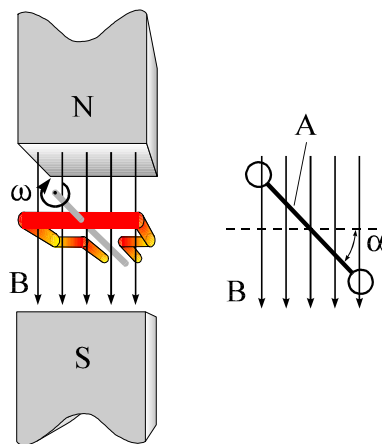


## 2 Lineare Schaltungstheorie

In den Abschnitten dieses Kapitels betrachten wir nur lineare Bauteile, d.h. solche, deren elektrische Kenngrößen dem Superpositionsgesetz unterliegen.

### 2.1 Erzeugung einer Wechselspannung

In der Praxis spielt neben dem Gleichstrom (z.B. aus Batterien und Photoelementen) vor allem der technische Wechselstrom eine sehr gewichtige Rolle, weil zum verlustarmen elektrischen Energietransport Wechselströme besonders geeignet sind, da sie sich transformieren lassen, wie weiter unten genauer beschrieben wird.



**Abbildung 25:**  
Wechselspannungsgenerator

Abbildung 25 zeigt schematisch, wie mit Hilfe des Induktionsgesetzes mechanische Dreh-Energie in elektrische Energie umgewandelt wird. In einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion  $\vec{B}$  dreht sich eine Spule mit  $N$  Windungen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , deren Anschlüsse über zwei Schleifringe zugänglich sind. Die Drehachse ist senkrecht zum magnetischen Feld angeordnet, so dass bei waagerechter Spule der Fluss  $\phi$  senkrecht durch die Spule tritt. Beim Drehen ändert sich der Fluss, da nur noch die Projektionsfläche des Spulenquerschnitts  $A$  mit der Induktion den wirksamen Fluss ergibt, d.h.

$$\psi = N \cdot \phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \alpha, \quad (46)$$

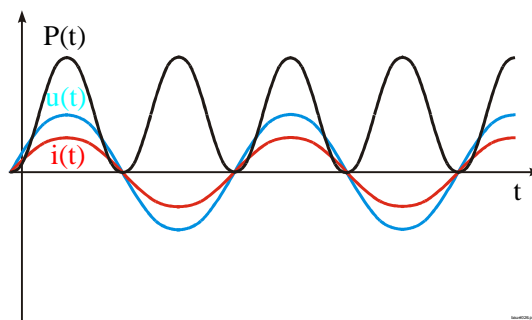
$$= N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Mit Gl. (42) ergibt sich dann die Spannung an den Spulenanschlüssen:

$$u = -\frac{d\psi}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (47)$$

d.h. eine sinusförmige Wechselspannung. Diese ist in Abb. 26 dargestellt. Gleichzeitig ist hier der Strom durch einen ohmschen Widerstand und der zeitliche Verlauf der Leistung  $P(t) = u(t) \cdot i(t)$  dargestellt.

Während einer Umdrehung (ein Winkel von  $2\pi$ ) durchläuft die Schwingung der induzierten Spannung eine volle Periode. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde nennt man *Frequenz*  $f$ , zu Ehren des deutschen Physikers *Heinrich Hertz* mit der Maßeinheit  $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$ . Aus Gründen der vereinfachten Schreibweise wird häufig mit der *Kreisfrequenz*



$$\omega = 2\pi f \quad (48)$$

**Abbildung 26:** Zeitlicher Verlauf einer Wechselspannung und von Strom und Leistung an einem ohmschen Widerstand.

gerechnet. In Abb. 26 fällt sofort noch ein wichtiger Aspekt von Wechselströmen auf. Die Leistung schwingt mit der doppelten Frequenz, was man sich auch leicht mathematisch mit Hilfe der Additionstheoreme erklären kann:

$$\begin{aligned}
 P(t) &= U_0 \sin(\omega t) \cdot i(t), \\
 &= U_0 \sin(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \sin(\omega t), \\
 &= \frac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t), \\
 &= \frac{U_0^2}{2R} (1 + \sin(2\omega t)).
 \end{aligned} \tag{49}$$

Die über eine Spannungsperiode gemittelte Leistung ist dann

$$\bar{P} = \frac{U_0^2}{2R}, \tag{50}$$

d.h. halb so groß, wie die von einer Gleichspannung  $U_0$  am ohmschen Widerstand  $R$ . Man nennt die Spannung  $U_0$  *Scheitelwert*.

