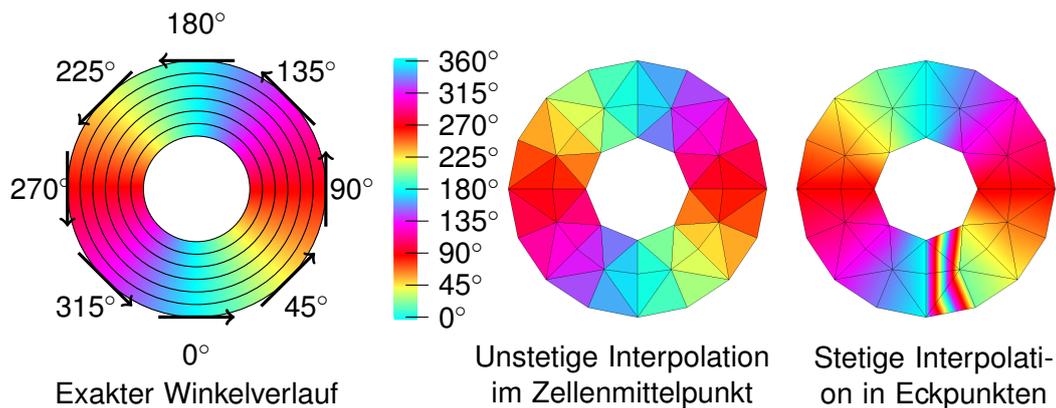


Abbildung 4.6: Darstellung der Drehwinkel konzentrischer Kreise in verschiedenen Funktionenräumen

nach sich ziehen. Aus diesem Grund wird für die Diskretisierung des Drehwinkelfeldes, und somit der Materialeigenschaften, der endlichdimensionale Raum der stückweise konstanten Funktionen mit Freiheitsgraden in den Mittelpunkten der Gitterzellen gewählt. Eine Darstellung der beschriebenen Problematik ist für eine Kreisscheibe mit einer in konzentrischen Kreisen verlaufenden Materialausrichtung in Abbildung 4.6 dargestellt.

4.3 Gradientenbasierte Optimierung - Adjungierte Methode

4.3.1 Ein einfaches Gradientenverfahren

Wir betrachten zunächst die Optimierungsergebnisse für ein einfaches Abstiegsverfahren mit dem Gradienten gemäß Satz 3.3 als Abstiegsrichtung in Verbindung mit einer einfachen Schrittweitensteuerung wie in Algorithmus 1 beschrieben. Abbildung 4.7 zeigt die Zielfunktionswerte und die Gradientennorm im Optimierungsverlauf für unterschiedliche unidirektionale Anfangsausrichtungen für Gitter 1. Bereits an diesen Werten ist zu erkennen, dass die Optimierung stark von der Anfangsausrichtung abhängig ist und in unterschiedliche lokale Minima läuft. Noch deutlicher wird dies bei Betrachtung der resultierenden Optimierungsergebnisse in Abbildung 4.8.

Der Verlauf der Zielfunktionswerte zeigt in den ersten Schritten des Gradientenverfahrens ein gutes Abstiegsverhalten und auch die Gradientennorm reduziert sich in den ersten zehn Iterationen etwa um eine Größenordnung. Im späteren Verlauf der Optimierung verlangsamt sich die Reduktion des Zielfunktionswertes jedoch stark. Eine

Algorithmus 1 Gradientenabstiegsverfahren

```

1:  $\alpha \leftarrow \alpha_0$  ▷ Anfangswinkelfeld
2:  $d \leftarrow d_0$  ▷ Schrittweite
3: set  $\beta, \gamma^- \in [0,1], \gamma^+ \in [(\gamma^-)^{-1}, \infty)$  ▷ Parameter zur Schrittweitensuche
4:  $u \leftarrow \text{SOLVEELASTICITY}(\alpha)$ 
5:  $comp \leftarrow \text{EVALUATECOMPLIANCE}(u, \alpha)$ 
6: repeat
7:    $grad \leftarrow \text{COMPUTEGRADIENT}(u, \alpha)$  ▷ Gradient als Abstiegsrichtung
8:   repeat ▷ Schrittweiten Bestimmung
9:      $\alpha^+ \leftarrow \alpha + d \cdot grad$ 
10:     $u^+ \leftarrow \text{SOLVEELASTICITY}(\alpha^+)$ 
11:     $comp^+ \leftarrow \text{EVALUATECOMPLIANCE}(u^+, \alpha^+)$ 
12:     $d \leftarrow \gamma^- \cdot d$ 
13:  until  $comp^+ < comp - \beta \cdot d \cdot \|grad\|^2$ 
14:   $u, \alpha, comp \leftarrow u^+, \alpha^+, comp^+$ 
15:   $d \leftarrow \gamma^+ \cdot d$ 
16: until  $\|grad\| < tol$ 

```

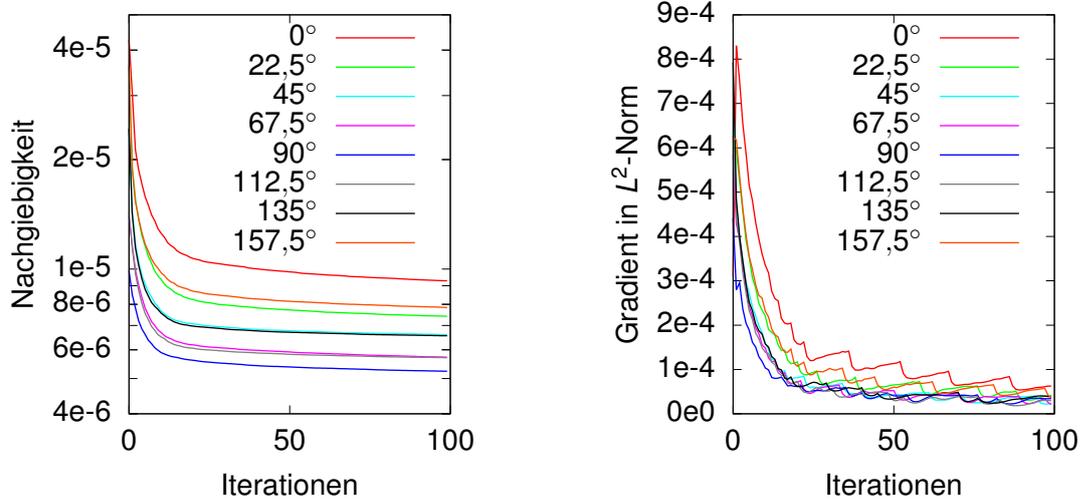


Abbildung 4.7: Optimierungsverlauf Gradientenverfahren für unterschiedliche unidirektionale Anfangsausrichtungen

4 Numerische Ergebnisse

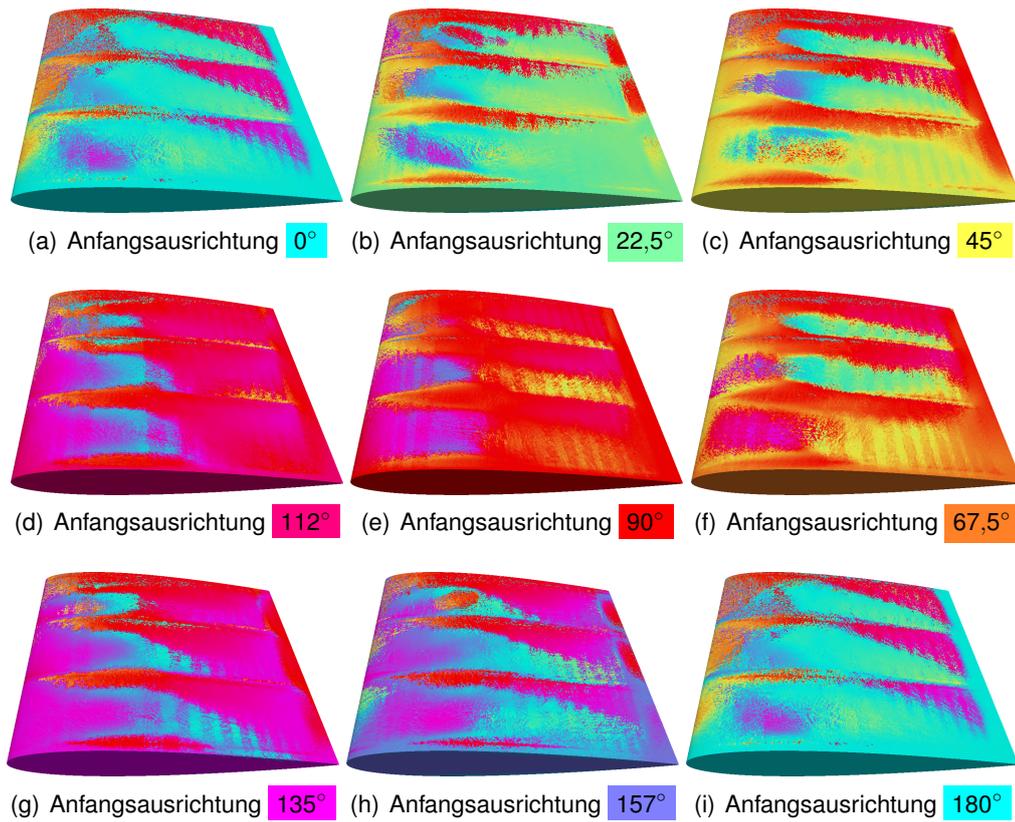


Abbildung 4.8: Optimierungsergebnisse Gradientenverfahren für Gitter 2 und unterschiedliche unidirektionale Anfangsausrichtungen

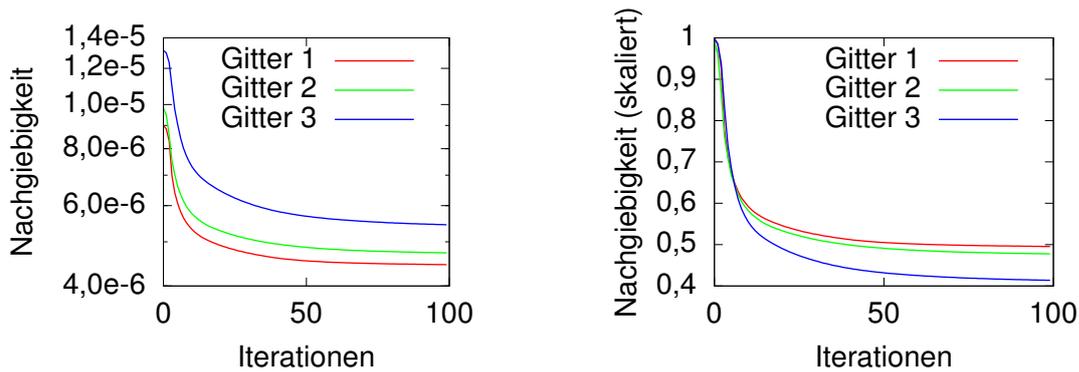


Abbildung 4.9: Optimierungsverlauf L-BFGS-Verfahren für unterschiedliche Gitterauflösungen, links unskaliert, rechts bereinigt um Diskretisierungsfehler

Erklärung hierfür sind Bereiche der Tragflächengeometrie, deren Einfluss den Gradienten aufgrund starker Spannungen und Dehnungen stark dominiert. Abbildung 4.14 (a) (Seite 95) zeigt den Gradienten am Ende der Optimierung mittels des Gradientenverfahrens.

4.3.2 Quasi-Newton-Verfahren

Eine Verbesserung der Konvergenzeigenschaften lässt sich durch die Umsetzung von Quasi-Newton-Verfahren erzielen. Für die nachfolgenden Untersuchungen wählen wir die in der Python Bibliothek SciPy enthaltene Implementierung eines L-BFGS Algorithmus gemäß [8]. Abbildung 4.9 zeigt den Optimierungsverlauf des L-BFGS-Verfahrens für unterschiedliche Gitterauflösungen. Der linke Graph zeigt die Nachgiebigkeiten im Optimierungsverlauf jeweils ausgehend von einer unidirektionalen Drehwinkelverteilung von $\alpha \equiv 90^\circ$. Klar zu erkennen ist der unterschiedlich große Diskretisierungsfehler bei der Verwendung der unterschiedlichen Gitter. Im rechten Graph wurden die Nachgiebigkeiten durch Normierung der Werte der unidirektionalen Anfangsausrichtung um den Diskretisierungsfehler bereinigt. Hierdurch wird das durch die Erhöhung der Freiheitsgrade hinzugewonnene zusätzliche Optimierungspotential erkennbar.

Abbildung 4.10 zeigt die Optimierungsergebnisse des L-BFGS Verfahrens für unterschiedliche Gitterauflösungen. Nach Augenmaß liefert das L-BFGS-Verfahren in dem Maße von der Gitterauflösung unabhängige Optimierungsergebnisse, in dem das Gitter die optimalen Strukturen aufzulösen vermag. Abbildung 4.11 verdeutlicht dies an Querschnitten der Optimierungsergebnisse, in denen eine Schichtbildung zu erkennen

4 Numerische Ergebnisse

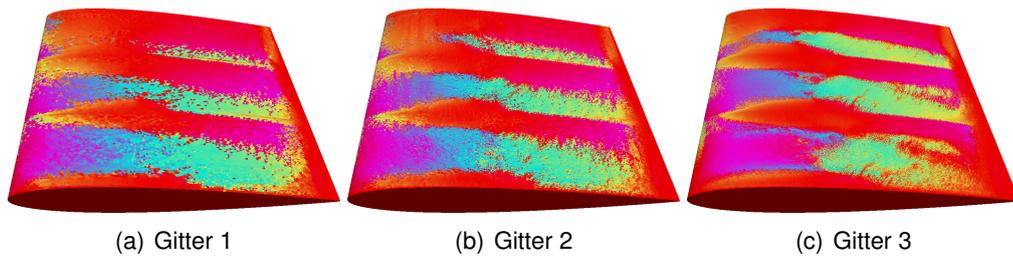


Abbildung 4.10: Optimierungsergebnisse L-BFGS-Verfahren für unterschiedliche Gitterauflösungen

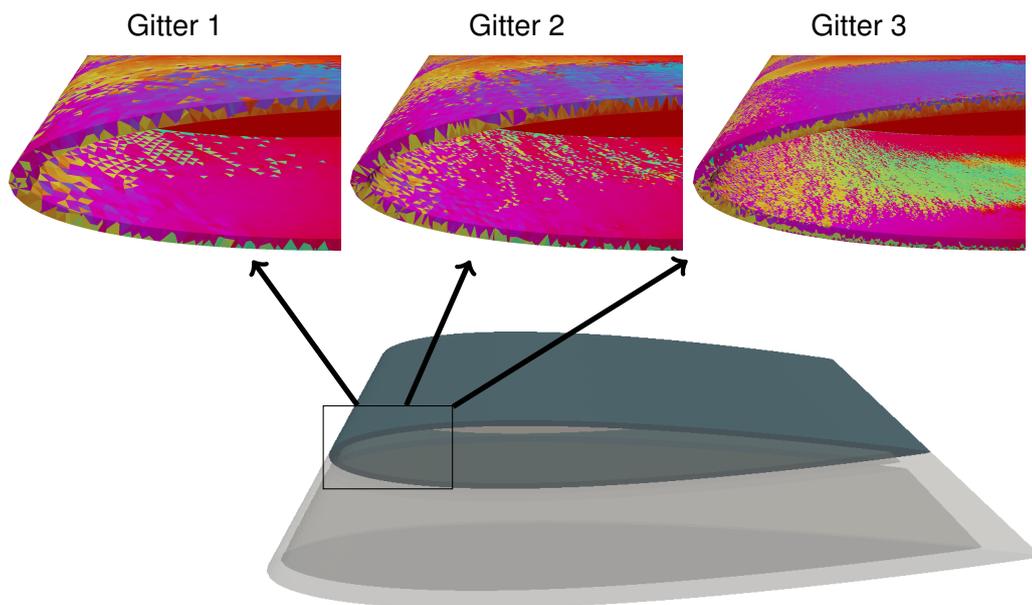


Abbildung 4.11: Schichtausbildung L-BFGS-Verfahren für unterschiedliche Gitterauflösungen

ist. Diese Bildung von Schichten, die auch bei den Ergebnissen des reinen Gradientenverfahrens zu beobachten ist, wird je nach Gitterfeinheit unterschiedlich gut aufgelöst.

Im Vergleich zu einem einfachen Gradientenverfahren bietet das untersuchte L-BFGS-Verfahren bessere Optimierungsergebnisse. In allen durchgeführten Untersuchungen konnten wir eine bessere Reduzierung der Nachgiebigkeit erreichen. Auch die Gradientennorm konnten wir, wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist, in derselben Anzahl von Iterationen um eine weitere Größenordnung reduzieren. Der Effekt der dominierenden Bereiche des Gradienten hat sich im Vergleich zum Gradientenverfahren zwar reduziert, ist aber nach wie vor beobachtbar. Abbildung 4.14 (b) (Seite 95) zeigt den Gra-

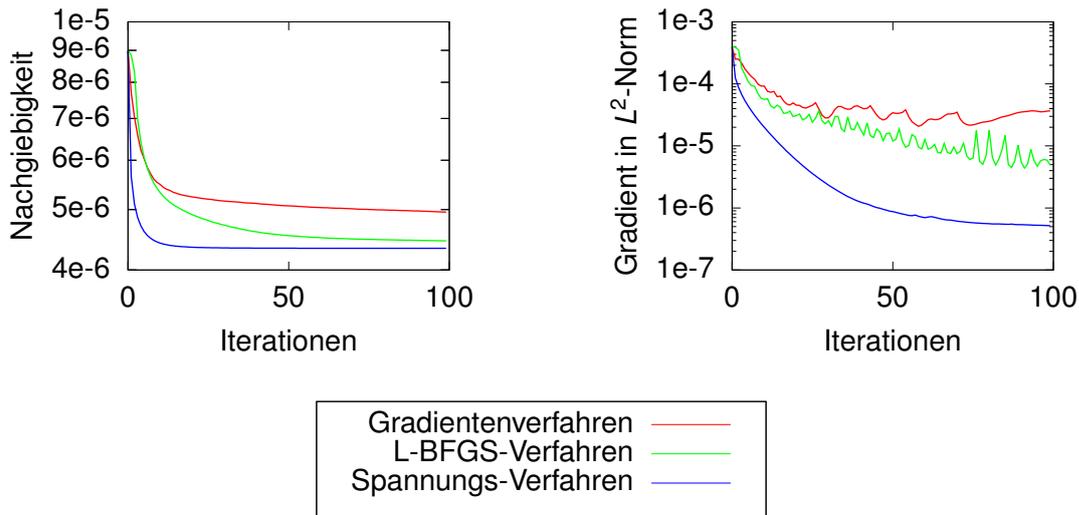


Abbildung 4.12: Vergleich der Optimierungsverläufe der Zielfunktionale und Gradienten für unterschiedliche Optimierungsverfahren

dienten nach Ende der Optimierung mittels L-BFGS-Verfahren. Die veränderte Skalierung zur Abbildung (a) ist zu beachten. Zusammen mit der benötigten Schrittweitsuche bremsen die dominierenden Bereiche des Gradienten die Optimierung im späteren Verlauf weiterhin aus. Auch die Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der Anfangsausrichtung bleibt unverändert bestehen.

4.4 Spannungsmethode

Wir wollen uns nun mit der numerischen Umsetzung der Spannungsmethode gemäß Kapitel 3.3 befassen. Im Gegensatz zu den gradientenbasierten Methoden der vorausgehenden Untersuchungen handelt es sich hierbei nicht um ein Abstiegsverfahren im klassischen Sinne, bei dem für eine zunächst ermittelte Abstiegsrichtung anschließend eine Schrittweite bestimmt und sich daraus der zu vollziehende Schritt ergibt. Vielmehr wird ausgehend vom Spannungszustand an jedem Punkt des Tragflügelmodells die optimale Materialausrichtung bestimmt und diese wird unabhängig vom Zustand an den übrigen Stellen des Tragflügels übernommen. Der Effekt, dass einzelne Bereiche mit betragsmäßig großen Sensitivitäten den globalen Optimierungsschritt dominieren, wird somit vermieden.

Abbildung 4.12 zeigt sowohl den Verlauf des Zielfunktionalen als auch den der Gradientennorm im Optimierungsverlauf der Spannungsmethode im direkten Vergleich zu den

4 Numerische Ergebnisse

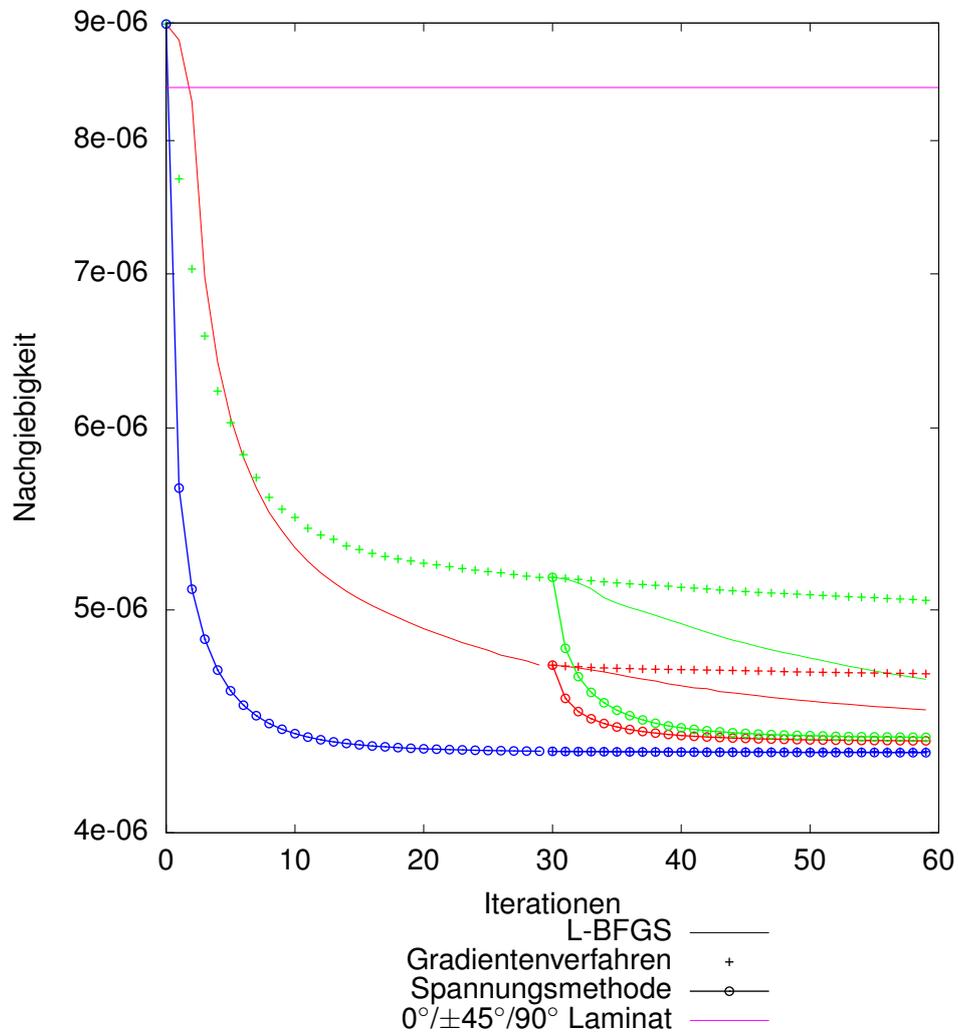
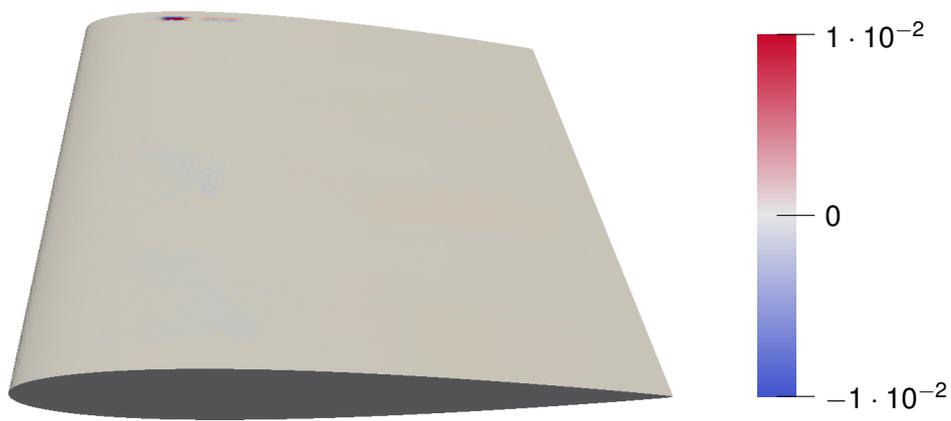
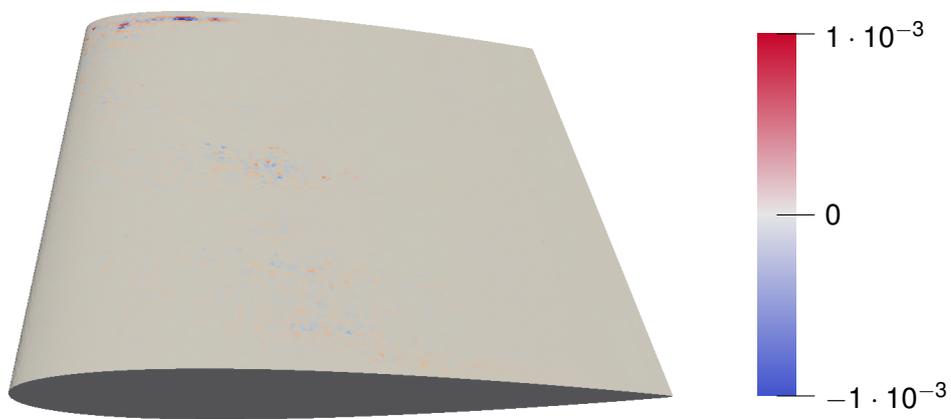


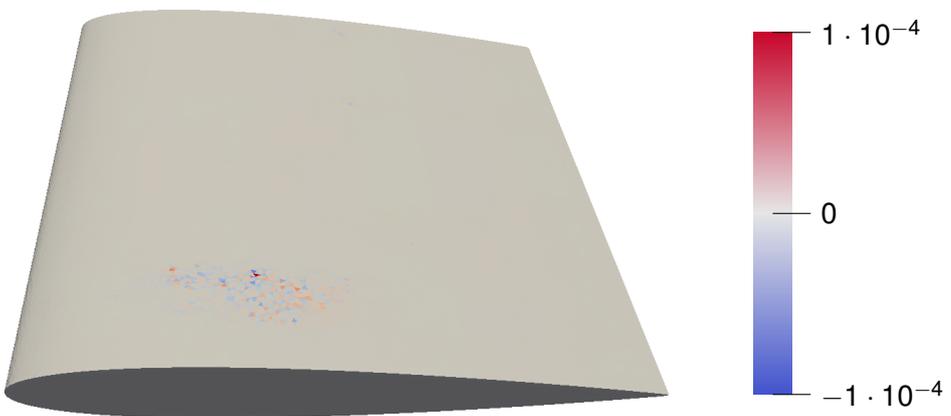
Abbildung 4.13: Nacheinanderausführung der unterschiedlichen Optimierungsverfahren und Vergleich mit klassischem $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ Laminat



(a) Gradientenverfahren



(b) L-BFGS-Verfahren



(c) Spannungsmethode

Abbildung 4.14: Darstellung der Gradienten der optimierten Lösungen der unterschiedlichen Optimierungsverfahren

beiden untersuchten gradientenbasierten Verfahren. Während bei den gradientenbasierten Verfahren auch nach 100 Iterationen noch ein Abstieg im Zielfunktional zu erkennen ist, erreicht die Spannungsmethode bereits nach deutlich weniger Iterationen einen nahezu stationären Zustand. Die Gradientennorm wird um eine weitere Größenordnung reduziert. Abbildung 4.14 (c) zeigt den Gradienten am Ende der Optimierung mittels Spannungsmethode. Die erneute Anpassung der Skalierung ist zu beachten. Starke lokale Ausreißer im Betrag treten im Gegensatz zu den Darstellungen (a) und (b) der gradientenbasierten Ergebnisse nicht auf. Auch das numerische Zittern der Gradientennorm, im Vorigen verursacht durch die inexakte Schrittweitenbestimmung, ist nicht zu beobachten. Abbildung 4.13 zeigt die Verläufe der verschiedenen Kombinationen von nacheinander durchgeführten Verfahren. Hierbei haben wir jeweils eines der drei beschriebenen Verfahren ausgehend von der Optimallösung eines der anderen Verfahren ausgeführt. Außerdem ist als Vergleichsgröße der Wert für ein Laminat mit gleichen Anteilen an Schichten mit den Ausrichtungen 0° , 90° und $\pm 45^\circ$ enthalten, welcher bei etwa $8,437 \cdot 10^{-6}$ liegt und von jedem der Optimierungsverfahren deutlich unterboten wird.

Wie schon bei den gradientenbasierten Verfahren hängen auch bei der Spannungsmethode die Optimierungsergebnisse von der Anfangsausrichtung des Materials ab. Abbildung 4.15 zeigt die Optimierungsergebnisse der Spannungsmethode für Gitter 1 und verschiedene unidirektionale Anfangsverteilungen der Materialausrichtung. Im Vergleich zu den Resultaten der entsprechenden Ergebnisse des Gradientenverfahrens in Abbildung 4.8 (Seite 90) unterscheiden sich die Ergebnisse hier per Augenmaß weniger stark voneinander. Entsprechend verhält es sich mit den Zielfunktionalwerten. Während sich die Optimalwerte des Gradientenverfahrens in Abbildung 4.7 (Seite 89) um Faktoren bis zu 1,94 unterscheiden ($9,61 \cdot 10^{-6}$ zu $4,95 \cdot 10^{-6}$), liegt zwischen den untersuchten optimalen Zielfunktionswerten der Spannungsmethode lediglich ein Faktor von 1,08 ($4,67 \cdot 10^{-6}$ zu $4,34 \cdot 10^{-6}$).

4.5 Glättung der Materialausrichtungen

Einige der numerischen Ergebnisse weisen teilweise zerklüftete Strukturen auf, in denen sich die Materialausrichtungen in benachbarten Gitterzellen sehr stark unterscheiden. Als Ursachen hierfür kommen sowohl eine zu grobe Gitterauflösung in Betracht, die nicht geeignet ist etwaige stetige Verläufe aufzulösen, oder aber die zersprengten Strukturen entsprechen den tatsächlichen lokalen Minima des Optimierungsproblems. In jedem Fall entsprechen vereinzelte Gitterzellen mit stark von der Umgebung abwei-

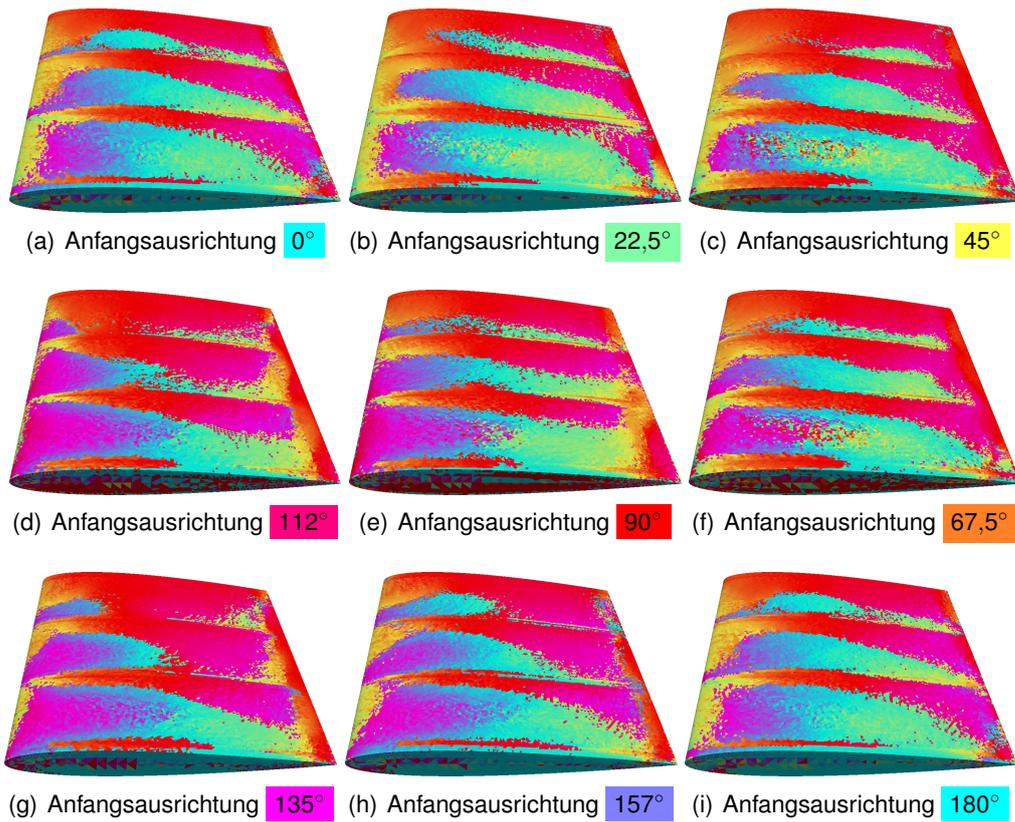


Abbildung 4.15: Optimierungsergebnisse Spannungsmethode für Gitter 1 und unterschiedliche unidirektionale Anfangsausrichtungen

4 Numerische Ergebnisse

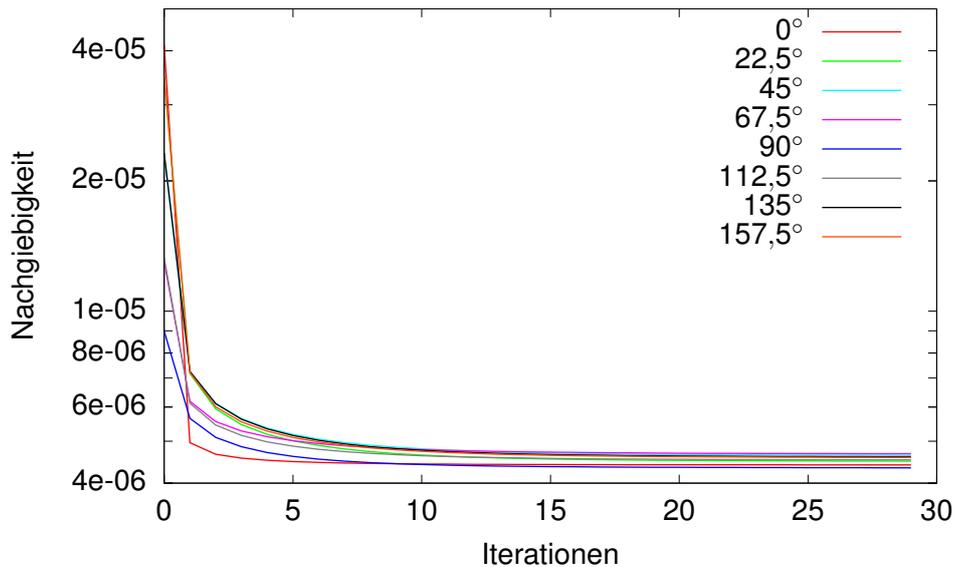


Abbildung 4.16: Optimierungsverlauf Spannungsmethode für unterschiedliche unidirektionale Anfangsausrichtungen

chenden Materialausrichtungen keinem Materialverhalten, das die zu untersuchenden Faserverbundstoffe annehmbar modelliert. Zur Glättung der Materialausrichtung gibt es verschiedene Ansätze.

4.5.1 Glättung bei gradientenbasierten Verfahren

Eine Möglichkeit zur Glättung der numerischen Ergebnisse der gradientenbasierten Verfahren aus Kapitel 4.3 besteht in der Regularisierung des Zielfunktional durch Addition eines H^1 -Regularisierungsterms in der Form

$$W^{\text{reg}}(\alpha) := W(\alpha) + \mu \int_{\Omega} \nabla \alpha(x) \cdot \nabla \alpha(x) \, dx$$

wobei $W(\alpha)$ das ursprüngliche Zielfunktional der Nachgiebigkeit und $\mu \in \mathbb{R}$ einen skalaren Skalierungsparameter bezeichnet. Ein Nachteil dieser Art der Glättung besteht darin, dass eine Änderung des Zielfunktional die Selbstadjungiertheit des Ausgangsproblems der Nachgiebigkeit zerstören würde. Der Aufwand eines jeden Optimierungsschrittes würde durch die zusätzliche Notwendigkeit des Lösen einer adjungierten Gleichung etwa verdoppelt werden. Die bereits beobachteten Nachteile gradientenbasierter Methoden bezüglich des Rechenaufwands würden hierdurch weiter verstärkt werden. Neben dem Verlust der Selbstadjungiertheit ist bei dieser Art der Glättung

ebenso die Notwendigkeit des Wechsels des Ansatzraumes für die Darstellung der Drehwinkel α zu bemängeln. Zumindest im Rahmen der Methode der Finiten Elemente sind zur Berechnung der für den H^1 -Term erforderlichen Gradienten wenigstens lineare Ansatzfunktionen notwendig, deren Wahl die in Kapitel 4.2 diskutierten Schwierigkeiten nach sich zieht.

Eine alternative Möglichkeit der Glättung besteht darin das Zielfunktional um einen geeigneten Strafterm zu ergänzen, der die Abweichung von einer erstrebenswerten, glatten Drehwinkelverteilung bestraft. Als Vergleichsverteilung könnten etwa eine bereits bekannte „gute“ Startverteilung $\bar{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dienen, die die gewünschten Glattheitseigenschaften besitzt. Das zugehörige Zielfunktional ergäbe sich dann beispielsweise für einen L^2 Strafterm als

$$W^{\text{reg}}(\alpha) := W(\alpha) + \mu \int_{\Omega} (\alpha(x) - \bar{\alpha}(x))^2 \, dx,$$

wobei $W(\alpha)$ das ursprüngliche Zielfunktional der Nachgiebigkeit und $\mu \in \mathbb{R}$ erneut einen skalaren Skalierungsparameter bezeichnet. Diese Vorgehensweise würde jedoch lediglich eine Optimierung in einer Nachbarschaft um die Startverteilung $\bar{\alpha}$ erlauben. Für „globalere“ Optimierungsergebnisse müsste die Vergleichsverteilung in geeigneter, glatter Art angepasst werden. Eine Möglichkeit der Bestimmung einer geeigneten glatten Zielverteilung $\bar{\alpha}$ wird im Folgenden im Zusammenhang mit der Spannungsmethode untersucht.

4.5.2 Glättung bei der Spannungsmethode

Wie in Kapitel 3.3.3 untersucht, lässt sich die punktweise Optimierung der Nachgiebigkeit nach den analytischen Optimalitätsbedingungen ohne nennenswerten zusätzlichen Aufwand gewichtet in die Richtung eines Zieldrehwinkelfeldes $\bar{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ziehen. Die Überlegungen sind sowohl für ein Winkelfeld $\bar{\alpha}$ mit gewünschten glatten Eigenschaften, als auch insbesondere für ein konstantes Drehwinkelfeld anwendbar. Zur konzeptionellen Überprüfung der theoretischen Ergebnisse soll hier zunächst der akademische Fall eines konstanten Winkelfeldes $\bar{\alpha} \equiv 0$ untersucht werden.