Die fiktive Gleichspannung, die dieselbe Leistung an einem ohmschen Widerstand umsetzt, wie eine Wechselspannung mit dem Scheitelwert  $U_0$  hat offensichtlich die Größe

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0. \tag{51}$$

Dieser Wert wird *Effektivwert* genannt. Er ist bei allen Leistungsbetrachtungen die entscheidende Größe. Auch die 220V in unserem Haushaltsstromnetz sind ein Effektivwert. Der Scheitelwert beträgt 311V. Die gleichen Betrachtungen gelten natürlich auch für den Strom. Auch hier gibt es einen Effektivwert  $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ .

Für nicht sinusförmige Strom- und Spannungsverläufe lassen sich analoge Betrachtungen anstellen, die wir hier jedoch nicht vertiefen wollen. Anmerken wollen wir lediglich, dass sich die Starkstromtechnik dann mit Korrekturfaktoren behilft, die Formfaktoren genannt werden.

## 2.2 Transformator

Ein besonders wichtiges Baelement für Wechselströme ist der *Transformator*. Er besteht in seiner einfachsten Form aus zwei Wicklungen auf einem Kern mit hoher relativer Permeabilität  $\mu_r$ , welcher den magnetischen Fluss  $\Phi$  leitet. Fließen nun in beiden Wicklungen Ströme, so ändern sich die damit verketteten Flüsse. Jeder Strom in der einen Wicklung induziert eine Gegenspannung in der anderen. Dieser Vorgang heißt *Gegeninduktion*. Mathematisch kann das durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + i_1 R_1, \\
 u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_2 R_2,
 \end{aligned} \tag{52}$$

mit  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

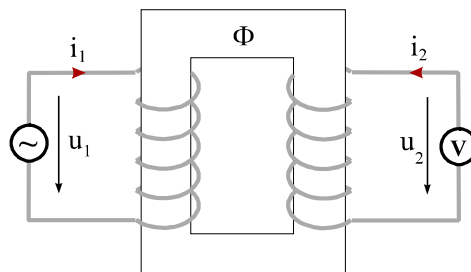


Abbildung 27: Transformator

Die Größe  $M$  heißt *Gegeninduktivität*. Mit den Gln. (51), (30) und (41) kommt man unter Vernachlässigung der Bahnwiderstände  $R_1$  und  $R_2$  zu der *Übersetzung*  $\ddot{u}$  eines idealen Transformators

$$\ddot{u} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (53)$$

Im realen Falle sind noch Streuverluste und Eisenverluste zu berücksichtigen, die durch entsprechende Induktivitäten und Widerstände modelliert werden.

Außerdem ist der Transformator so zu dimensionieren, dass einerseits die Gegeninduktivität groß genug ist, und andererseits der magnetisch leitende Kern nicht in die Sättigung gerät. Die Drahtstärken für die Wicklungen müssen den durch die Sättigungsgrenze gegebenen maximalen Strömen angepaßt sein.

Mit Hilfe von Transformatoren lassen sich Wechselspannungen für Überlandtransporte auf sehr hohe Spannungen (z.B. 100.000 V) transformieren. Ein Strom von  $I = 10 \text{ A}_{\text{eff}}$  überträgt dann schon 1 MW Leistung. Dadurch werden die Wärmeverluste infolge des ohmschen Widerstands der Leitung kleingehalten. Vor Ort wird die Spannung dann auf  $220 \text{ V}_{\text{eff}}$  herunter transformiert.