Als numerischen Testlauf wählen wir Gitter 1 mit einer unidirektionalen Anfangsausrichtung des Materials von 90° und unterschiedliche Werte für den Skalierungsfaktor μ . Abbildung 4.17 zeigt die Ergebnisse der Optimierungsläufe nach jeweils 30 Iterationen. Tabelle 4.3 zeigt die zugehörigen Nachgiebigkeiten für die jeweiligen Werte von μ . Als Vergleichswerte dienen für $\mu = \infty$ die Nachgiebigkeit der nicht optimierten

4 Numerische Ergebnisse

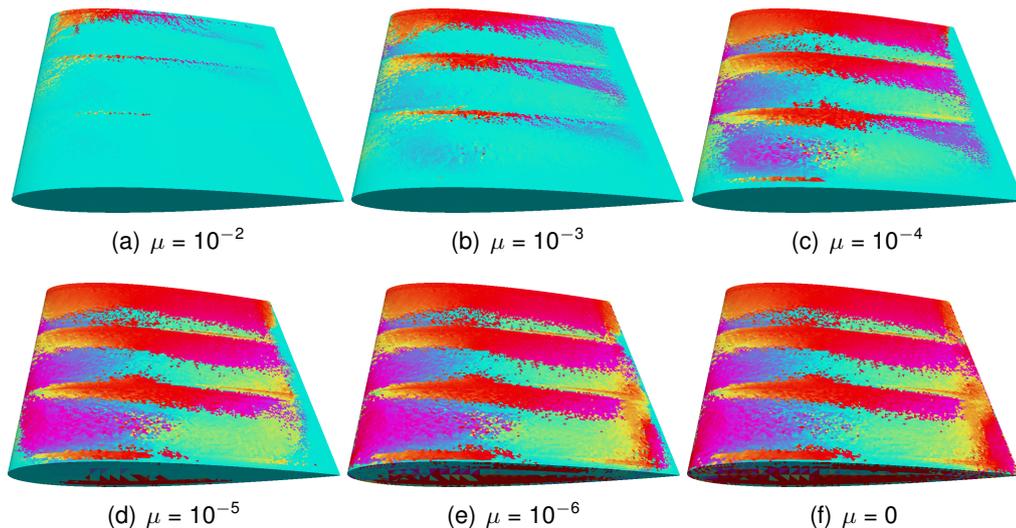


Abbildung 4.17: Optimierungsergebnisse für die Spannungsmethode mit bevorzugter Nullrichtung für unterschiedliche Skalierungsfaktoren μ

Tabelle 4.3: Nachgiebigkeiten der Lösungen nach Optimierung mit bevorzugter Nullrichtung für unterschiedlicher Werte von μ

μ	Nachgiebigkeit
∞	$4,123 \cdot 10^{-5}$
10^{-2}	$2,039 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	$7,225 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$4,568 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$4,331 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	$4,339 \cdot 10^{-6}$
0	$4,340 \cdot 10^{-6}$

unidirektionalen Materialausrichtung von 0° und für $\mu = 0$ die Nachgiebigkeit für das Optimierungsergebnis ohne Bestrafung der Abweichung von $\bar{\alpha}$.

Wie gewünscht lässt sich durch die Wahl des Skalierungsfaktors μ die Optimierung mittels der Spannungsmethode steuern. Auf Kosten einer höheren Nachgiebigkeit verlaufen die optimierten Materialausrichtungen für hohe μ näher an der bevorzugten Nullrichtung und umgekehrt. Deutlich sind diejenigen Bereiche zu erkennen, deren Materialausrichtung hohen Einfluss auf die Gesamtnachgiebigkeit haben, sodass sich ein Abweichen von der Nullrichtung auch für höhere Werte von μ lohnt.

Obige Erkenntnisse sollen nun auf den anwendungsnäheren Fall angewendet werden, bei dem das bevorzugte Winkelfeld nicht einem konstanten Feld, sondern einer geglätteten Annäherung des aktuellen Drehwinkelfeldes entspricht. Ein gängiges Werk-

zeug zur dosierten Glättung skalarer Felder im Raum besteht in der zeitlichen Diskretisierung der instationären Wärmeleitungsgleichung. Für ein differenzierbares Feld $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kann das Glätten des Feldes durch zeitliche Diffusion ohne Quellterme gemäß der parabolischen partiellen Differentialgleichung

$$\dot{w}(x, t) = \operatorname{div}(B(x)\nabla w(x, t))$$

mit einer zeitlichen Anfangsverteilung

$$w(x, t_0) = w^0(x)$$

beschrieben werden. Hierbei sei durch $B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ein Feld von symmetrischen, positiv semidefiniten Tensoren gegeben, dass die Wärmeleitfähigkeit in den unterschiedlichen Materialrichtungen, entsprechend den Materialeigenschaften \mathbf{C} bzw. \mathbf{S} bei der linearen Elastizitätsgleichung, definiert.

Eine zeitliche Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung zum Zeitpunkt t_0 mit einer Schrittweite τ mittels des impliziten Eulerverfahrens führt zu der Näherung

$$w(x, t_0 + \tau) = w_0(x) + \tau \operatorname{div}(B(x)\nabla w(x, t_0 + \tau))$$

in Form einer elliptischen partiellen Differentialgleichung. Die schwache Form dieser Differentialgleichung ergibt sich als

$$\int_{\Omega} w^+(x)v(x) \, dx + \tau \int_{\Omega} (B(x)\nabla w^+(x)) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} w^0(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in S^h, \quad (4.1)$$

wobei $w^+ \in S^h$ die Näherungslösung für $w(\cdot, t_0 + \tau)$ in einem geeigneten Ansatzraum S^h bezeichnet. Die positive Semidefinitheit der Tensoren $B(x)$ impliziert die positive Semidefinitheit des zweiten Summanden der Bilinearform. Zusammen mit der (strikten) positiven Definitheit des ersten Summanden ergibt sich insgesamt positive Definitheit der gesamten Bilinearform. Zur weiteren Lösungstheorie dieser häufig betrachteten Differentialgleichung wird auf die Literatur, etwa auf [19, 27, 16], verwiesen.

Das zu glättende Drehwinkelfeld α entspricht in diesem Kontext dem Quellterm w_0 der rechten Seite. Die Lösung w^+ der Differentialgleichung entspricht dem geglätteten Winkelfeld $\bar{\alpha}$ und der Parameter τ dient zur Justierung des Glättungsausmaßes. Bei der Glättung der Drehwinkel mittels der Wärmeleitungsgleichung treten zunächst zwei Schwierigkeiten auf. Während die Verwendung des in der Optimierung gewählten stückweise konstanten Ansatzraumes in der Integralformulierung im Quellterm der rechten Seite von (4.1) unproblematisch ist, verlangt die Auswertung der Bilinearform

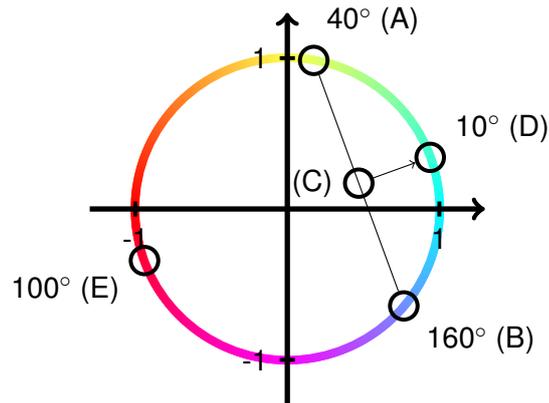


Abbildung 4.18: Glättung der Drehwinkel in ihrer Darstellung auf dem Einheitskreis

der linken Seite Differenzierbarkeit sowohl für die Testfunktionen, als auch für die Lösung w^* . Außerdem tritt die in Kapitel 4.2 beschriebene Problematik der Interpolation von Drehwinkeln an Eckpunkten einer Gitterzelle hier erneut bei der Mittelung der Drehwinkel benachbarter Gitterzellen auf.

Um diese Probleme zu umgehen können die Drehwinkel von ihrer Darstellung als reelle Skalare in eine Darstellung im zweidimensionalen Raum überführt werden. Durch die Transformation

$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} w_1^0(\alpha) \\ w_2^0(\alpha) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

kann jedem Drehwinkel eindeutig ein Punkt auf der Einheitssphäre im zweidimensionalen Raum zugeordnet werden. Die Periodizität dieser Transformation entspricht mit einer Periodenlänge von 180° der des Materialverhaltens. Die auf den Rand des Einheitskreises transformierten Drehwinkel können nun unabhängig von ihrer skalaren Darstellung gemittelt werden. Eine Glättung kann über Anwendung der Wärmeleitungsgleichung mit den Koordinatenfeldern w_1^0 und w_2^0 aus (4.2) als Quelltermen stattfinden.

Das beschriebene Verfahren ist exemplarisch für die Drehwinkel von 40° und 160° in Abbildung 4.18 dargestellt. Eine lineare Mittelung der beiden Winkel in ihrer skalaren Darstellung ergäbe einen Drehwinkel von 100° . Eine Mittelung der zugehörigen Punkte (A) und (B) auf dem Einheitskreis in Abbildung 4.18 führt dahingegen zu Punkt (C). Nach Normierung auf Punkt (D) und Rücktransformation auf eine skalare Darstellung erhalten wir einen gemittelten Drehwinkel von 10° . Die einfache Mittelung der skalaren Drehwinkel ergäbe in der Tat mit Punkt (E) die schlechtestmögliche Annäherung an die beiden Ausgangswinkel.

Weiterhin Bestand hat jedoch die Problematik, dass für stückweise konstante Ansatzfunktionen im Rahmen der Methode der Finiten Elemente keine Gradienteninformationen vorliegen. Als Ansatzraum S^h zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung (4.1) zur Glättung der Koordinatenfelder w_1^0 und w_2^0 wird somit der Raum der stückweise linearen, stetigen Funktionen mit Freiheitsgraden in den Gitterpunkten gewählt. Die geglätteten stetigen Koordinatenfelder w_1^+ und w_2^+ können anschließend durch Auswertung der Werte in den Zellmittelpunkten problemlos in den Raum der stückweise konstanten Funktionen zurück projiziert werden. Die sich so ergebenden Koordinatenfelder \bar{w}_1 und \bar{w}_2 können mittels der Transformation

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \mapsto \bar{\alpha} := \frac{1}{2} \text{sign}(\bar{w}_1) \arccos(\bar{w}_2)$$

wieder in die skalare Darstellung des Drehwinkelfeldes überführt werden. Das Drehwinkelfeld $\bar{\alpha}$ entspricht der Glättung von α und kann im Sinne von Kapitel 3.3.3 in der nächsten Optimierungsiteration als glättende Zielausrichtung verwendet werden. Abbildung 4.19 illustriert den Glättungsvorgang für ein quadratisches Gebiet im zweidimensionalen Fall.

Die vorhergehenden numerischen Untersuchungen haben jeweils zu einer Schichtbildung in der Schalenkonstruktion geführt, wobei die Materialausrichtungen in den übereinander liegenden Schichten teilweise stark von einander abweichen. Um diese Schichtenbildung bei der Glättung der Faserausrichtung soweit möglich zu erhalten, ist der Tensor B in (4.1) derart zu wählen, dass eine Glättung der Materialausrichtungen nur in zur Schalenkonstruktion tangentialer Richtung erfolgt. Der zum tangentialen Anteil orthogonale Anteil des zu glättenden Gradientenfeldes ∇w ergibt sich als $\nabla_n w := (n^\top \nabla w)n$, wobei n das zur Mittelebene der Schalenkonstruktion orthogonale äußere Normalenfeld des Tragflächenmodells ist. Ziehen wir diesen Anteil vom Gradientenfeld ab, so ergibt sich das tangentielle Gradientenfeld als

$$\nabla_{\text{tan}} w := \nabla w - \nabla_n w = \nabla w - (n^\top \nabla w)n = (I - nn^\top) \nabla w.$$

Eine geeignete Wahl für den Tensor B ist somit durch

$$B(x) := I - n(x)n(x)^\top$$

gegeben. B ist in jedem Punkt symmetrisch und besitzt nach Konstruktion den Eigenwert $\lambda_n = 0$ zu Eigenvektoren in Normalenrichtung n , sowie den Eigenwert $\lambda_{\text{tan}} = 1$ in allen hierzu orthogonalen Richtungen, wodurch sich positive Semidefinitheit wie gewünscht ergibt.

4 Numerische Ergebnisse

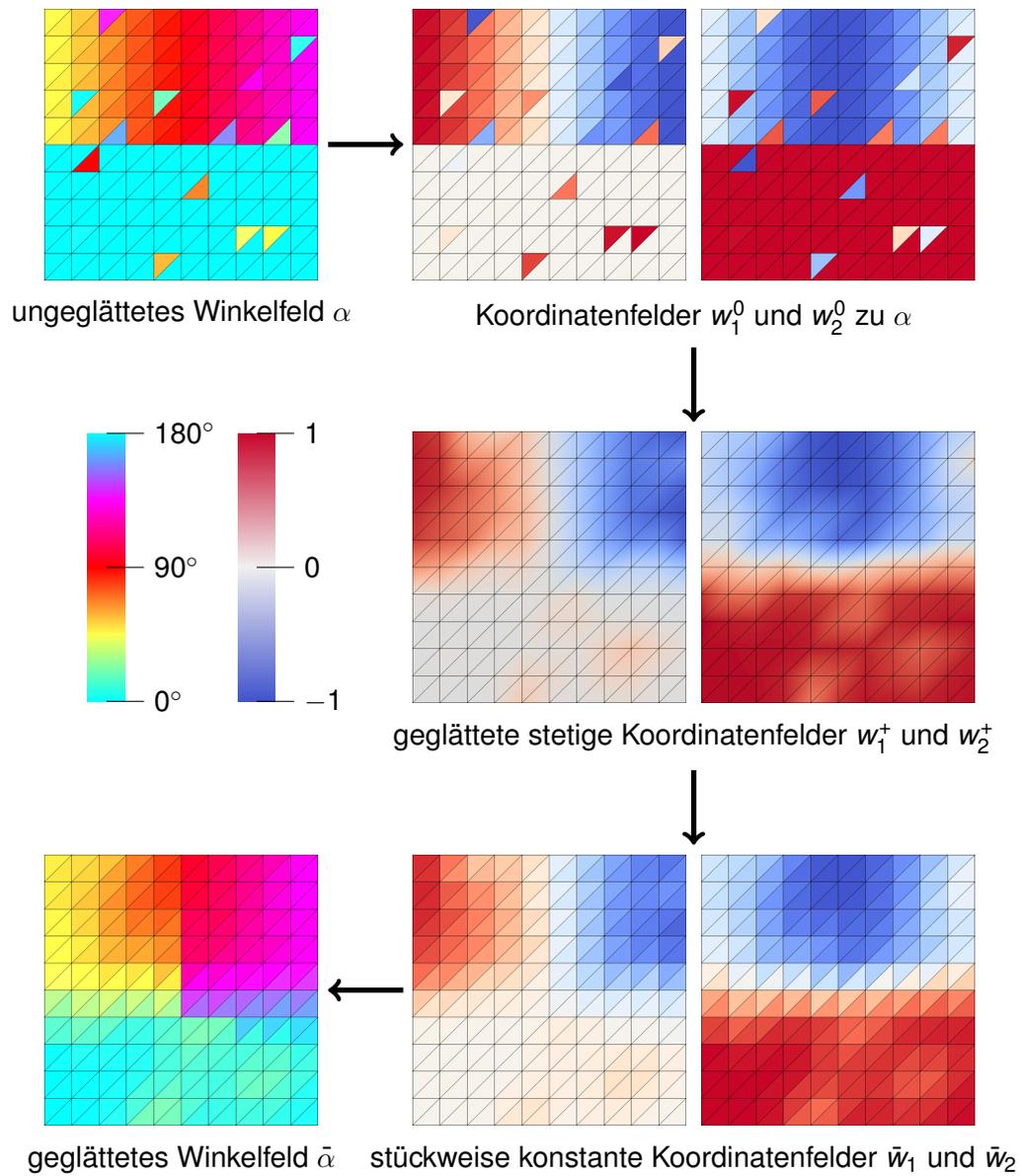


Abbildung 4.19: Beispiel zur Glättung des Drehwinkelfeldes im Einheitsquadrat

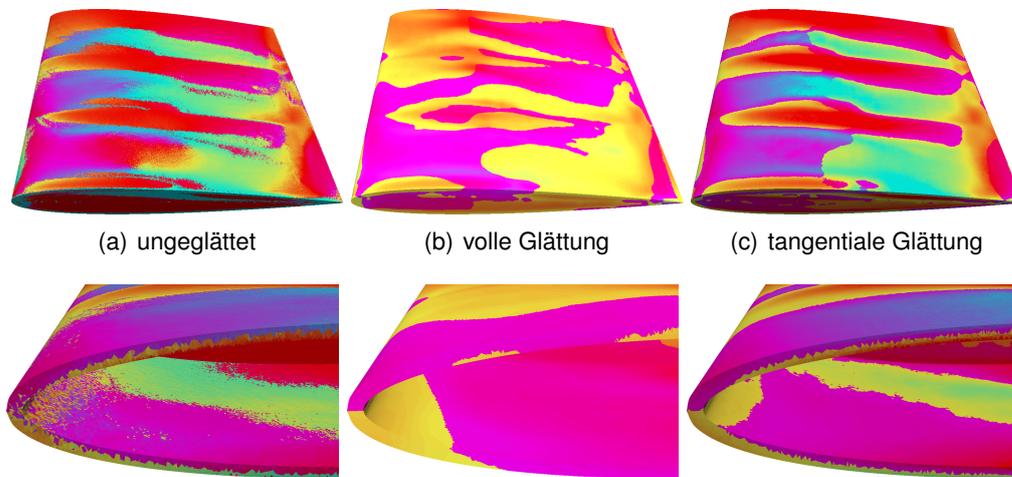


Abbildung 4.20: Vergleich der Glättung mittels Wärmeleitungsgleichung für volle Glättung und tangentielle Glättung

Tabelle 4.4: Nachgiebigkeiten der geglätteten Lösungen

τ	voller Glättungsoperator	tangentiale Glättung
10^{-2}	$1,055 \cdot 10^{-5}$	$8,740 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$1,056 \cdot 10^{-5}$	$7,235 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$9,944 \cdot 10^{-6}$	$6,499 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$7,591 \cdot 10^{-6}$	$6,161 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	$6,305 \cdot 10^{-6}$	$6,030 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	$6,017 \cdot 10^{-6}$	$5,975 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	$5,963 \cdot 10^{-6}$	$5,959 \cdot 10^{-6}$
0	$5,956 \cdot 10^{-6}$	$5,956 \cdot 10^{-6}$

Nachgiebigkeit ungeglättet: $5,309 \cdot 10^{-6}$

4 Numerische Ergebnisse

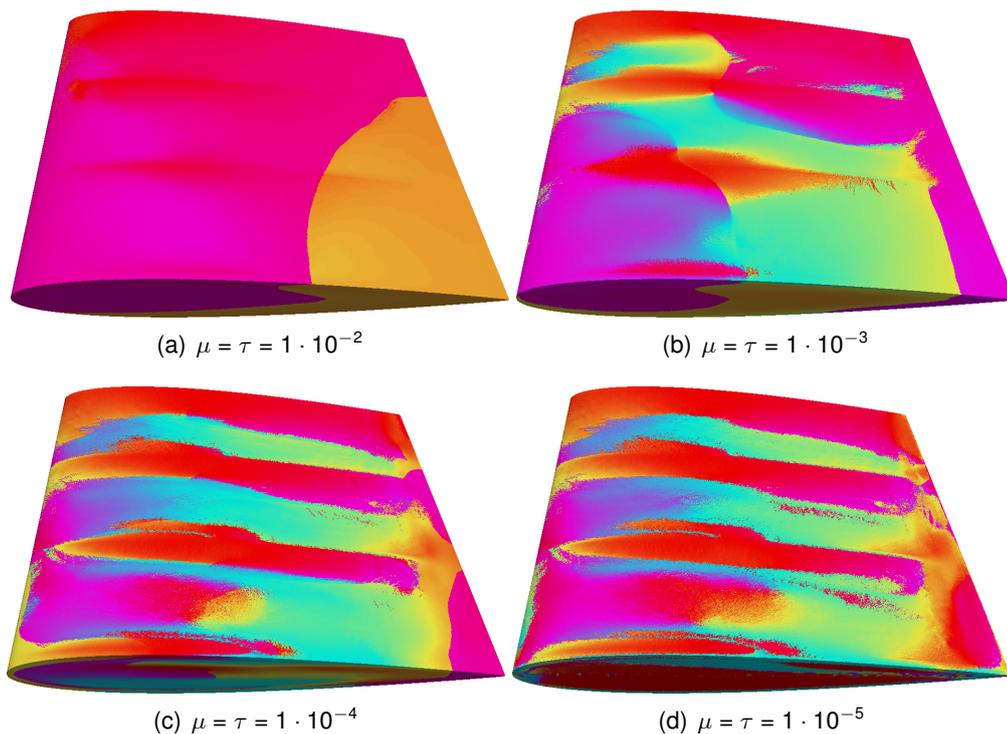


Abbildung 4.21: Geglättete Optimierungsergebnisse für unterschiedliche Werte der Glättungsparameter μ und τ

Abbildung 4.20 zeigt das mit der Spannungsmethode optimierte Drehwinkelfeld für Gitter 3 und dessen Glättung für das volle Gradientenfeld und für das tangential Gradientenfeld jeweils mit dem Skalierungsfaktor $\tau = 10^{-4}$. Tabelle 4.4 zeigt die Nachgiebigkeiten der mit den beiden Varianten geglätteten Winkelfelder für unterschiedliche Skalierungsfaktoren τ . Zu beachten ist, dass selbst eine Glättung mit $\tau = 0$ durch die Hin- und Herprojektion zwischen stetigen und stückweise konstanten Ansatzräumen zu einer nennenswerten Erhöhung der Nachgiebigkeit führt. Ein einfaches Nachglätten der optimierten Ergebnisse auf die beschriebene Art ist somit nicht empfehlenswert. Vielmehr sollte in mehreren Iterationen das geglättete Drehwinkelfeld der vorigen Iteration als Zieldrehwinkelfeld $\bar{\alpha}$ gemäß Kapitel 3.3.3 verwendet werden. Abbildung 4.21 zeigt die numerischen Ergebnisse der iterativen tangentialen Glättung in Verbindung mit der Spannungsmethode, ausgehend von der ungeglätteten Optimallösung der Spannungsmethode. Als Parameter μ zur Gewichtung der geglätteten Lösung und als Glättungsparameter τ wurden jeweils dieselben Werte gewählt. Abbildung 4.22 zeigt die jeweiligen Optimierungsverläufe für die verschiedenen Werte von τ und μ .

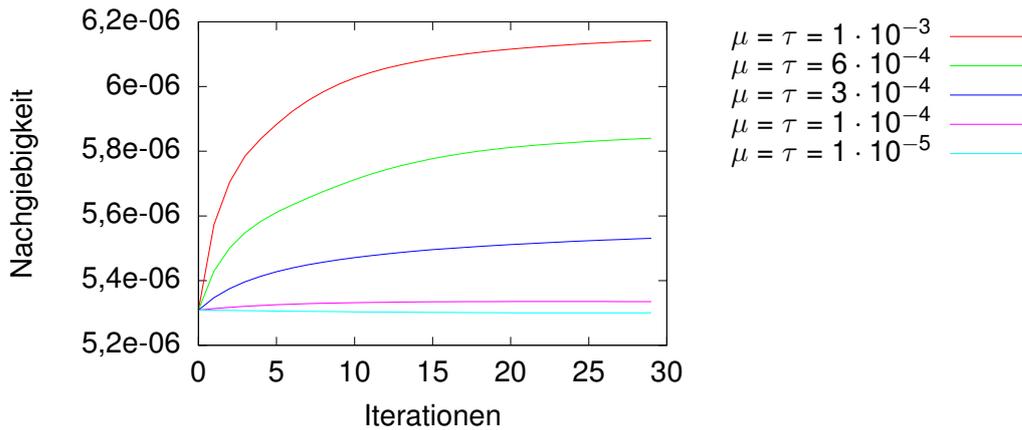


Abbildung 4.22: Iterative Glättung für unterschiedliche Werte der Glättungsparameter μ und τ

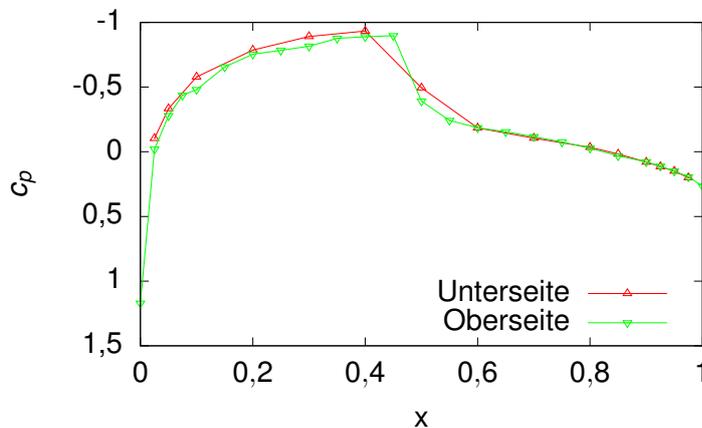


Abbildung 4.23: Druckprofil der Neumann-Randbedingungen, Anstellwinkel $-0,08^\circ$

4.6 Mehrlastfälle

Wir betrachten in diesem Kapitel die numerischen Ergebnisse zur Behandlung von Mehrlastfällen bei der Optimierung mittels der Spannungsmethode gemäß den theoretischen Resultaten aus Kapitel 3.3.2. Zusätzlich zu dem in Abbildung 4.3 (Seite 85) dargestellten Druckprofil, das in den bisherigen Einzellastuntersuchungen verwendet wurde, betrachten wir ein zweites Druckprofil wie es in Abbildung 4.23 dargestellt ist, das ebenfalls [31] entnommen ist. Die beiden unterschiedlichen Druckprofile entsprechen den Messungen in Windkanalversuchen für einen Anstellwinkel von 2° im bisher betrachteten Fall und einem Anstellwinkel von $-0,08^\circ$ in dem in Abbildung 4.23 dargestellten Fall. Wir wählen diese beiden, sich stark voneinander unterscheidenden Druck-

4 Numerische Ergebnisse

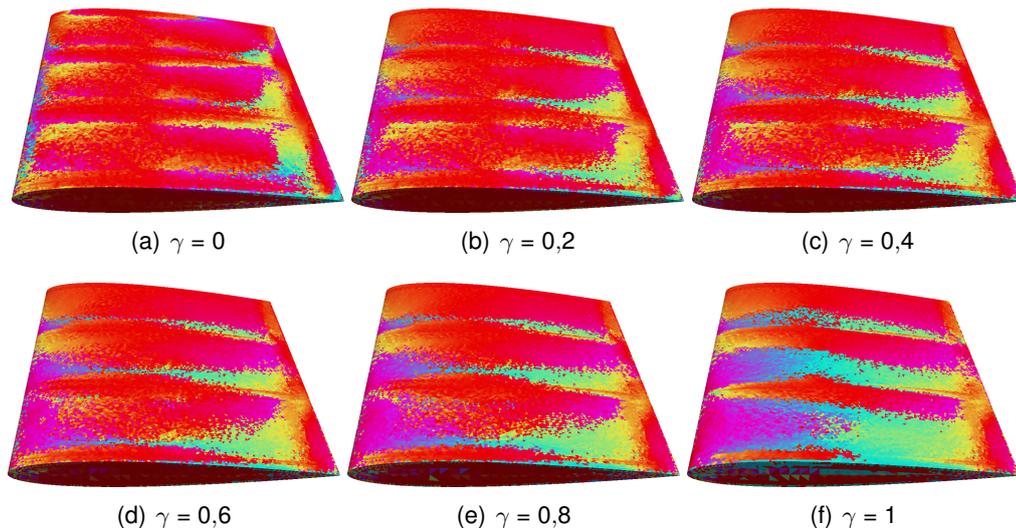


Abbildung 4.24: Optimierungsergebnisse der Mehrlastfalloptimierung für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren γ

profile, um deutliche Unterschiede in den jeweiligen Verzerrungs- und Spannungsfeldern zu erhalten. Die den jeweiligen Druckprofilen zugehörigen Nachgiebigkeiten bezeichnen wir mit W_j ($j = 1,2$) und betrachten als zu minimierendes Zielfunktional die gewichtete Summe

$$W_\gamma := \gamma W_1 + (1 - \gamma) W_2$$

für $\gamma \in [0,1]$.

Abbildung 4.24 zeigt die optimierten Winkelfelder für eine Auswahl von Werten für γ . Ein Wert von $\gamma = 0$ entspricht einer Optimierung für den ersten Einlastfall und somit einer Minimierung von W_1 , ein Wert von $\gamma = 1$ einer Optimierung des zweiten Einlastfalls und einer reinen Minimierung von W_2 . Verwendet wurde hierbei Gitter 1 und ein unidirektionales Anfangswinkelfeld von $\alpha \equiv 90^\circ$. Die zugehörigen Nachgiebigkeiten der optimierten Drehwinkelfelder für weitere Werte von γ können Abbildung 4.25 entnommen werden. Die blaue und die grüne Kurve zeigen die Nachgiebigkeiten der jeweiligen Einzellasten und die rote Kurve zeigt die gewichtete Summe. Abbildung 4.26 zeigt die Paretofront der Nachgiebigkeiten der beiden Einzellastfälle für unterschiedliche Werte von γ .

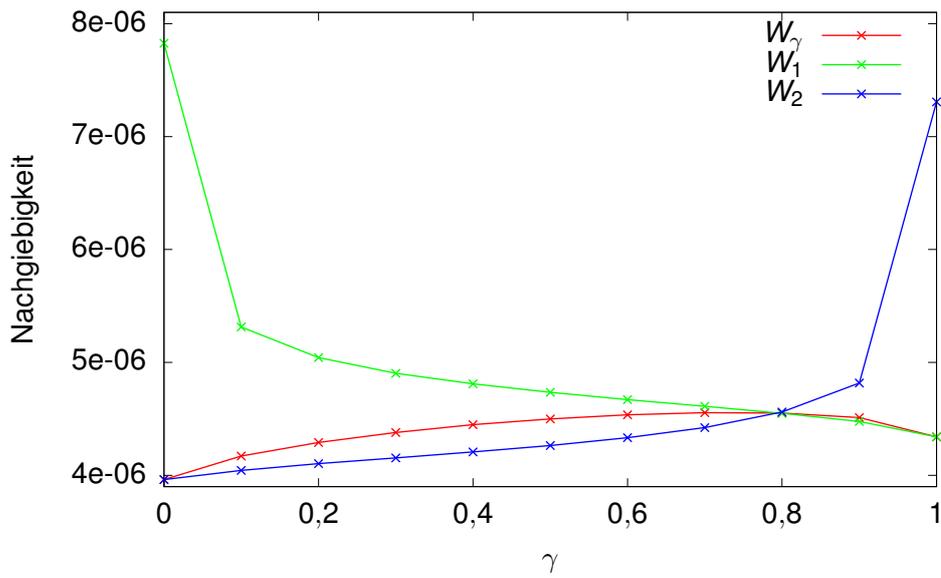


Abbildung 4.25: Nachgiebigkeiten der Einzellasten sowie deren gewichtete Summe für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren γ

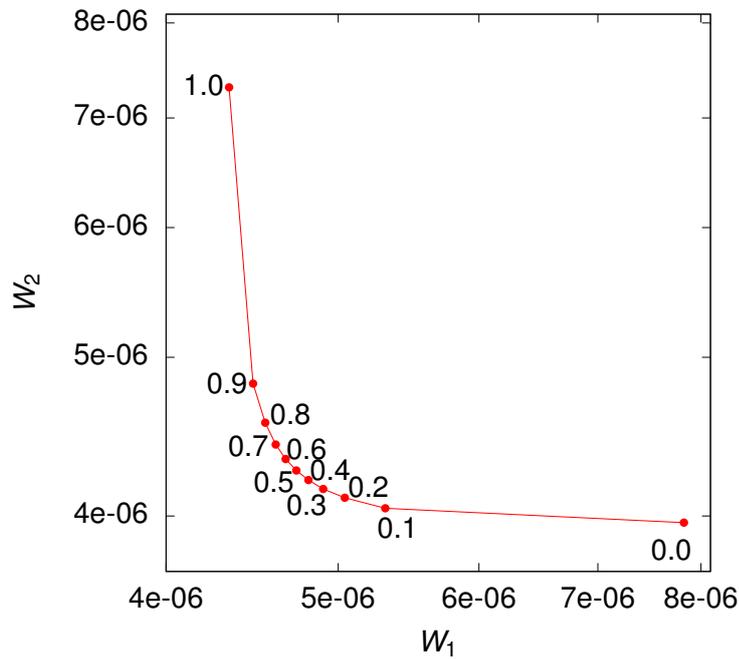


Abbildung 4.26: Paretofront der Nachgiebigkeiten der Einzellastfälle für unterschiedliche Werte von γ

4.7 Vergleich der Spannungs- und Verzerrungsmethode

Alle theoretischen Ergebnisse der Spannungsmethode sind wie in Kapitel 3.3.4 hergeleitet analog auf die Verzerrungsmethode übertragbar. Bereits 1990 zeigte Pedersen [38], dass bei der Anwendung der Verzerrungsmethode zur Minimierung der Nachgiebigkeit die Verzerrungsenergiedichte, entgegen der Intuition, punktweise maximiert werden muss. Weiterführende Aussagen dieser Art basierend auf den klassischen Prinzipien der Mechanik und deren Ableitungen diskutieren Cheng und Pedersen [9]. Verschiedene Autoren [35, 10, 40, 30] beschreiben ein besseres numerisches Verhalten der Spannungsmethode gegenüber der Verzerrungsmethode im iterativen Einsatz. Wir wollen die von uns entwickelte dreidimensionale Methode diesbezüglich untersuchen.

Bei den Untersuchungen in diesem Kapitel testen wir die Spannungsmethode und die Verzerrungsmethode jeweils in unterschiedlichen Szenarien. Zum einen vergleichen wir die resultierenden Zielfunktionalwerte der Methoden, wenn die lokale Verzerrungsenergiedichte punktweise entweder maximiert oder minimiert wird. Außerdem wenden wir die vier hieraus entstehenden Kombinationen zum einen auf den in der bisherigen Diskussion verwendeten Lastfall an, bei dem die Verformung im Wesentlichen durch die Vorgabe von Kräften auf die äußere Schale definiert wird. In weiteren Betrachtungen geben wir ein Verformungsfeld vor, das durch die Vorgabe von Dirichlet-Randbedingungen auf den gesamten Rand des Gebietes Ω definiert wird, und wenden darauf erneut sowohl Spannungs- als auch Verzerrungsmethode jeweils in Kombination mit punktweiser Maximierung und Minimierung der Verzerrungsenergiedichte an.

Abbildung 4.27 zeigt den Vergleich von Spannungs- und Verzerrungsmethode für das bisher untersuchte Verschiebungs-Traktions-Problems, bei dem ein Kopfende der Flügelgeometrie fixiert ist und die Tragfläche durch Krafteinwirkung auf den übrigen Rand verformt wird. Eine punktweise Minimierung der Verzerrungsenergiedichte führt bei der Spannungsmethode wie bereits beobachtet zu einer numerisch stabilen Minimierung der Gesamtnachgiebigkeit. Bei der Verzerrungsmethode dahingegen liefert eine punktweise Minimierung der Verzerrungsenergiedichte eine numerisch stabile Maximierung der Gesamtnachgiebigkeit. Diese Ergebnisse decken sich mit den theoretischen Resultaten in [9]. Dahingegen führt für diesen Lastfall eine punktweise Maximierung der Verzerrungsenergiedichte weder bei der Spannungs- noch bei der Verzerrungsmethode zu einer numerisch stabilen Maximierung oder Minimierung der Nachgiebigkeit.

Die theoretischen Resultate in [9] beruhen auf der Tatsache, dass für den definierten Lastfall die die Verformung verursachenden Kräfte in Form von Volumen- und Oberflä-

4.7 Vergleich der Spannungs- und Verzerrungsmethode

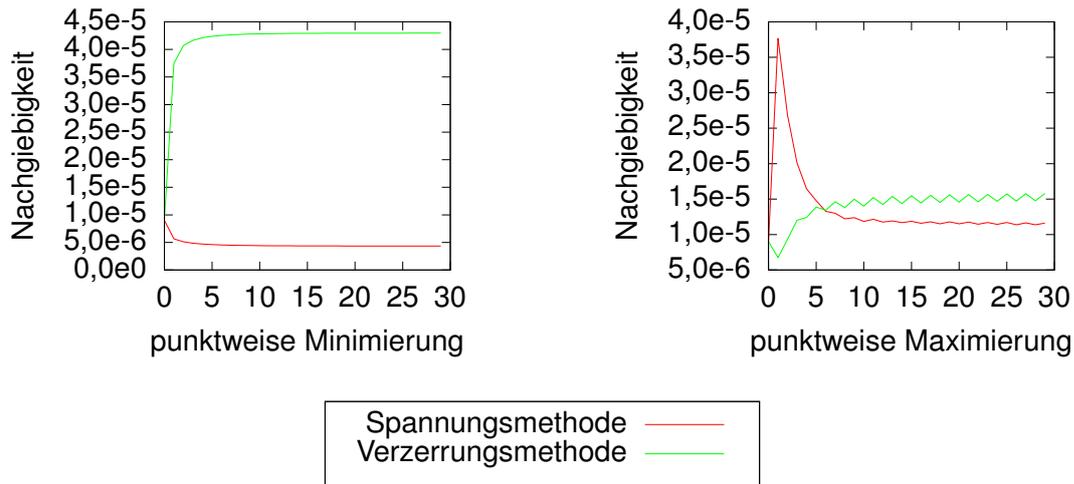


Abbildung 4.27: Spannungs- und Verzerrungsmethode zur Minimierung und Maximierung der Nachgiebigkeit für durch Krafteinwirkung verursachte Verformung

chenkräften explizit vorgegeben sind. Diese werden als ruhende Lasten angenommen, was bedeutet, dass sie sich durch die Verformung des Werkstückes und die damit verbundenen räumlichen Verschiebungen der einzelnen Punkte nicht verändern.

Eine andere Situation tritt ein, wenn die Verformung des Werkstückes im Wesentlichen durch die Vorgabe von Dirichlet-Randbedingungen auf dem gesamten Rand vorgegeben ist. Hierbei sind die auf den Rand wirkenden Kräfte zum einen zunächst unbekannt, und zum anderen ändert sich die Gesamtenergie der auf den Rand einwirkenden Kräfte mit sich änderndem Materialverhalten. Veranschaulichen kann man sich dies am Beispiel eines Würfels, den man durch Krafteinwirkung zu einem Quader mit vorgegeben Seitenlängen staucht oder streckt. Die Dirichlet-Randbedingungen entsprechen dabei den Verschiebungen der Randpunkte vom Würfel zum Quader. Die benötigten Oberflächenkräfte sind dabei sicherlich davon abhängig, ob ein Schwamm oder ein massiver Stahlwürfel verformt werden soll. Wie gesagt entspricht dieser Lastfall nicht demjenigen aus [9]. Nichtsdestotrotz können wir im Rahmen numerischer Untersuchungen unsere Verfahren auch für diesen Lastfall testen.