## 2.3 Theorie der linearen Wechselstromschaltungen

### 2.3.1 Wechselspannung an Induktivität und Kapazität

Wie sich Wechselstrom und -Spannung an einem ohmschen Widerstand verhalten, haben wir im vorigen Abschnitt gesehen. Wir betrachten nun das Verhalten einer Induktivität, wobei wir zunächst den Einschaltvorgang vernachlässigen, d.h. er möge ausreichend lange zurückliegen und die daraus resultierenden Störungen abgeklungen sein.

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung an einer Induktivität sind durch Gl.(43) gegeben. Mit einer sinusförmigen Spannung  $u = U_0 \cdot \sin \omega t$  an der Induktivität  $L$  ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= L \cdot \frac{di}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{U_0}{L} \sin \omega t, \\ i &= \frac{U_0}{L} \int \sin \omega t \, dt, \\ &= \frac{U_0}{\omega L} (-\cos \omega t + \text{const.}). \end{aligned} \quad (54)$$

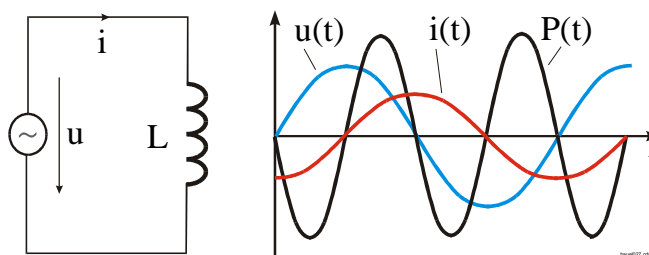
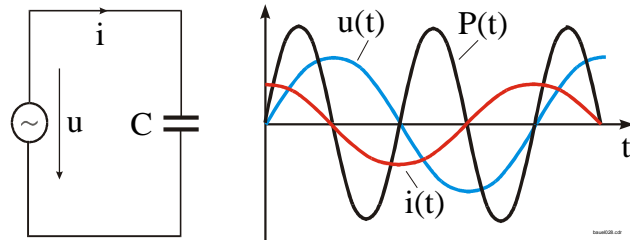


Abbildung 28: Wechselgrößen an einer Induktivität

Der Strom ist also cosinusförmig. In Abb. 28 ist der zeitliche Verlauf von Spannung, Strom und Leistung an einer Induktivität dargestellt. Der Strom eilt der Spannung um  $90^\circ$  hinterher. Man kann sich das so erklären, dass er zum Aufbau bzw. Abbau des magnetischen Feldes die Gegeninduktivität der Spule überwinden muss.

Wie sieht es nun bei einem Kondensator aus? Abb. 29 skizziert den Verlauf der Größen  $u$ ,  $i$ ,  $P$ , die sich aus den Gln.(15) und (16) ergeben:

$$\begin{aligned} Q &= CU, \\ &= CU_0 \cdot \sin\omega t, \\ i &= \frac{dQ}{dt}, \\ &= U_0 \omega C \cdot \cos\omega t. \end{aligned} \quad (55)$$



**Abbildung 29:** Wechselgrößen beim Kondensator

Der Strom ist hier ebenfalls cosinusförmig, jedoch gegenüber der Induktivität um  $180^\circ$  gedreht, d.h. er eilt der Spannung um  $90^\circ$  voraus.

Man kann sich vorstellen, dass bei einem leeren Kondensator zuerst ein Strom fließen muss, bevor sich eine Ladung in ihm aufbauen kann und damit eine Spannung an ihm. Die Größen  $X_L = \omega L$  und  $X_C = 1 / \omega C$  heißen *Wechselstromwiderstand* von Induktivität bzw. Kapazität.