In Abbildung 4.28 sind die entsprechenden Ergebnisse für einen durch Dirichlet-Randbedingungen vorgegebenen Verformungszustand abgebildet. Als auf dem Rand vorgegebene Verschiebungen wurde dabei der Verformungszustand der nicht optimierten Ausgangskonstellation des zuvor behandelten Lastfalls gewählt. Eine punktweise Minimierung der Verzerrungsenergiedichte liefert dabei für die Spannungsmethode eine

4 Numerische Ergebnisse

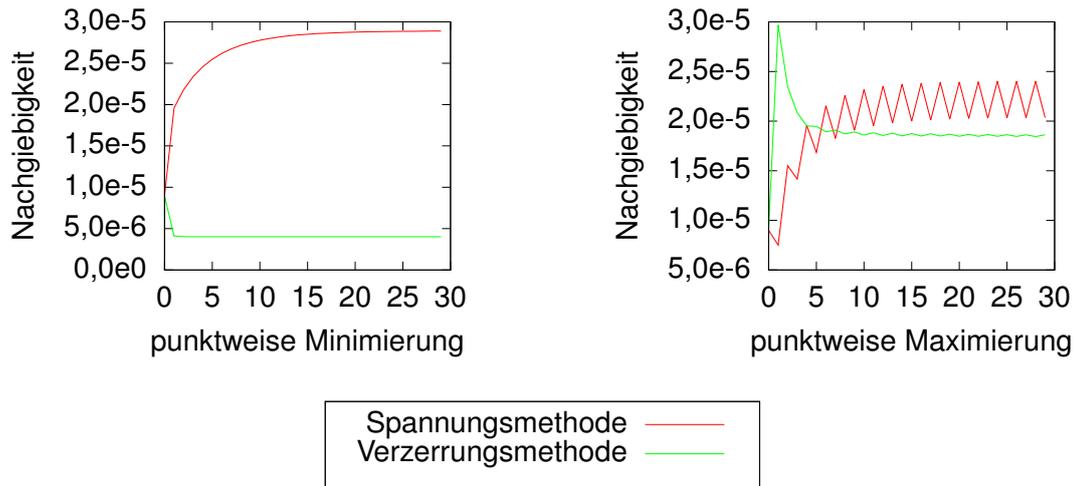


Abbildung 4.28: Spannungs- und Verzerrungsmethode zur Minimierung und Maximierung der Nachgiebigkeit für durch Randbedingung vorgegebene Verformung

numerisch stabile Maximierung der Gesamtnachgiebigkeit und für die Verzerrungsmethode eine numerisch stabile Minimierung. Dem gegenüber führt eine punktweise Maximierung weder für Spannungs- noch für Verzerrungsmethode zu einem konvergenten Verhalten. Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass für einen weitestgehend automatisierten Einsatz der hier verwendeten Methoden auf beliebige Lastfälle zusätzliche theoretische Erkenntnisse zwingend erforderlich sind.

4.8 Kopplung mit Topologie-Optimierung

Die bisherigen Resultate zeigen sehr deutlich eine Abhängigkeit der optimalen Materialausrichtung in der Schale des Tragflügelmodells von der inneren Struktur, die in den bisherigen numerischen Untersuchungen aus wenigen einfachen Plattenverstreibungen bestanden hat. Neben der Materialausrichtung in der Schale ist zu erwarten, dass auch die Materialverteilung im gesamten Volumen des Flügels einen signifikanten Einfluss auf dessen Verformungseigenschaften unter Krafteinwirkung hat. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, für eine gegebene Menge eines isotropen Materials eine optimale Verteilung dieses Materials im Inneren des Tragflügelmodells zu finden, sodass die Nachgiebigkeit des Gesamtmodells minimiert wird. Gekoppelt wird diese Minimierung mit der Optimierung der Materialausrichtung in der Schale mittels der in den vorigen Kapiteln erarbeiteten Spannungsmethode.

Für die Optimierung der Topologie im Innenteil der Tragfläche verwenden wir einen Algorithmus von Stoffel [45], der im Rahmen dessen Promotion entwickelt und implementiert wurde. Hierbei handelt es sich um die Umsetzung eines von Amstutz und Andrá in [2] vorgestellten Algorithmus. Für Details sowohl zur Theorie als auch zur numerischen Umsetzung des Verfahrens zur Topologieoptimierung wird auf [45] verwiesen. In dieser Arbeit wollen wir die Kopplung der Verfahren zur Optimierung der Materialausrichtung und der Topologie untersuchen und führen hierzu zunächst in aller Kürze die Grundkonzepte ein, die zum Verständnis der Resultate notwendig sind.

4.8.1 Kurzeinführung Topologieoptimierung mittels Formsensitivitäten

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Für dieses Gebiet wird ein Störungsfeld wie folgt definiert.

Definition 4.1: Für ein Gebiet Ω mit hinreichend glattem Rand, ein $t_0 > 0$ und ein hinreichend glattes Vektorfeld

$$V : \Omega \times [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

definieren wir eine Gebietsstörung als Feld

$$\Omega_t := \mathcal{T}_t(\Omega)[V] := \{x + tV(x, t) | x \in \Omega\} \quad t \in [0, t_0].$$

Als ersten Schritt in Richtung der Sensitivität eines Zielfunktional bezüglich Topologieänderungen wollen wir nun zunächst die Sensitivität bezüglich Formänderungen untersuchen. Hierzu betrachten wir ein reellwertiges Zielfunktional J , das für Ω und auf einer hinreichend großen Umgebung von Ω im Formenraum wohldefiniert ist.

Definition 4.2: Für ein Gebiet Ω und ein stetiges Vektorfeld V nennen wir ein Formfunktional J formableitbar, falls der Grenzwert

$$dJ(\Omega)[V] := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(\mathcal{T}_t(\Omega)[V]) - J(\Omega)}{t}$$

existiert, und die Abbildung $V \mapsto dJ(\Omega)[V]$ linear und stetig ist. Wir nennen $dJ(\Omega)[V]$ Formableitung in Richtung des Vektorfeldes V .

Die Formableitung ist ein hilfreiches Mittel um die Randpunkte des Gebietes Ω im Rahmen eines Abstiegsverfahrens derart zu verschieben, dass dadurch ein neues Gebiet

4 Numerische Ergebnisse

mit einem besseren Zielfunktionalwert entsteht. Hierbei sind jedoch nur Formveränderungen möglich, bei denen die Topologie des ursprünglichen Gebietes erhalten bleibt. Topologieänderungen beispielsweise durch Einbringen oder Verschließen von Löchern werden im Rahmen dieser Theorie nicht abgedeckt. Abhilfe schafft hier das Konzept der Topologieableitung.

Definition 4.3: Für jeden Punkt $x \in \Omega$ und $\tau > 0$ bezeichnen wir die kugelförmige Umgebung um x mit Radius τ als $B_\tau(x)$. Damit definieren wir für ein Formfunktional J die Abbildung

$$\psi_x(\tau) := J\left(\Omega \setminus \overline{B_\tau(x)}\right).$$

Weiter definieren wir für eine Abbildung f mit $f(\tau) \rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow 0$ die Topologieableitung von J an der Stelle x als

$$D_T J(x) := \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\psi_x(\tau) - \psi_x(0)}{f(\tau)},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Die Topologieableitung kann verwendet werden, um zu bestimmen wie sich das Zielfunktional durch topologische Veränderungen an einer Stelle $x \in \Omega$ verändern würde. An Stellen, an denen die Topologieableitung hohe Werte annimmt, lohnt es sich „mehr Material hinzuzufügen“, während an Stellen mit niedriger Topologieableitung eher „Material weggenommen“ werden kann.

In der Definition der Topologieableitung beziehen sich die Auswertungen $\psi_x(0)$ und $\psi_x(\tau)$ für $\tau > 0$ durch das Einbringen eines Loches auf Auswertungen von J für Gebiete mit unterschiedlicher Topologie. Um diese zusätzliche Schwierigkeit zu umgehen führen wir die Berechnung der Topologieableitung auf die Formableitung zurück.

Satz 4.4: Für ein f wie in Definition 4.3, das zusätzlich differenzierbar ist, ein Gebiet Ω und ein formableitbares Formfunktional J gilt für $x \in \Omega$

$$D_T J(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \psi_x(\tau),$$

wobei $\frac{d}{d\tau} \psi_x(\tau)$ die Formableitung von $J\left(\Omega \setminus \overline{B_\tau(x)}\right)$ bezüglich einer Änderung von τ ist.

Beweis. [45] Theorem 3.3.1

□

Abschließend geben wir die konkrete Berechnung der Topologieableitung für das Problem der minimalen Nachgiebigkeit unter Einhaltung der Erhaltungsgleichungen der linearen Elastizität für isotrope Materialien an.

Satz 4.5: Die elastischen Eigenschaften eines isotropen Materials seien gegeben durch den Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl ν . Für das Zielfunktional

$$J : u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \sigma(u) \, dx$$

mit $\sigma(u) = \mathbf{C}_{E,\nu} \varepsilon(u)$ und $\mathbf{C}_{E,\nu}$ gemäß (2.45) (Seite 54) gilt dann

$$D_T J(x) = \frac{3}{4} \frac{1-\nu}{7-5\nu} \left[10 \sigma(u) : \varepsilon(u) - \frac{1+5\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \sigma(u) \operatorname{tr} \varepsilon(u) \right].$$

Beweis. [45] Kapitel 3.4.3

□

4.8.2 Das gekoppelte Optimierungsproblem

Im nun betrachteten Fall der gekoppelten Optimierung von Topologie im Innenraum des Flügels einerseits und der Materialausrichtung in der Schale andererseits zerlegen wir das Gebiet Ω gedanklich in mehrere Teile. Im Folgenden werden wir mit Ω_S den durch die Schale eingenommenen Teil des Tragflügels bezeichnen. Mit $\Omega_I := \Omega \setminus \Omega_S$ bezeichnen wir den gesamten durch die Schale eingeschlossenen Innenraum und mit $\Omega_{\text{akt}} \subset \Omega_I$ bezeichnen wir im iterativen Verlauf jeweils den Teil des Innenraums, der mit Material gefüllt ist. Ziel der Optimierung ist es, dass für die Materialverteilung im Inneren $|\Omega_{\text{akt}}| \leq \text{Vol}^* < |\Omega_I|$ für ein gegebenes Zielvolumen Vol^* gilt.

Das Problem der gekoppelten Optimierung von Topologie und Materialausrichtung ergibt sich mit diesen Notationen als

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in L^\infty(\Omega_S), \Omega_{\text{akt}} \subset \Omega_I} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_S} \varepsilon(u) : \mathbf{C}(\alpha) \varepsilon(u) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{akt}}} \varepsilon(u) : \mathbf{C}_{E,\nu} \varepsilon(u) \, dx \\ \text{unter} & \quad -\operatorname{div} \sigma(u) = g \quad \text{in } \Omega_S \cup \Omega_{\text{akt}} \\ & \quad \sigma(x) n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Gamma_N \\ & \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_D \\ & \quad \sigma(u) = \begin{cases} \mathbf{C}(\alpha) \varepsilon(u) & \text{in } \Omega_S \\ \mathbf{C}_{E,\nu} \varepsilon(u) & \text{in } \Omega_{\text{akt}} \end{cases} \\ & \quad |\Omega_{\text{akt}}| \leq \text{Vol}^* \end{aligned}$$

4.8.3 Numerische Umsetzung

Algorithmus 2 Naiver Ansatz zur Topologieoptimierung mittels Topologieableitung

```

1:  $\Omega_{\text{akt}} \leftarrow \Omega_1$  ▷ Start mit massivem Flügel
2:  $c \leftarrow c_0$  ▷ Konstante als Schwellenwert für Topologieableitung
3: repeat
4:    $u \leftarrow \text{SOLVEELASTICITY}(\Omega)$ 
5:    $\text{grad} \leftarrow \text{COMPUTETOPOLOGYGRADIENT}(u)$ 
6:    $\Omega_{\text{akt}} \leftarrow \{x \in \Omega_{\text{akt}} \mid \text{grad}(x) > c\}$ 
7:    $\text{UPDATE}(c)$ 
8: until  $|\Omega| < \text{vol\_target}$ 

```

Ein unmittelbarer Ansatz zur numerischen Umsetzung der Resultate aus Kapitel 4.8.1 ist in Algorithmus 2 skizziert. Beginnend mit einem massiven Flügel lösen wir zunächst die lineare Elastizität und werten in Abhängigkeit von deren Lösung die Topologieableitung aus. Anschließend werden alle Punkte $x \in \Omega_1$, in denen die Topologieableitung unterhalb eines konstanten Schwellenwerts c liegt, aus Ω_{akt} entfernt. Nach geeigneter Anpassung des Schwellenwerts c werden die Schritte iterativ wiederholt, bis das angestrebte Zielvolumen unterschritten ist.

Dieser naive Ansatz birgt einige Schwierigkeiten. Zum einen ist kein quantitativer Zusammenhang zwischen dem Schwellenwert c und dem Volumen des resultierenden neuen Gebiets Ω_{akt} ersichtlich. Für eine kontrollierte Reduzierung des Volumens ist eine rechenintensive Liniensuche bezüglich c notwendig. Außerdem ist das punktweise Entfernen von einzelnen Punkten $x \in \Omega_1$ in einem diskretisierten System nur in Form eines Entfernens von ganzen Gitterzellen der Diskretisierung umsetzbar. Dies führt zwangsläufig zu einer übermäßigen Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der Gitterdiskretisierung. Schließlich ist in dem skizzierten Ansatz kein Konzept für ein erneutes Schließen oder auch nur Verschieben von Löchern im Iterationsverlauf enthalten.

4.8.4 Level-Set und Volumen-Penalisation

Eine weniger direkte aber numerisch vielversprechende Variante der Topologieoptimierung besteht in der impliziten Darstellung der Materialverteilung durch eine Level-Set-Funktion der Form

$$\Phi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \begin{cases} \Phi(x) \geq 0, & \text{falls } x \in \Omega_{\text{akt}}, \\ \Phi(x) < 0, & \text{falls } x \notin \Omega_{\text{akt}}. \end{cases}$$

Diese bietet einige Vorteile gegenüber der einfachen Idee gemäß Algorithmus 2. Zum einen ist es auch mittels einer diskretisierten Level-Set-Funktion in einem stetigen Ansatzraum möglich, Gebiete bis zu einem gewissen Maße unabhängig von der vorliegenden Gitterdiskretisierung aufzulösen. Außerdem können durch Anheben der Level-Set-Funktion in Bereichen, in denen sich Löcher befinden, diese verschoben oder sogar ganz geschlossen werden.

Schließlich ist es im Rahmen eines Penalisierungs-Ansatzes möglich die Volumenabnahme in jedem Iterationsschritt zu steuern. Mittels eines Lagrange-Multiplikators $\lambda > 0$ wird ein penalisiertes Zielfunktional

$$J^\lambda(\Omega) := J(\Omega) + \lambda \max\{0, |\Omega_{\text{akt}}| - \text{Vol}^*\}$$

eingeführt. Über den Betrag des Lagrange-Multiplikators λ kann nun gesteuert werden, wie stark ein Abweichen von der Volumenrestriktion bestraft wird. Ein iteratives Anpassen von λ bleibt auch hier notwendig.

4.8.5 Optimalitätskriterium für Topologieoptimierung mittels Level-Set-Funktion und Topologieableitung

Mit der Topologieableitung haben wir eine Richtung vorgegeben, in der die Level-Set-Funktion verschoben werden soll, um eine Verbesserung des Zielfunktional zu erzielen. Leider ist durch sie allein noch kein Kriterium für Optimalität gegeben, da auch in einem Optimum die Topologieableitung nicht verschwinden muss. Stattdessen ist im Idealfall an jeder Stelle $x \in \Omega_1$, an der wegen $D_T J(x) \geq 0$ Material geschaffen werden soll, bereits Material, was sich durch $\Phi(x) \geq 0$ bestimmen lässt. Umgekehrt sollte $\Phi(x) \leq 0$ für jedes $x \in \Omega_1$ mit $D_T J(x) \leq 0$ gelten. Es lässt sich zeigen, dass in diesem erwünschten Zustand

$$\arccos\left(\frac{\langle D_T J, \Phi \rangle_{L^2}}{\|D_T J\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}}\right) = 0$$

gelten muss, was in [45] als Optimalitätskriterium für das Optimierungsverfahrens herangezogen wird.

4.8.6 Konkrete Implementierung

Die Kapitel 4.8.4 und 4.8.5 skizzieren lediglich die Grundzüge des in [45] entwickelten Optimierungsverfahrens. Anstelle der einfachen hier dargestellten Penalisierungsmethode wird in der Originalarbeit ein eleganteres Augmented-Lagrangian-Konzept

4 Numerische Ergebnisse

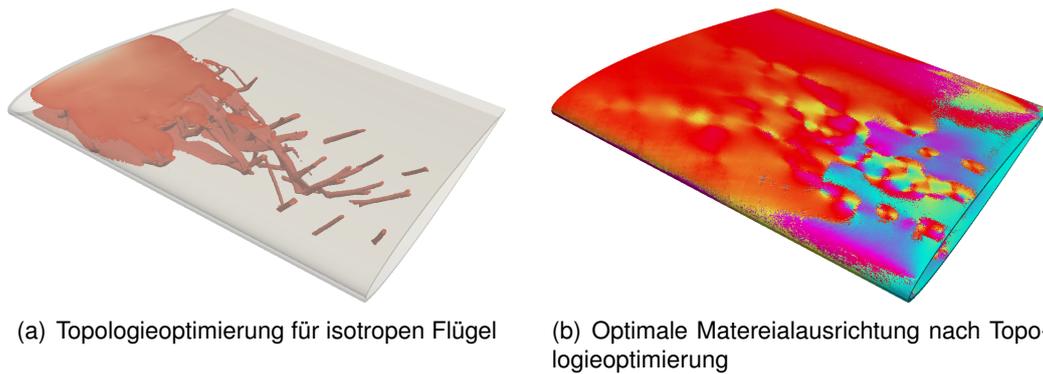


Abbildung 4.29: Optimierung der Topologie für einen vollständig isotropen Flügel und anschließende Optimierung der Materialausrichtung in der Schale

verfolgt. Außerdem kommt bei der iterativen Optimierung der benötigten Lagrange-Multiplikatoren und der Level-Set-Funktion ein One-Shot-Ansatz zur deutlichen Reduktion des Rechenaufwands zum Einsatz. Für eine detaillierte Darstellung der einzelnen aufeinander abgestimmten Bausteine verweisen wir auf die ausführlichen Herleitungen in [45].

4.8.7 Numerische Ergebnisse

Abschließend wollen wir einige numerische Ergebnisse zur Topologieoptimierung in Kopplung mit der Strukturoptimierung mittels der Spannungsmethode zusammenfassen. Hierbei betrachten wir unterschiedliche Varianten der Verknüpfung der beiden Optimierungsverfahren. Abbildung 4.29 (a) zeigt zunächst das Resultat der Topologieoptimierung für einen Flügel, der vollständig aus isotropem Material gefertigt ist. Dieser Fall entspricht somit den Untersuchungen aus der Originalarbeit zur Topologieoptimierung [45]. Lediglich das Volumen der Schale wird festgehalten, sodass sich die Volumenveränderung auf den inneren Teil der Konstruktion beschränkt. Als Gitter verwenden wir eine Diskretisierung, die in Ihrer Auflösung Gitter 3 entspricht jedoch anstelle der Plattenverstrebung ein massives Inneres besitzt. Zur besseren Vergleichbarkeit der Resultate wählen wir als Zielvolumen das Volumen von Gitter 3, das 30 % des massiven Flügels entspricht.

Abbildung 4.29 (b) zeigt das Ergebnis der Strukturoptimierung mittels Spannungsmethode im Anschluss an die Topologieoptimierung. Die Nachgiebigkeit der Optimallösung liegt mit etwa $1,682 \cdot 10^{-6}$ deutlich unter dem Vergleichswert von $5,309 \cdot 10^{-6}$, den die Spannungsmethode für die einfache Plattenstruktur von Gitter 3 liefert. Abbildung 4.30 (a) zeigt als weiteres Vergleichsresultat die Optimallösung der Spannungs-

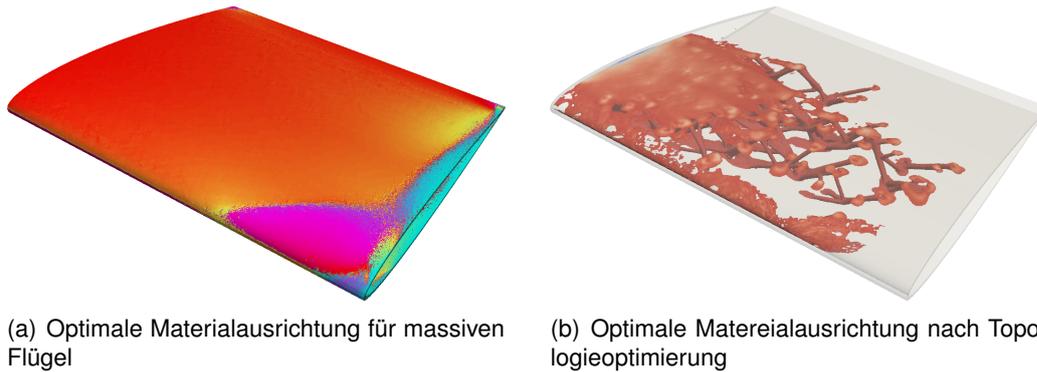


Abbildung 4.30: Optimierung der Materialausrichtung für einen massiven Flügel und anschließende Topologieoptimierung.

methode auf einen massiven Flügel, dessen Dichte im Inneren derart angepasst ist, dass die Gesamtmasse ebenfalls 30 % des massiven Flügels entspricht. Die Nachgiebigkeit liegt mit etwa $1,701 \cdot 10^{-6}$ leicht über der der Vergleichsrechnung, bei der die Spannungsmethode im Anschluss an die Topologieoptimierung durchgeführt wurde. Eine hiervon ausgehende Topologieoptimierung für die unskalierte Ausgangsdichte des massiven Tragflächenmodells führt zu Abbildung 4.30 (b) und einer Nachgiebigkeit von etwa $1,700 \cdot 10^{-6}$, was keine merkliche Verbesserung gegenüber dem massiven Flügel mit skalierten Dichte ergibt.

Schließlich betrachten wir die Ergebnisse der gekoppelten Optimierung, bei der beide Verfahren parallel ausgeführt wird. Zur Kopplung der Optimierung wird im Algorithmus zur Topologieoptimierung für jede Lösung der Elastizitätsgleichung ein vergleichsweise rechengünstiger Optimierungsschritt mittels der Spannungsmethode durchgeführt. Ergänzt werden diese Schritte zur Strukturoptimierung durch jeweils fünf reine Iterationen der Spannungsmethode im Voraus und im Anschluss an die verschachtelt gekoppelte Optimierung. Die Ergebnisse der gekoppelten Optimierung sind Abbildung 4.31 zu entnehmen. Mit einer Nachgiebigkeit von etwa $1,610 \cdot 10^{-6}$ erreicht die gekoppelte Methode den niedrigsten Zielfunktionswert aller hier durchgeführten Untersuchungen. Alle diskutierten Ergebnisse beziehen sich auf Tragflächenmodelle mit derselben Masse und sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

4 Numerische Ergebnisse

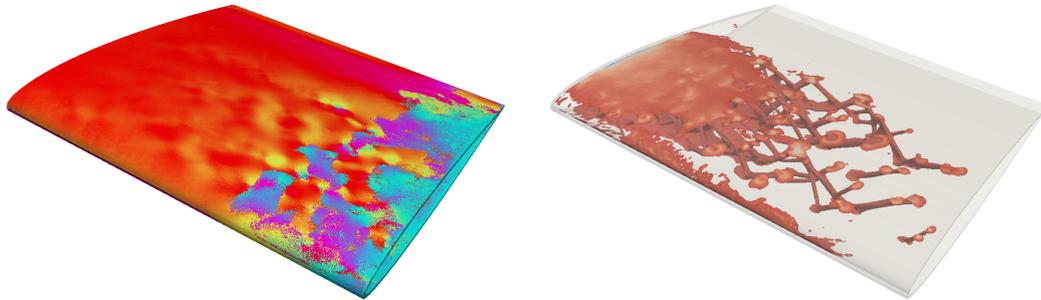


Abbildung 4.31: Gekoppelte Optimierung von Topologie und Materialausrichtung

Tabelle 4.5: Vergleich der Nachgiebigkeiten für unterschiedliche Kombinationen aus Topologie- und Strukturoptimierung

Optimierungsverfahren	Nachgiebigkeit
Materialausrichtung für Plattenkonstruktion	$5,309 \cdot 10^{-6}$
Materialausrichtung für massiven Flügel	$1,701 \cdot 10^{-6}$
Topologie nach Materialausrichtung	$1,700 \cdot 10^{-6}$
Materialausrichtung nach Topologie	$1,682 \cdot 10^{-6}$
gekoppelte Optimierung	$1,610 \cdot 10^{-6}$

5 Fazit

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das Ziel dieser Arbeit bestand aus Untersuchungen zur Durchführbarkeit und zum Potential einer punkweisen Optimierung der Materialausrichtung orthotroper Materialien, auch in Kopplung mit der Optimierung der Topologie im Inneren eines Werkstückes. Als Ergebnis sind Verfahren entstanden, die in ihrer Anwendung auf Probleme mit praxisrelevanter Größe überzeugen können. Mit der Verallgemeinerung der Spannungsmethode vom zweidimensionalen auf den dreidimensionalen Fall haben wir eine Methode vorgestellt, die in wenigen Iterationen Resultate liefert, die das Materialverhalten eines klassischen Laminats mit unidirektionalen Schichten von 0° , 90° und $\pm 45^\circ$ deutlich übertreffen. Unser Verfahren ermöglicht es somit, die Stärken von Faserverbundstoffen bestmöglich auszunutzen und so Werkstücke mit verbesserten elastischen Eigenschaften zu entwerfen. Die entwickelte Optimierungsmethode ist durch die punkweise Optimierung der Materialeigenschaften beliebig parallelisierbar und der numerische Aufwand ist dabei im Wesentlichen durch die Lösung der linearen Elastizität in jeder Iteration dominiert.

Durch die Behandlung von Mehrlastfällen ist es möglich robuste Optimierungsergebnisse zu erzielen, die in einer Vielzahl von möglichen Szenarien optimales Verhalten versprechen. Die vorgestellte Methode zur Glättung der Optimierungsergebnisse führt zu Resultaten, die mittels moderner Fertigungstechnik realisierbar erscheinen. Auch in Kopplung mit der Optimierung der Topologie im Innenraum des Werkstückes kann das erarbeitete Verfahren überzeugen, wobei die verschachtelte Kopplung im iterativen Optimierungsverlauf zu besseren Ergebnissen führt und einer einfachen Nacheinanderdurchführung der beiden Verfahren zu bevorzugen ist.

Es ist uns somit gelungen ein robustes Werkzeug zur Umsetzung praxisrelevanter Aufgabenstellungen zu entwerfen, das aussagekräftige Unterstützung bei der Entwicklung vielseitig optimierter Bauteile verspricht. Weiter zeigen die numerischen Resultate, dass sowohl die Optimierung der Topologie als auch der punktgenaue Einsatz von Faserverbundwerkstoffen das Potential zu signifikanten Verbesserungen des elastischen

Verhaltens gegenüber traditionellen Konstruktionsmethoden birgt.

5.2 Ausblick

Bei unseren Untersuchungen haben wir als Zielfunktionale die Gesamtnachgiebigkeit des Bauteils minimiert. Die Resultate versprechen somit Werkstücke mit einer hohen Steifigkeit. Keine Beachtung haben wir dahingegen der Festigkeit der optimierten Strukturen geschenkt. Ob das entstandene Bauteil die angelegten Kräfte unbeschadet aufnehmen kann, oder ob es zu Versagen in Form von Materialbruch kommt, lag außerhalb des Fokus dieser Arbeit. Im Rahmen weiterer Untersuchungen sollten auch Versagenskriterien miteinbezogen werden. In einem ersten Schritt wäre hierbei zwischen Versagen im Faserrichtung und Versagen in Querrichtung zur Faser zu unterscheiden. Bei einem Materialbruch, der durch Spannungen in Querrichtung zur Faser verursacht wird, ist eine Verhinderung durch Anpassung der Materialausrichtung auf Kosten der Nachgiebigkeit denkbar. Die Einbindung geeigneter Versagenskriterien in die punktweise Optimierung im Rahmen der Spannungsmethode ist somit erstrebenswert. Bei durch Faserbruch verursachtem Materialversagen dahingegen ist das Material in seiner festesten Richtung nicht in der Lage die lokal auftretenden Spannungen aufzunehmen, weshalb in diesem Fall eine lokale Änderung der Materialausrichtung nicht vielversprechend erscheint. Ein Ansatz zur Verhinderung von Faserbruch besteht in einer lokal anpassbaren Schalendicke. Eine optimale Schalendicke liegt vor, wenn die resultierende Verzerrungsenergiedichte in der gesamten Schalenkonstruktion konstant ist. Diese könnte als Anhaltspunkt gewählt werden, um die Schalendicke punktweise an die momentane Spannungsverteilung anzupassen. In dem erarbeiteten Umfeld in Kopplung mit der Topologieoptimierung ist die numerische Umsetzung dieser Idee naheliegend. Mittels der Freigabe einzelner Zellen als Freiheitsgrad für die Topologieoptimierung kann die verbleibende Schalendicke lokal verringert werden. Umgekehrt kann in Bereichen mit einer höheren erforderlichen Schalendicke die Topologieoptimierung auf einer dickeren Schale untersagt werden. Der Effekt einer resultierenden höheren Schalendicke an Stellen mit hoher Verzerrungsenergiedichte ist in den in dieser Arbeit enthaltenen numerischen Ergebnissen bereits zu erkennen.

Von viel grundsätzlicherem Interesse ist dahingegen die Fragestellungen nach einer Verallgemeinerung der erzielten Resultate der optimalen Materialausrichtungen auf den vollen dreidimensionalen Fall. Während bei Schalenkonstruktionen in natürlicher Weise eine Ebene, in der die Fasern verlaufen, vorgegeben und somit ein weiterer Freiheitsgrad zur vollen Problembeschreibung ausreichend ist, wären für den vollen

dreidimensionalen Fall beispielsweise die Bestimmung aller drei Eulerwinkel notwendig. Heuristische Methoden, bei denen die Materialorientierung je nach Problemstellung an den Achsen der Hauptspannungen oder Hauptdehnungen ausgerichtet werden existieren zwar, diese weisen jedoch nicht in jedem Fall ein konvergentes Verhalten auf und sind auch im Gegensatz zur hier vorgestellten Methode nicht für alle Arten von orthotropen Materialien anwendbar. Wenngleich auch die hier vorgestellten iterativen Verfahren in wenigen Iterationen gute Ergebnisse erzielen, bleibt der implizite Einfluss von lokalen Material- oder Topologieänderungen auf das Gesamtverformungsverhalten weiterhin von zentralem Interesse. Sollte diese, nach Wissen des Autors, bislang ungelöste Fragestellung gelöst werden, ergäben sich wertvolle weitere Einblicke, auch für die hier untersuchten Verfahren. Insbesondere eine allgemeine Antwort auf die Frage, in welchen Konstellationen die Spannungsmethode und in welchen die Verzerrungsmethode, eventuell sogar punktweise und im Iterationsverlauf wechselnd, vorzuziehen ist, ist von zentralem Interesse. Eine solche Antwort würde wichtige Erkenntnisse liefern, die eine vollautomatisierte Designoptimierung in greifbare Nähe brächten.

Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Akbari und S. J. Price. Simulation of dynamic stall for a naca 0012 airfoil using a vortex method. Journal of fluids and structures, 17(6):855–874, 2003.
- [2] S. Amstutz und H. André. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. Journal of Computational Physics, 216(2):573–588, 2006.
- [3] K. Atkinson und W. Han. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2007. ISBN 9780387258874.
- [4] N. V. Banichuk. Optimization of anisotropic properties of deformable media in plane problems of elasticity. Mechanics of Solids, 14(1):63–68, 1979.
- [5] E. J. Barbero. Finite element analysis of composite materials. Composite Materials: Design and Analysis Series. Taylor & Francis, 2008. ISBN 9781420054330.
- [6] H. J. Bartsch. Mathematische Formeln. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1968.
- [7] A. Borzi und V. Schulz. Computational Optimization of Systems Governed by Partial Differential Equations. Computational Science and Engineering. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. ISBN 9781611972054.
- [8] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, und C. Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. SIAM Journal on Scientific Computing, 16(5):1190–1208, 1995.
- [9] G. Cheng und P. Pedersen. On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles of mechanics. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 45(1):135–150, 1997.
- [10] H. C. Cheng, N. Kikuchi, und Z. D. Ma. An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material. Structural optimization, 8(2):101–112, 1994. ISSN 1615-1488.

- [11] P. G. Ciarlet. Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity. Number 1 in Mathematical Elasticity. North-Holland, 1994. ISBN 9780444817761.
- [12] S. C. Cowin. Optimization of the strain energy density in linear anisotropic elasticity. Journal of Elasticity, 34(1):45–68, 1994. ISSN 1573-2681.
- [13] N. D. Cristescu, E. M. Graciun, und E. Soós. Mechanics of Elastic Composites. CRC series–modern mechanics and mathematics. CRC Press, 2003. ISBN 9780203502815.
- [14] C. C. Critzos, H. H. Heyson, und R. W. Boswinkle. Aerodynamic characteristics of NACA 0012 airfoil section at angles of attack from 0 to 180 Degrees. National Advisory Committee for Aeronautics, 1955.
- [15] A. R. Diaz und M. P. Bendsøe. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. Structural Optimization, 4(1): 17–22, 1992.
- [16] G. Dziuk. Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen. De Gruyter Studium. De Gruyter, 2010. ISBN 9783110214819.
- [17] O. Forster. Analysis 2: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg Studium; Grundkurs Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2013. ISBN 9783663141730.
- [18] O. Forster. Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Grundkurs Mathematik. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. ISBN 9783658115456.
- [19] A. Friedman. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN 9780486318264.
- [20] Tomonari Furukawa, Jan Wei Pan, Jinquan Cheng, John G Michopoulos, und Yoshitaka Wada. Multi-linear modeling for characterization of nonlinear behavior of anisotropic materials. In ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, pages 989–997. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [21] W. Gawronski. Grundlagen der linearen Algebra: Studienbuch für Studierende der Mathematik, Informatik, Physik und anderer Naturwissenschaften ab 1. Semester. Studien-Text : Mathematik. Aula-Verlag, 1996. ISBN 9783891045664.

- [22] I. M. Gelfand und S. V. Fomin. Calculus of Variations. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN 9780486135014.
- [23] C. Geuzaine und J.-F. Remacle. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 79(11):1309–1331, 2009.
- [24] A. A. Hassan und R. D. Janaki. Effects of zero-mass “synthetic” jets on the aerodynamics of the naca-0012 airfoil. Journal of the American helicopter Society, 43(4):303–311, 1998.
- [25] N. J. Higham. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms: Second Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. ISBN 9780898715217.
- [26] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, und S. Ulbrich. Optimization with PDE Constraints. Mathematical Modelling: Theory and Applications. Springer Netherlands, 2008. ISBN 9781402088384.
- [27] P. Knabner und L. Angerman. Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2006. ISBN 9780387217628.
- [28] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, E. L. Pustyl'ii, und P. E. Sobolevskii. Integral operators in spaces of summable functions. Moscow, 1976.
- [29] P. D. Lax. Functional analysis. Pure and applied mathematics. Wiley, 2002. ISBN 9780471556046.
- [30] J. H. Luo und H. C. Gea. Optimal orientation of orthotropic materials using an energy based method. Structural optimization, 15(3):230–236, 1998. ISSN 1615-1488.
- [31] J. B. McDevitt und A. F. Okuno. Static and dynamic pressure measurements on a naca 0012 airfoil in the ames high reynolds number facility. 1985.
- [32] R. E. Megginson. An Introduction to Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998. ISBN 9780387984315.
- [33] N. G. Meyers und J. Serrin. $H = w$. Proceedings of the National Academy of Sciences, 51(6):1055–1056, 1964.
- [34] E. R. Naimon, H. M. Ledbetter, und W. F. Weston. Low-temperature elastic properties of four wrought and annealed aluminium alloys. Journal of Materials Science, 10(8):1309–1316, 1975. ISSN 1573-4803.

- [35] N. Olhoff, J. Thomsen, und J. Rasmussen. Topology optimization of bi-material structures. Elsevier Science Publisher BV, 1993.
- [36] J. W. Pan. On-line Nonlinear Characterization of Anisotropic Materials. Dissertation, 2010.
- [37] P. Pedersen. On optimal orientation of orthotropic materials. Structural Optimization, 1(2):101–106, 1989.
- [38] P. Pedersen. Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials. Structural Optimization, 2(1):55–63, 1990.
- [39] P. Pedersen. On thickness and orientational design with orthotropic materials. Structural Optimization, 3(2):69–78, 1991.
- [40] P. Pedersen. Optimal Designs - Structures and Materials - Problems and Tools (Draft). 2003.
- [41] M. Rouhi, H. Ghayoor, S. V. Hoa, und M. Hojjati. Multi-objective design optimization of variable stiffness composite cylinders. Composites Part B: Engineering, 69: 249 – 255, 2015. ISSN 1359-8368.
- [42] M. Rouhi, H. Ghayoor, S. V. Hoa, M. Hojjati, und P. M. Weaver. Stiffness tailoring of elliptical composite cylinders for axial buckling performance. Composite Structures, 150:115–123, 2016.
- [43] W. Rudin. Functional Analysis. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991. ISBN 9780070542365.
- [44] S. Setoodeh, M. M. Abdalla, und Z. Gürdal. Combined topology and fiber path design of composite layers using cellular automata. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30(6):413–421, 2005. ISSN 1615-1488.
- [45] R. Stoffel. Structural Optimization of Coupled Problems. Dissertation, Universität Trier, Universitätsring 15, 54296 Trier, 2013.
- [46] F. Tröltzsch. Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010. ISBN 9780821849040.
- [47] D. Werner. Funktionalanalysis. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540725367.

A Rechenregeln

A.1 Symmetrien des Elastizitätstensors

A.1.1 Rechte Subsymmetrie

Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ vierter Stufe erfüllt genau dann die rechte Subsymmetrie $\mathbf{A}_{ijkl} = \mathbf{A}_{ijlk}$ ($i, j, k, l = 1, \dots, d$), wenn für jeden schiefsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}^\top \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = 0$ gilt.

Beweis. Zum Beweis der Hinrichtung sei $\tilde{\boldsymbol{\eta}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ für einen beliebigen schiefsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Mit der Definition des Tensorprodukts gilt

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} + \mathbf{A}_{ijlk} \eta_{lk}) = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} - \mathbf{A}_{ijlk} \eta_{kl}) = 0$$

wobei die erste Gleichheit wegen $\eta_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, d$) für schiefsymmetrisches $\boldsymbol{\eta}$ gilt und die zweite Gleichheit aus der Schiefsymmetrie von $\boldsymbol{\eta}$ und der rechten Subsymmetrie von \mathbf{A} folgt.

Den Beweis der Rückrichtung führen wir indirekt und nehmen dazu an, dass für ein Tupel $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, d\}^4$ die Ungleichheit $\mathbf{A}_{ijkl} \neq \mathbf{A}_{ijlk}$ gilt und betrachten den schiefsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\eta_{kl} = 1, \eta_{lk} = -1$ und $\eta_{mn} = 0$ für die übrigen Einträge. Für das Produkt $\tilde{\boldsymbol{\eta}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ gilt damit

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_{m=1}^d \sum_{n=1}^d \mathbf{A}_{ijmn} \eta_{mn} = \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} + \mathbf{A}_{ijlk} \eta_{lk} = \mathbf{A}_{ijkl} - \mathbf{A}_{ijlk} \neq 0,$$

was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. □

A.1.2 Linke Subsymmetrie

Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ vierter Stufe erfüllt genau dann die linke Subsymmetrie $\mathbf{A}_{ijkl} = \mathbf{A}_{jilk}$ ($i, j, k, l = 1, \dots, d$), wenn für jeden Tensor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe die

A Rechenregeln

Symmetrie $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\eta})^\top \in \mathbb{R}^{d \times d}$ gilt.

Beweis. Der Beweis der Hinrichtung folgt sofort aus der Definition des Tensorproduktes $\tilde{\boldsymbol{\eta}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$, denn für \mathbf{A} mit linker Subsymmetrie gilt

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{jikl} \eta_{kl} = \tilde{\eta}_{ji}$$

und somit $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}^\top$.