### 2.3.2 Zeigerdarstellung, komplexe Schreibweise

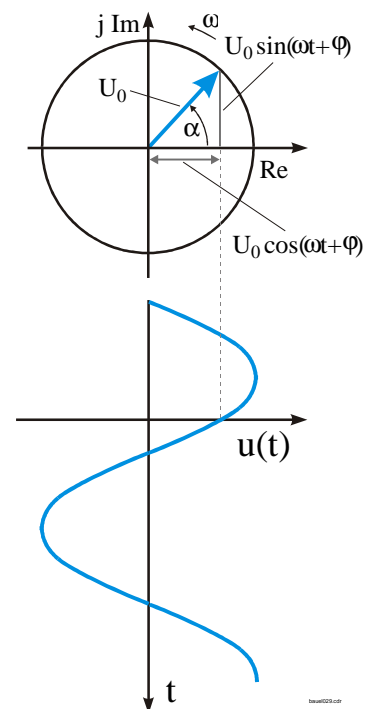
Für die Berechnung von Wechselstromschaltungen hat sich eine - ursprünglich von *Heaviside* - eingeführte - Operatorenrechnung bewährt, die die sinusförmigen Größen als komplexe Größen schreibt, d.h. es wird geschrieben:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(\omega t + \varphi), \\ &= U_0 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}, \\ &= U_0 \operatorname{Re}\{e^{j\alpha}\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Hierbei wird in der Elektrotechnik die imaginäre Größe  $i$  als  $j$  geschrieben, um sie vom Symbol für den Strom zu unterscheiden.

Den Winkel  $\varphi$  nennt man *Phasenwinkel*. Er gibt den Winkel zur Zeit  $t = 0$  an. Für eine Induktivität ist er für den Strom  $I$  im Vergleich zur Spannung  $U$  um  $90^\circ$  oder  $\pi/2$ , für einen Kondensator um  $-90^\circ$  oder  $-\pi/2$ . Man rechnet nun mit komplexen Größen und kann dadurch die Verschiebungen zwischen Strom und Spannung elegant mit berücksichtigen.

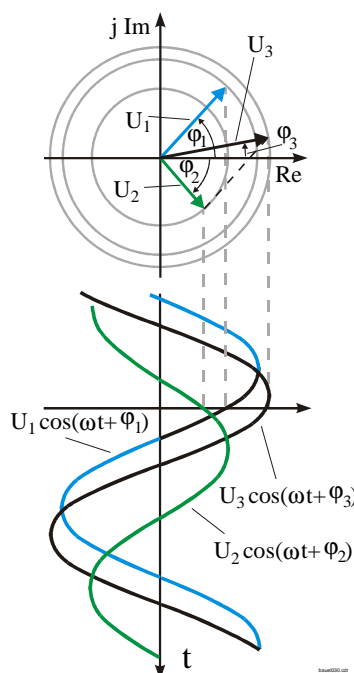
Man nennt die komplexen Größen auch *Zeiger*, da man sie als mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der komplexen Ebene rotierende gerichtete Größen ansehen kann. Die Spannungen und Ströme stellen sich als komplexe Zahlen dar, die in einer polaren Darstellung als Strecken mit einem Winkel  $\alpha$  zur reellen Achse gezeichnet werden, wie es Abb. 30 zeigt. Wenn man mehrere Größen mit derselben Frequenz hat, was bei Zeigerdarstellungen in der Regel der Fall ist, dann kann man die Rotation vergessen und in einem feststehenden Koordinatensystem arbeiten. Man nimmt



**Abbildung 30:** Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene

dann z.B. den Zeitpunkt  $t = 0$ , so dass  $\alpha = \varphi$  wird. Das ist so, als ob sich ein Beobachter in den Ursprung der komplexen Ebene begibt und mit ihr rotiert.

Abb. 31 demonstriert die Addition von zwei sinusförmigen Spannungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$ . Das Ergebnis ist eine dritte Spannung  $u_3(t)$ . Im oberen Teil der Abbildung sind die Spannungen als Zeiger dargestellt. Wie man sieht, ist das Ergebnis die (vektorielle) Addition der Zeiger in der komplexen Ebene. Man spricht trotzdem nicht von Vektoren, weil dieser Begriff üblicherweise für räumliche Größen verwendet wird, hier aber die komplexe Zahlenebene Darstellungsraum der Zeiger ist. Wenn man elektromagnetische Wellen im Raum betrachtet, dann benötigt man zur Beschreibung sowohl Vektoren für das räumliche Verhalten als auch Zeiger für das zeitliche.