Den Beweis der Rückrichtung führen wir indirekt mit der Annahme, dass für ein Tupel $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, d\}^4$ die Ungleichheit $\mathbf{A}_{ijkl} \neq \mathbf{A}_{jikl}$ gilt und betrachten speziell den Tensor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\eta_{kl} = 1$ und $\eta_{mn} = 0$ für die übrigen Einträge. Damit gilt für $\tilde{\boldsymbol{\eta}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_{m=1}^d \sum_{n=1}^d \mathbf{A}_{ijmn} \eta_{mn} = \mathbf{A}_{ijkl} \neq \mathbf{A}_{jikl} = \sum_{m=1}^d \sum_{n=1}^d \mathbf{A}_{jimn} \eta_{mn} = \tilde{\eta}_{ji}$$

was ein Widerspruch zur Symmetrie von $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ ist. □

A.1.3 Produkte symmetrischer Tensoren

Das Produkt eines Tensors $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ vierter Stufe mit linker Subsymmetrie mit einem symmetrischen Tensor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe lässt sich

1. im zweidimensionalen Fall zu

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \text{pr}_{2D}^{-1}(A \text{pr}_{2D}(\boldsymbol{\eta}))$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1111} & \mathbf{A}_{1122} & \mathbf{A}_{1112} + \mathbf{A}_{1121} \\ \mathbf{A}_{2211} & \mathbf{A}_{2222} & \mathbf{A}_{2212} + \mathbf{A}_{2221} \\ \mathbf{A}_{1211} & \mathbf{A}_{1222} & \mathbf{A}_{1212} + \mathbf{A}_{1221} \end{pmatrix}$$

vereinfachen, wobei pr_{2D} aus (2.33) symmetrische Matrizen in eine Darstellung als Vektor abbildet.

2. im dreidimensionalen Fall zu

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \text{pr}_{3D}^{-1}(A \text{pr}_{3D}(\boldsymbol{\eta}))$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1111} & \mathbf{A}_{1122} & \mathbf{A}_{1133} & \mathbf{A}_{1123} + \mathbf{A}_{1132} & \mathbf{A}_{1113} + \mathbf{A}_{1131} & \mathbf{A}_{1112} + \mathbf{A}_{1121} \\ \mathbf{A}_{2211} & \mathbf{A}_{2222} & \mathbf{A}_{2233} & \mathbf{A}_{2223} + \mathbf{A}_{2232} & \mathbf{A}_{2213} + \mathbf{A}_{2231} & \mathbf{A}_{2212} + \mathbf{A}_{2221} \\ \mathbf{A}_{3311} & \mathbf{A}_{3322} & \mathbf{A}_{3333} & \mathbf{A}_{3323} + \mathbf{A}_{3332} & \mathbf{A}_{3313} + \mathbf{A}_{3331} & \mathbf{A}_{3312} + \mathbf{A}_{3321} \\ \mathbf{A}_{2311} & \mathbf{A}_{2322} & \mathbf{A}_{2333} & \mathbf{A}_{2323} + \mathbf{A}_{2332} & \mathbf{A}_{2313} + \mathbf{A}_{2331} & \mathbf{A}_{2312} + \mathbf{A}_{2321} \\ \mathbf{A}_{1311} & \mathbf{A}_{1322} & \mathbf{A}_{1333} & \mathbf{A}_{1323} + \mathbf{A}_{1332} & \mathbf{A}_{1313} + \mathbf{A}_{1331} & \mathbf{A}_{1312} + \mathbf{A}_{1321} \\ \mathbf{A}_{1211} & \mathbf{A}_{1222} & \mathbf{A}_{1233} & \mathbf{A}_{1223} + \mathbf{A}_{1232} & \mathbf{A}_{1213} + \mathbf{A}_{1231} & \mathbf{A}_{1212} + \mathbf{A}_{1221} \end{pmatrix}$$

und pr_{3D} gemäß (2.34) vereinfachen.

Beweis. Unter Ausnutzung der Symmetrie von η folgt

$$(\mathbf{A}\eta)_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} = \sum_{k=1}^d \left(\mathbf{A}_{ijkk} \eta_{kk} + \sum_{l=k+1}^d (\mathbf{A}_{ijkl} + \mathbf{A}_{ijlk}) \eta_{kl} \right).$$

Die Symmetrie von $\mathbf{A}\eta$ folgt aus A.1.2 und zusammen folgt die Behauptung. \square

A.2 Tensorrechenregeln

A.2.1 Symmetrien von Skalarprodukten von Tensoren

1. Für Tensoren $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe gilt

$$\text{sym } \eta : \tilde{\eta} = \eta : \text{sym } \tilde{\eta}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{sym } \eta : \tilde{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta^\top) : \tilde{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\eta_{ij} + \eta_{ji}) \tilde{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\eta_{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \eta_{ji} \tilde{\eta}_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \eta_{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \eta_{ji} \tilde{\eta}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \eta_{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \eta_{ij} \tilde{\eta}_{ji} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\eta_{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \eta_{ij} \tilde{\eta}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \eta_{ij} (\tilde{\eta}_{ij} + \tilde{\eta}_{ji}) = \frac{1}{2} \eta : (\tilde{\eta} + \tilde{\eta}^\top) = \eta : \text{sym } \tilde{\eta} \end{aligned}$$

\square

A Rechenregeln

2. Für einen Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ vierter Stufe mit Hauptsymmetrie und Tensoren $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zweiter Stufe gilt

$$\mathbf{A}\eta : \tilde{\eta} = \eta : \mathbf{A}\tilde{\eta}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\eta : \tilde{\eta} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\mathbf{A}\eta)_{ij} \tilde{\eta}_{ij} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{ijkl} \eta_{kl} \tilde{\eta}_{ij} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \mathbf{A}_{klij} \eta_{kl} \tilde{\eta}_{ij} = \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_{klij} \eta_{kl} \tilde{\eta}_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \eta_{kl} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_{klij} \tilde{\eta}_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \eta_{kl} (\mathbf{A}\tilde{\eta})_{kl} = \eta : \mathbf{A}\tilde{\eta} \end{aligned}$$

□

A.3 Transformation von Koordinatensystemen

A.3.1 Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Zweidimensionalen

Für $\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $R(\alpha)$ aus (2.27) gilt

$$R(\alpha)\eta R(\alpha)^\top = \mathbf{T}(\alpha)\eta$$

wobei $\mathbf{T}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2 \times 2}$ mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{11ij}(\alpha))_{i,j=1,2} &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\ (\mathbf{T}_{12ij}(\alpha))_{i,j=1,2} &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\ (\mathbf{T}_{21ij}(\alpha))_{i,j=1,2} &= (\mathbf{T}_{12ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^\top \\ (\mathbf{T}_{22ij}(\alpha))_{i,j=1,2} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis. Für $\tilde{\eta} := R(\alpha)\eta R(\alpha)^\top$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{11} &= \cos \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{21} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) \\ \tilde{\eta}_{12} &= \cos \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{21} \sin \alpha) \\ \tilde{\eta}_{21} &= \cos \alpha(\eta_{21} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha) \\ \tilde{\eta}_{22} &= \cos \alpha(\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{21} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha).\end{aligned}$$

□

A.3.2 Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Zweidimensionalen

Für symmetrische $\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vereinfacht sich die Rotation aus A.3.1 zu

$$R(\alpha)\eta R(\alpha)^\top = \text{pr}_{2D}^{-1}(T(\alpha) \text{pr}_{2D}(\eta))$$

mit pr_{2D} aus (2.33) und

$$T(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Beweis. Mit Ausnutzung der Symmetrie von η ergibt sich für $\tilde{\eta} := R(\alpha)\eta R(\alpha)^\top$ aus dem Beweis von A.3.1

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{11} &= \cos \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) \\ \tilde{\eta}_{12} &= \cos \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha) \\ \tilde{\eta}_{21} &= \tilde{\eta}_{12} \\ \tilde{\eta}_{22} &= \cos \alpha(\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{12} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha)\end{aligned}$$

□

A.3.3 Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen

Für $\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $R_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) aus (2.28)-(2.30) gilt

$$R_i(\alpha)\eta R_i(\alpha)^\top = T_i(\alpha)\eta \quad (i = 1, 2, 3)$$

A Rechenregeln

wobei $\mathbf{T}_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ mit

$$(\mathbf{T}_{1,11ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{1,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{1,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{1,21ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{1,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^\top$$

$$(\mathbf{T}_{1,22ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{1,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ 0 & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{1,31ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{1,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^\top$$

$$(\mathbf{T}_{1,32ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{1,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^\top$$

$$(\mathbf{T}_{1,33ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,11ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & 0 & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \cos^2 \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin^2 \alpha & 0 & -\sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,21ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{2,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^\top$$

A.3 Transformation von Koordinatensystemen

$$(\mathbf{T}_{2,22ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{2,31ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{2,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^{\top}$$

$$(\mathbf{T}_{2,32ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{2,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^{\top}$$

$$(\mathbf{T}_{2,33ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & 0 & \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,11ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & 0 \\ -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,21ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{3,12ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^{\top}$$

$$(\mathbf{T}_{3,22ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T}_{3,31ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{3,13ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^{\top}$$

$$(\mathbf{T}_{3,32ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = (\mathbf{T}_{3,23ij}(\alpha))_{i,j=1,2}^{\top}$$

$$(\mathbf{T}_{3,33ij}(\alpha))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Rechenregeln

Beweis. Für $\tilde{\eta}_1 := T_1(\alpha)\eta T_1(\alpha)^\top$ gilt

$$\tilde{\eta}_{1,11} = \eta_{11}$$

$$\tilde{\eta}_{1,12} = \eta_{12} \cos \alpha + \eta_{13} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,13} = \eta_{13} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,21} = \eta_{21} \cos \alpha + \eta_{31} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,22} = \cos \alpha(\eta_{22} \cos \alpha + \eta_{32} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{23} \cos \alpha + \eta_{33} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{1,23} = \cos \alpha(\eta_{23} \cos \alpha + \eta_{33} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{22} \cos \alpha + \eta_{32} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{1,31} = \eta_{31} \cos \alpha - \eta_{21} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,32} = \cos \alpha(\eta_{32} \cos \alpha - \eta_{22} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{33} \cos \alpha - \eta_{23} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{1,33} = \cos \alpha(\eta_{33} \cos \alpha - \eta_{23} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{32} \cos \alpha - \eta_{22} \sin \alpha)$$

Für $\tilde{\eta}_2 := R_2(\alpha)\eta R_2(\alpha)^\top$ gilt

$$\tilde{\eta}_{2,11} = \cos \alpha(\eta_{11} \cos \alpha - \eta_{31} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{13} \cos \alpha - \eta_{33} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,12} = \eta_{12} \cos \alpha - \eta_{32} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,13} = \cos \alpha(\eta_{13} \cos \alpha - \eta_{33} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{11} \cos \alpha - \eta_{31} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,21} = \eta_{21} \cos \alpha - \eta_{23} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,22} = \eta_{22}$$

$$\tilde{\eta}_{2,23} = \eta_{23} \cos \alpha + \eta_{21} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,31} = \cos \alpha(\eta_{31} \cos \alpha + \eta_{11} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{33} \cos \alpha + \eta_{13} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,32} = \eta_{32} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,33} = \cos \alpha(\eta_{33} \cos \alpha + \eta_{13} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{31} \cos \alpha + \eta_{11} \sin \alpha)$$

Für $\tilde{\eta}_3 := R_3(\alpha)\eta R_3(\alpha)^\top$ gilt

$$\tilde{\eta}_{3,11} = \cos \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{21} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,12} = \cos \alpha(\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{21} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,13} = \eta_{13} \cos \alpha + \eta_{23} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,21} = \cos \alpha(\eta_{21} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha) + \sin \alpha(\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,22} = \cos \alpha(\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha) - \sin \alpha(\eta_{21} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,23} = \eta_{23} \cos \alpha - \eta_{13} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,31} = \eta_{31} \cos \alpha + \eta_{32} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,32} = \eta_{32} \cos \alpha - \eta_{31} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,33} = \eta_{33}$$

□

A.3.4 Rotation von Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen durch Vorgabe der rotierten Basis

Für $\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $R_{\tilde{e}_i}$ aus (2.31) gilt

$$R_{\tilde{e}_i} \eta R_{\tilde{e}_i}^\top = \mathbf{T}_{\tilde{e}_i} \eta \quad (i = 1, 2, 3)$$

wobei $\mathbf{T}_{\tilde{e}_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ mit

$$\mathbf{T}_{\tilde{e}_i, klmn} = \tilde{e}_i^n \tilde{e}_k^m.$$

Beweis. Für $\tilde{\eta} := R_{\tilde{e}_i} \eta R_{\tilde{e}_i}^\top$ gilt

$$\tilde{\eta}_{11} = \tilde{e}_1^1 (\tilde{e}_1^1 \eta_{11} + \tilde{e}_1^2 \eta_{21} + \tilde{e}_1^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_1^2 (\tilde{e}_1^1 \eta_{12} + \tilde{e}_1^2 \eta_{22} + \tilde{e}_1^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_1^3 (\tilde{e}_1^1 \eta_{13} + \tilde{e}_1^2 \eta_{23} + \tilde{e}_1^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{12} = \tilde{e}_2^1 (\tilde{e}_1^1 \eta_{11} + \tilde{e}_1^2 \eta_{21} + \tilde{e}_1^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_2^2 (\tilde{e}_1^1 \eta_{12} + \tilde{e}_1^2 \eta_{22} + \tilde{e}_1^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_2^3 (\tilde{e}_1^1 \eta_{13} + \tilde{e}_1^2 \eta_{23} + \tilde{e}_1^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{13} = \tilde{e}_3^1 (\tilde{e}_1^1 \eta_{11} + \tilde{e}_1^2 \eta_{21} + \tilde{e}_1^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_3^2 (\tilde{e}_1^1 \eta_{12} + \tilde{e}_1^2 \eta_{22} + \tilde{e}_1^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_3^3 (\tilde{e}_1^1 \eta_{13} + \tilde{e}_1^2 \eta_{23} + \tilde{e}_1^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{21} = \tilde{e}_1^1 (\tilde{e}_2^1 \eta_{11} + \tilde{e}_2^2 \eta_{21} + \tilde{e}_2^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_1^2 (\tilde{e}_2^1 \eta_{12} + \tilde{e}_2^2 \eta_{22} + \tilde{e}_2^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_1^3 (\tilde{e}_2^1 \eta_{13} + \tilde{e}_2^2 \eta_{23} + \tilde{e}_2^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{22} = \tilde{e}_2^1 (\tilde{e}_2^1 \eta_{11} + \tilde{e}_2^2 \eta_{21} + \tilde{e}_2^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_2^2 (\tilde{e}_2^1 \eta_{12} + \tilde{e}_2^2 \eta_{22} + \tilde{e}_2^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_2^3 (\tilde{e}_2^1 \eta_{13} + \tilde{e}_2^2 \eta_{23} + \tilde{e}_2^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{23} = \tilde{e}_3^1 (\tilde{e}_2^1 \eta_{11} + \tilde{e}_2^2 \eta_{21} + \tilde{e}_2^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_3^2 (\tilde{e}_2^1 \eta_{12} + \tilde{e}_2^2 \eta_{22} + \tilde{e}_2^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_3^3 (\tilde{e}_2^1 \eta_{13} + \tilde{e}_2^2 \eta_{23} + \tilde{e}_2^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{31} = \tilde{e}_1^1 (\tilde{e}_3^1 \eta_{11} + \tilde{e}_3^2 \eta_{21} + \tilde{e}_3^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_1^2 (\tilde{e}_3^1 \eta_{12} + \tilde{e}_3^2 \eta_{22} + \tilde{e}_3^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_1^3 (\tilde{e}_3^1 \eta_{13} + \tilde{e}_3^2 \eta_{23} + \tilde{e}_3^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{32} = \tilde{e}_2^1 (\tilde{e}_3^1 \eta_{11} + \tilde{e}_3^2 \eta_{21} + \tilde{e}_3^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_2^2 (\tilde{e}_3^1 \eta_{12} + \tilde{e}_3^2 \eta_{22} + \tilde{e}_3^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_2^3 (\tilde{e}_3^1 \eta_{13} + \tilde{e}_3^2 \eta_{23} + \tilde{e}_3^3 \eta_{33})$$

$$\tilde{\eta}_{33} = \tilde{e}_3^1 (\tilde{e}_3^1 \eta_{11} + \tilde{e}_3^2 \eta_{21} + \tilde{e}_3^3 \eta_{31}) + \tilde{e}_3^2 (\tilde{e}_3^1 \eta_{12} + \tilde{e}_3^2 \eta_{22} + \tilde{e}_3^3 \eta_{32}) + \tilde{e}_3^3 (\tilde{e}_3^1 \eta_{13} + \tilde{e}_3^2 \eta_{23} + \tilde{e}_3^3 \eta_{33})$$

□

A.3.5 Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen

Für symmetrische $\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vereinfacht sich die Rotation aus A.3.3 zu

$$R_i(\alpha) \eta R_i(\alpha)^\top = \text{pr}_{3D}^{-1} (T_i(\alpha) \text{pr}_{3D}(\eta)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

A Rechenregeln

mit pr_{3D} aus (2.34) und

$$\begin{aligned}
 T_1(\alpha) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 T_2(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & 0 & \sin^2 \alpha & 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \alpha & 0 & \cos^2 \alpha & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 T_3(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Beweis. Mit Ausnutzung der Symmetrie von η ergibt sich für $\tilde{\eta}_i := R_i(\alpha)\eta R_i(\alpha)^\top$ ($i = 1, 2, 3$) aus dem Beweis von A.3.3

$$\tilde{\eta}_{1,11} = \eta_{11}$$

$$\tilde{\eta}_{1,12} = \eta_{12} \cos \alpha + \eta_{13} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,13} = \eta_{13} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{1,21} = \tilde{\eta}_{1,12}$$

$$\tilde{\eta}_{1,22} = \cos \alpha (\eta_{22} \cos \alpha + \eta_{23} \sin \alpha) + \sin \alpha (\eta_{23} \cos \alpha + \eta_{33} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{1,23} = \cos \alpha (\eta_{23} \cos \alpha + \eta_{33} \sin \alpha) - \sin \alpha (\eta_{22} \cos \alpha + \eta_{23} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{1,31} = \tilde{\eta}_{1,13}$$

$$\tilde{\eta}_{1,32} = \tilde{\eta}_{1,23}$$

$$\tilde{\eta}_{1,33} = \cos \alpha (\eta_{33} \cos \alpha - \eta_{23} \sin \alpha) - \sin \alpha (\eta_{23} \cos \alpha - \eta_{22} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,11} = \cos \alpha (\eta_{11} \cos \alpha - \eta_{13} \sin \alpha) - \sin \alpha (\eta_{13} \cos \alpha - \eta_{33} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,12} = \eta_{12} \cos \alpha - \eta_{23} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,13} = \cos \alpha (\eta_{13} \cos \alpha - \eta_{33} \sin \alpha) + \sin \alpha (\eta_{11} \cos \alpha - \eta_{13} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{2,21} = \tilde{\eta}_{2,12}$$

$$\tilde{\eta}_{2,22} = \eta_{22}$$

$$\tilde{\eta}_{2,23} = \eta_{23} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{2,31} = \tilde{\eta}_{2,13}$$

$$\tilde{\eta}_{2,32} = \tilde{\eta}_{2,23}$$

$$\tilde{\eta}_{2,33} = \cos \alpha (\eta_{33} \cos \alpha + \eta_{13} \sin \alpha) + \sin \alpha (\eta_{13} \cos \alpha + \eta_{11} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,11} = \cos \alpha (\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha) + \sin \alpha (\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,12} = \cos \alpha (\eta_{12} \cos \alpha + \eta_{22} \sin \alpha) - \sin \alpha (\eta_{11} \cos \alpha + \eta_{12} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,13} = \eta_{13} \cos \alpha + \eta_{23} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,21} = \tilde{\eta}_{3,12}$$

$$\tilde{\eta}_{3,22} = \cos \alpha (\eta_{22} \cos \alpha - \eta_{12} \sin \alpha) - \sin \alpha (\eta_{12} \cos \alpha - \eta_{11} \sin \alpha)$$

$$\tilde{\eta}_{3,23} = \eta_{23} \cos \alpha - \eta_{13} \sin \alpha$$

$$\tilde{\eta}_{3,31} = \tilde{\eta}_{3,13}$$

$$\tilde{\eta}_{3,32} = \tilde{\eta}_{3,23}$$

$$\tilde{\eta}_{3,33} = \eta_{33}$$

□

A.3.6 Rotation symmetrischer Tensoren zweiter Stufe im Dreidimensionalen durch Vorgabe der rotierten Basis

Für symmetrische $\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vereinfacht sich die Rotation aus A.3.4 zu

$$R_{\tilde{e}_i} \eta R_{\tilde{e}_i}^\top = \text{pr}_{3D}^{-1}(T_{\tilde{e}_i} \text{pr}_{3D}(\eta)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

A Rechenregeln

mit

$$T_{\tilde{e}_i} := \begin{pmatrix} (\tilde{e}_1^1)^2 & (\tilde{e}_1^2)^2 & (\tilde{e}_1^3)^2 & 2\tilde{e}_1^2\tilde{e}_1^3 & 2\tilde{e}_1^1\tilde{e}_1^3 & 2\tilde{e}_1^1\tilde{e}_1^2 \\ (\tilde{e}_2^1)^2 & (\tilde{e}_2^2)^2 & (\tilde{e}_2^3)^2 & 2\tilde{e}_2^3\tilde{e}_2^2 & 2\tilde{e}_2^3\tilde{e}_2^1 & 2\tilde{e}_2^2\tilde{e}_2^1 \\ (\tilde{e}_3^1)^2 & (\tilde{e}_3^2)^2 & (\tilde{e}_3^3)^2 & 2\tilde{e}_3^2\tilde{e}_3^3 & 2\tilde{e}_3^3\tilde{e}_3^1 & 2\tilde{e}_3^2\tilde{e}_3^1 \\ \tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^2 & \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^3 & (\tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^2) & (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^1) & (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^1) \\ \tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^2 & \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^3 & (\tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^2) & (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^1) & (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^1) \\ \tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^2 & \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^3 & (\tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^2) & (\tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^1) & (\tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^1) \end{pmatrix}$$

und pr_{3D} gemäß (2.34).