**Abbildung 31:** Zur Zeigeraddition von Spannungen

Mathematisch lässt sich die Spannungsaddition folgendermaßen beschreiben:

$$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

$$\operatorname{Re}\{U_3 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_3)}\} = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} \cdot [U_1 \cdot e^{j\varphi_1} + U_2 \cdot e^{j\varphi_2}]\}. \quad (57)$$

Statt des komplexen Faktors für den Phasenwinkel  $\varphi$  fügt man diesen häufig der Amplitude  $U$  hinzu, so dass, wie in Gl. (57) *komplexe Amplituden* geschrieben werden. Wenn nur eine Frequenz betrachtet wird, wird auch häufig die verbleibende komplexe e-Funktion nicht mehr hingeschrieben, ebenso denkt man sich die abschließende Bildung des Realteils hinzu, ohne ihn explizit hinzuschreiben, so dass üblicherweise nur noch mit komplexen Spannungen, Strömen und Widerständen gerechnet wird.

$$u(t) = \operatorname{Re}\{U e^{j(\omega t + \varphi)}\},$$

$$= \operatorname{Re}\{\underline{U} e^{j\omega t}\}. \quad (58)$$

### 2.3.3 Komplexer Widerstand

$$-jX_C = \frac{-j}{\omega C},$$

$$= \frac{1}{j\omega C}, \quad (59)$$

Da beim Kondensator der Strom der Spannung um  $90^\circ$  vor eilt, was einer Phasenverschiebung von  $-90^\circ$  oder in der komplexen Ebene einer Drehung um  $-j$  entspricht, ergibt sich der komplexe Widerstand des Kondensators nach Gl. (58).

Der Strom eilt in einer Induktivität der Spannung um  $90^\circ$  nach, was einer Phasenverschiebung von  $+90^\circ$  oder  $+j$  entspricht. Daher ergibt sich der komplexe Widerstand der Induktivität nach Gl. (59).

$$jX_L = j\omega L. \quad (60)$$

Wichtig bei der Betrachtung von Wechselströmen ist die Tatsache, dass die Widerstände von Induktivität als auch von Kapazität rein imaginäre Größen sind,

was zur Folge hat, dass sie keine Energieverbraucher sind.

Die Leistung  $P$  pendelt in ihnen lediglich, wie auch die Abb. 27 und 28 zeigen. Der Mittelwert über eine Periode ist null, während er am ohmschen Widerstand nach Gl.(49) und Abb. 26 von null verschieden ist. Der Begriff *imaginärer Widerstand* bekommt hier also eine über die rein mathematische Betrachtung hinausgehende physikalische Bedeutung. Man spricht auch von *Blindleistung*.

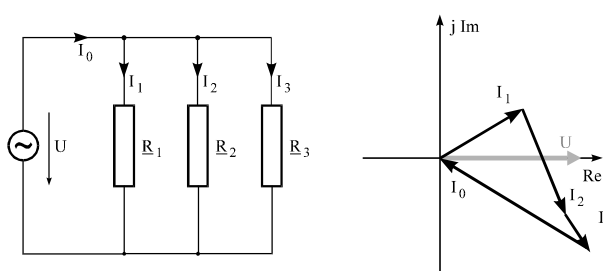
Zu beachten ist, dass die Blindströme bzw. -Leistungen zwar keinen Energieverbrauch bewirken jedoch einen pendelnden Energietransport. Daher müssen die Leitungen entsprechend stark ausgelegt werden, um die Leitungsverluste in Grenzen zu halten, was Kapital bindet. Die Elektrizitätsversorgungsunternehmen verlangen daher von ihren größeren Kunden, dass sie entweder ihre Blindlast mit Kondensatoren oder Induktivitäten kompensieren oder Blindstrom-Zuschläge bezahlen.