Beweis. Mit Ausnutzung der Symmetrie von η ergibt sich für $\tilde{\eta} := R_{\tilde{e}_i}\eta R_{\tilde{e}_i}^\top$ aus dem Beweis von A.3.4

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{11} &= (\tilde{e}_1^1)^2\eta_{11} + (\tilde{e}_1^2)^2\eta_{22} + (\tilde{e}_1^3)^2\eta_{33} + 2\tilde{e}_1^2\tilde{e}_1^3\eta_{23} + 2\tilde{e}_1^1\tilde{e}_1^3\eta_{13} + 2\tilde{e}_1^1\tilde{e}_1^2\eta_{12} \\ \tilde{\eta}_{12} &= \tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^1\eta_{11} + \tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^2\eta_{22} + \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^3\eta_{33} + (\tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^2)\eta_{23} + (\tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_2^3\tilde{e}_1^1)\eta_{13} \\ &\quad + (\tilde{e}_2^1\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_2^2\tilde{e}_1^1)\eta_{12} \\ \tilde{\eta}_{13} &= \tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^1\eta_{11} + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^2\eta_{22} + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^3\eta_{33} + (\tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^2)\eta_{23} + (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_1^1)\eta_{13} \\ &\quad + (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_1^1)\eta_{12} \\ \tilde{\eta}_{21} &= \tilde{\eta}_{12} \\ \tilde{\eta}_{22} &= (\tilde{e}_2^1)^2\eta_{11} + (\tilde{e}_2^2)^2\eta_{22} + (\tilde{e}_2^3)^2\eta_{33} + 2\tilde{e}_2^3\tilde{e}_2^2\eta_{23} + 2\tilde{e}_2^3\tilde{e}_2^1\eta_{13} + 2\tilde{e}_2^2\tilde{e}_2^1\eta_{12} \\ \tilde{\eta}_{23} &= \tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^1\eta_{11} + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^2\eta_{22} + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^3\eta_{33} + (\tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^2)\eta_{23} + (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^3 + \tilde{e}_3^3\tilde{e}_2^1)\eta_{13} \\ &\quad + (\tilde{e}_3^1\tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2\tilde{e}_2^1)\eta_{12} \\ \tilde{\eta}_{31} &= \tilde{\eta}_{13} \\ \tilde{\eta}_{32} &= \tilde{\eta}_{23} \\ \tilde{\eta}_{33} &= (\tilde{e}_3^1)^2\eta_{11} + (\tilde{e}_3^2)^2\eta_{22} + (\tilde{e}_3^3)^2\eta_{33} + 2\tilde{e}_3^2\tilde{e}_3^3\eta_{23} + 2\tilde{e}_3^3\tilde{e}_3^1\eta_{13} + 2\tilde{e}_3^2\tilde{e}_3^1\eta_{12} \end{aligned}$$

□

A.4 Sonstige Rechenregeln

A.4.1 Greensche Identität für Vektorfelder

Für ein Vektorfeld $\varphi \in C^1(\Omega)^d$ und ein Tensorfeld $\psi \in C^1(\Omega)^{d \times d}$ gilt die erste Greensche Identität

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \cdot \operatorname{div} \psi(x) \, dx = - \int_{\Omega} D\varphi(x) : \psi(x)^{\top} \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot (\psi(x)^{\top} n(x)) \, ds(x).$$

Beweis. Für ein beliebiges, hinreichend glattes skalares Feld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ein beliebiges, hinreichend glattes vektorwertiges Feld $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sowie das äußere Normalenvektorfeld $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} f(x) (g(x) \cdot n(x)) \, ds(x) = \int_{\partial\Omega} (f(x)g(x)) \cdot n(x) \, ds(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div} (f(x)g(x)) \, dx$$

und weiter

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (f(x)g(x)) \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x)g(x)) \, dx = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} g(x) \, dx.$$

Zusammen folgt

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} g(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} f(x) (g(x) \cdot n(x)) \, ds(x). \quad (\text{A.1})$$

Für das Tensorfeld $\psi(x)$ gilt

$$\operatorname{div} \psi = \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{ji} \right)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d,$$

wodurch sich für das Skalarprodukt

$$\varphi \cdot \psi = \sum_{i=1}^d \varphi_i \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{ji} = \sum_{i=1}^d \varphi_i \operatorname{div} (\psi_{ji})_{j=1, \dots, d}$$

ergibt, wobei $(\psi_{ji})_{j=1, \dots, d}$ die i -te Spalte des Tensors ψ bezeichnet. Integrieren über Ω und anschließendes Anwenden von (A.1) ergibt

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \varphi_i \operatorname{div} (\psi_{ji})_{j=1, \dots, d} \, dx = - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla(\varphi_i) \cdot (\psi_{ji})_{j=1, \dots, d} \, dx + \sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\psi_{ji})_{j=1, \dots, d} \cdot n \, ds(x)$$

A Rechenregeln

wobei zum Nutzen der Übersichtlichkeit auf die Argumente von $\varphi_i(x)$, $\psi_{ji}(x)$ und dem äußeren Normalenfeld $n(x)$ verzichtet wurde. Weitere Vereinfachungen ergeben

$$-\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla(\varphi_i) \cdot (\psi_{ji})_{j=1,\dots,d} \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i \psi_{ji} \, dx = - \int_{\Omega} D\varphi : \psi^{\top} \, dx$$

und

$$\sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\psi_{ji})_{j=1,\dots,d} \cdot n \, ds(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \varphi_i \psi_{ji} n_j \, ds(x) = \int_{\partial\Omega} (\psi^{\top} n) \cdot \varphi \, ds(x),$$

woraus die Behauptung folgt. □

A.4.2 Ableitungsregel

1. Für $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit gleichmäßig stetiger Ableitung f' ist

$$A : L^{\infty}(\Omega) \rightarrow L^{\infty}(\Omega), \alpha \mapsto f \circ \alpha$$

wohldefiniert, Frechet-differenzierbar und es gilt

$$A'(\alpha)[h] = f'(\alpha)h.$$

Beweis. Für die Wohldefiniertheit zeigen wir, dass für ein stetiges f und für $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ die Komposition $f \circ \alpha$ essentiell beschränkt ist, dass es also ein $M > 0$ gibt, sodass $|f(\alpha(x))| < M$ für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gilt. Da α essentiell beschränkt ist, gilt

$$\alpha(x) \in [-\|\alpha\|_{L^{\infty}}, \|\alpha\|_{L^{\infty}}]$$

fast überall in Ω . Auf diesem kompakten Intervall nimmt das stetige f sein Minimum $-f_{\min} > -\infty$ und sein Maximum $f_{\max} < \infty$ an. Es gilt somit

$$|f(\alpha(x))| \leq \max\{f_{\min}, f_{\max}\} \quad \forall x \in \Omega \setminus N$$

und die Komposition ist essentiell beschränkt.

Nach der Definition der Frechet-Ableitung 2.6 ist zu zeigen, dass

$$R(h) := \frac{1}{\|h\|_{L^{\infty}}} \|f \circ (\alpha + h) - f \circ \alpha - f'(\alpha)h\|_{L^{\infty}} \xrightarrow{\|h\|_{L^{\infty}} \rightarrow 0} 0$$

gilt. Wir wählen $\epsilon > 0$ und wollen dazu ein passendes $\delta > 0$ konstruieren, sodass

$$R(h) < \epsilon \quad \forall \|h\|_{L^\infty} < \delta$$

gilt.

Für das gewählte ϵ existiert aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f' ein $\bar{\delta} > 0$ mit

$$|f'(t) - f'(\alpha(x))| < \epsilon \quad \forall x \in \Omega, \forall |t - \alpha(x)| < \bar{\delta}.$$

Für ein beliebiges $h \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|h\|_{L^\infty} < \bar{\delta}$ gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$|h(x)| \leq \|h\|_{L^\infty}$$

und damit folgt ebenfalls fast überall

$$\begin{aligned} r(h, x) &:= |f(\alpha(x) + h(x)) - f(\alpha(x)) - f'(\alpha(x))h(x)| \\ &= \left| \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h(x)} f'(t) dt - f'(\alpha(x))h(x) \right| \\ &= \left| \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h(x)} f'(t) - f'(\alpha(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h(x)} \underbrace{|f'(t) - f'(\alpha(x))|}_{< \epsilon \text{ falls } |h(x)| < \bar{\delta}} dt \\ &\stackrel{\text{f. ü.}}{\leq} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h(x)} \epsilon dt = \epsilon h(x) \stackrel{\text{f. ü.}}{\leq} \epsilon \|h\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Da $R(h) = \frac{1}{\|h\|_{L^\infty}} \|r(h, \cdot)\|_{L^\infty}$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

2. Für die Frechet-Ableitung des Transformationstensors $T_3(\alpha)$ aus A.3.3 in Abhängigkeit des Winkelfeldes $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}'_{3,11ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} -2 \sin \alpha \cos \alpha h & (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) h & 0 \\ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) h & 2 \sin \alpha \cos \alpha h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{T}'_{3,12ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) h & -2 \sin \alpha \cos \alpha h & 0 \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha h & (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A Rechenregeln

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{T}'_{3,13ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha h \\ 0 & 0 & \cos \alpha h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (\mathbf{T}'_{3,21ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= (\mathbf{T}'_{3,12ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3}^\top \\
 (\mathbf{T}'_{3,22ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha \cos \alpha h & (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)h & 0 \\ (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)h & -2 \sin \alpha \cos \alpha h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (\mathbf{T}'_{3,23ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos \alpha h \\ 0 & 0 & -\sin \alpha h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (\mathbf{T}'_{3,31ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= (\mathbf{T}'_{3,13ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3}^\top \\
 (\mathbf{T}'_{3,32ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= (\mathbf{T}'_{3,23ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3}^\top \\
 (\mathbf{T}'_{3,33ij}(\alpha)[h])_{i,j=1,\dots,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Beweis. Nach 2.7 erfolgt die Berechnung der Frechet-Ableitung komponentenweise. Die Ableitung der Einzelkomponenten ergibt sich nach A.4.21, da die Ableitungen aller auftauchenden Komponenten von $\mathbf{T}_3(\alpha)$ als Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} gleichmäßig stetig in α sind. \square

3. Für die Frechet-Ableitung der Transformationsmatrix $T_3(\alpha)$ aus A.3.5 in Abhängigkeit des Winkelfeldes $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ gilt

$$T_3(\alpha)[h] = hT_3^\#(\alpha)$$

mit

$$T_3^\#(\alpha) := \begin{pmatrix} -2 \sin \cos & 2 \sin \cos & 0 & 0 & 0 & 2(\cos^2 - \sin^2) \\ 2 \sin \cos & -2 \sin \cos & 0 & 0 & 0 & 2(\sin^2 - \cos^2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin & -\cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & -\sin & 0 \\ (\sin^2 - \cos^2) & (\cos^2 - \sin^2) & 0 & 0 & 0 & -4 \sin \cos \end{pmatrix},$$

wobei aus Platzgründen die Argumente α der trigonometrischen Abbildungen weggelassen wurden.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu Teil 2. □

A.5 Programmcode

A.5.1 MATLAB-Quellcode zur Verifikation der Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms bei der Spannungsmethode

```
% symbolic variable for rotation angle alpha
a = sym('alpha', 'real');

% transformation matrix for compliance matrix
T3 = [cos(a)^2, sin(a)^2, 0, 0, 0, 2*sin(a)*cos(a);
      sin(a)^2, cos(a)^2, 0, 0, 0, -2*sin(a)*cos(a);
      0, 0, 1, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, cos(a), -sin(a), 0;
      0, 0, 0, sin(a), cos(a), 0;
      -sin(a)*cos(a), sin(a)*cos(a), 0, 0, 0, cos(a)^2 - sin(a)^2];

% symbolic variables for entries of compliance matrix
S11 = sym('S11', 'real');
S12 = sym('S12', 'real');
S13 = sym('S13', 'real');
S22 = sym('S22', 'real');
S23 = sym('S23', 'real');
S33 = sym('S33', 'real');
S44 = sym('S44', 'real');
S55 = sym('S55', 'real');
S66 = sym('S66', 'real');

% compliance matrix in material coordinate system
Smat = [S11, S12, S13, 0, 0, 0;
        S12, S22, S23, 0, 0, 0;
        S13, S23, S33, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, S44, 0, 0;
        0, 0, 0, 0, S55, 0;
        0, 0, 0, 0, 0, S66];

% compliance matrix in rotated coordinate system
Sa = T3'*Smat*T3;

% symbolic variables for entries of engineering stress
s1 = sym('s1', 'real');
s2 = sym('s2', 'real');
s3 = sym('s3', 'real');
s4 = sym('s4', 'real');
s5 = sym('s5', 'real');
s6 = sym('s6', 'real');

% engineering stress in Voigt's notation
s = [s1; s2; s3; s4; s5; s6];

% evaluation of strain energy density
```

```

val = s'*Sa*s

% the coefficients of the trigonometric polynomial describing
% strain energy
a0 = (S11 + S22)*(3/8 * s1^2 + 3/8 * s2^2 + 1/2 * s6^2 ...
      + 1/4 * s1*s2) + S33 * s3^2 + (S44 + S55) * (1/2 * s4^2 ...
      + 1/2 * s5^2) + S66 * (1/8 * s1^2 + 1/8 * s2^2 ...
      + 1/2 * s6^2 - 1/4*s1*s2) + S12 * (1/4 * s1^2 ...
      + 1/4 * s2^2 - s6^2 + 3/2 * s1*s2) ...
      + (S13 + S23) * (s1*s3 + s2*s3);
a1 = (S11 - S22)*(s1 + s2)*s6 + 2*(S13 - S23)*s3*s6 ...
      + (S55 - S44)*s4*s5;
a2 = (1/2 * (S11 + S22) - S12 - 1/2 * S66 )*(s1 - s2)*s6;
b1 = 1/2 * (S11 - S22 )*(s1^2 - s2^2) ...
      + 1/2 * (S44 - S55 )*(s4^2 - s5^2) ...
      + (S13 - S23 )*(s1 - s2 )*s3;
b2 = (s6^2 - 1/4 * (s1 - s2 )^2) * (S12 + 1/2 * S66 ...
      - 1/2 * (S11 + S22 ));

% verifying above coefficients
simplify(val - a0 - a1*sin(2*a) - a2*sin(4*a) - b1*cos(2*a) ...
        - b2*cos(4*a))

```

A.5.2 MATLAB-Quellcode zur Verifikation der Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms bei der Verzerrungsmethode

```

% symbolic variable for rotation angle alpha
a = sym('alpha', 'real');

% transformation matrix for elasticity matrix
T3 = [cos(a)^2, sin(a)^2, 0, 0, 0, 2*sin(a)*cos(a);
      sin(a)^2, cos(a)^2, 0, 0, 0, -2*sin(a)*cos(a);
      0, 0, 1, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, cos(a), -sin(a), 0;
      0, 0, 0, sin(a), cos(a), 0;
      -sin(a)*cos(a), sin(a)*cos(a), 0, 0, 0, cos(a)^2 - sin(a)^2];

R = [1, 0, 0, 0, 0, 0;
     0, 1, 0, 0, 0, 0;
     0, 0, 1, 0, 0, 0;
     0, 0, 0, 2, 0, 0;
     0, 0, 0, 0, 2, 0;
     0, 0, 0, 0, 0, 2];

R_inv = [1, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 1, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 1, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 1/2, 0, 0;
        0, 0, 0, 0, 1/2, 0;
        0, 0, 0, 0, 0, 1/2];

T = R * T3 * R_inv;

```

```

% symbolic variables for entries of elasticity matrix
C11 = sym('C11', 'real');
C12 = sym('C12', 'real');
C13 = sym('C13', 'real');
C22 = sym('C22', 'real');
C23 = sym('C23', 'real');
C33 = sym('C33', 'real');
C44 = sym('C44', 'real');
C55 = sym('C55', 'real');
C66 = sym('C66', 'real');

% elasticity matrix in material coordinate system
Cmat = [C11, C12, C13, 0, 0, 0;
        C12, C22, C23, 0, 0, 0;
        C13, C23, C33, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, C44, 0, 0;
        0, 0, 0, 0, C55, 0;
        0, 0, 0, 0, 0, C66];

% elasticity matrix in rotated coordinate system
Ca = T'*Cmat*T;

% symbolic variables for entries of engineering strain
s1 = sym('s1', 'real');
s2 = sym('s2', 'real');
s3 = sym('s3', 'real');
s4 = sym('s4', 'real');
s5 = sym('s5', 'real');
s6 = sym('s6', 'real');

% engineering strain in Voigt's notation
s = [s1; s2; s3; s4; s5; s6];

% evaluation of strain energy density
val = simplify(s'*Ca*s)

% the coefficients of the trigonometric polynomial describing
% strain energy
a0 = 1/8 * (C11 + C22)*(3 * s1^2 + 3 * s2^2 + s6^2 ...
    + 2 * s1*s2) + C33 * s3^2 ...
    + (C44 + C55) * (1/2 * s4^2 + 1/2 * s5^2) ...
    + 1/2 * C66 * ((s1 - s2)^2 + s6^2) ...
    + C12 * (1/4 * s1^2 + 1/4 * s2^2 ...
    - 1/4 * s6^2 + 3/2 * s1*s2) ...
    + (C13 + C23) * (s1*s3 + s2*s3);
a1 = 1/2 * (C11 - C22) * (s1 + s2) * s6 ...
    + (C13 - C23) * s3 * s6 + (C55 - C44) * s4 * s5;
a2 = (1/4 * (C11 + C22) - 1/2*C12 - C66) * (s1 - s2) * s6;
b1 = 1/2 * (C11 - C22) * (s1^2 - s2^2) ...
    + 1/2 * (C44 - C55) * (s4^2 - s5^2) ...
    + (C13 - C23) * (s1 - s2) * s3;
b2 = 1/8 * (C11 + C22 - 2*C12 - 4*C66) * ((s1 - s2)^2 - s6^2);

% verifying above coefficients

```

A Rechenregeln

```
simplify(val -a0 - a1*sin(2*a) - a2*sin(4*a) - b1*cos(2*a) ...  
         - b2*cos(4*a))
```