In der Praxis findet man aus physikalischen Gründen keine idealen Induktivitäten und Kapazitäten, vielmehr sind die Wicklungen von Spulen mit dem Bahnwiderstand des Wickeldrahtes behaftet und die Kondensatoren haben keine Dielektrika zwischen ihren Platten mit unendlich hohem Widerstand. Daher sind diese realen Bauelemente verlustbehaftet, d.h. sie haben eine ohmsche Komponente. Hinzu kommt, dass bei hohen Frequenzen die einzelnen Wicklungen einer Spule auch eine merkbare Kapazität haben und die Zuleitungen der Kondensatoren eine Induktivität aufweisen. In der Praxis muss daher immer mit komplexen Widerständen gerechnet werden. Ähnlich wie bei den realen Strom- und Spannungsquellen arbeitet man hier auch mit Ersatzschaltungen, die diese parasitären Effekte berücksichtigen. Komplexe Widerstände werden auch *Impedanz*  $\underline{Z}$  und ihr Kehrwert *Admittanz*  $\underline{Y}$  genannt.

### 2.3.4 Kirchhoffsche Sätze für Wechselstrom

Die in Abschnitt 1.3.3 beschriebenen Kirchhoffschen Gesetze gelten auch für Wechselströme und -Spannungen, nur dass hier Zeiger statt skalarer Größen addiert werden, wie in Abb. 30 illustriert wurde.

Abb. 32 zeigt die Knotenpunktregel und Abb. 33 die Maschenregel. Statt der einfachen Addition von Strömen bzw. Spannungen müssen hier die Zeiger in der komplexen Ebene addiert werden. Dementsprechend wird aus Gl. (21) Gl. (60) und aus Gl. (24) wird Gl. (61).



**Abbildung 32:** 1. Kirchhoffsche Regel für Wechselstrom

$$\sum_k I_k = 0. \quad (61)$$

$$\sum_k U_k = 0. \quad (62)$$

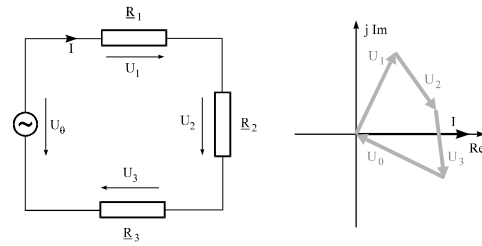


Abbildung 33: 2. Kirchhoffsche Regel für Wechselstrom

### 2.3.5 Schwingkreise

Eine Besonderheit von Wechselstromschaltungen sind *Schwingkreise*. Beim Reihenschwingkreis werden Kondensator, Induktivität und ohmscher (Ersatz-)Widerstand in Reihe geschaltet, wie Abb. 34 zeigt und beim Parallelschwingkreis parallel, wie in Abb. 35.

Die dazu gehörenden Zeigerdiagramme der Impedanz, bzw. der Admittanz erläutern das Frequenzverhalten dieser Schaltungen. Beim Reihenschwingkreis addiert man die Impedanzen, d.h. man erhält

$$\underline{U} = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I}, \quad (63)$$

im Zeigerdiagramm sieht man dann, dass bei niedrigen Kreisfrequenzen  $\omega$  die Impedanz des Kondensators überwiegt, bei hohen Kreisfrequenzen die Impedanz der Induktivität. Dazwischen gibt es eine ausgezeichnete Kreisfrequenz  $\omega_{res}$ , bei der sich die beiden Zeiger der imaginären Anteile kompensieren:

Bei dieser Frequenz wird die Impedanz des Reihenschwingkreises minimal und ist nur noch durch den ohmschen Widerstand  $R$  gegeben. In Frequenzgemischen kann man

$$j\omega_{res}L = -\frac{1}{j\omega_{res}C}, \quad (64)$$

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Bei dieser Frequenz wird die Impedanz des Reihenschwingkreises minimal und ist nur noch durch den ohmschen Widerstand  $R$  gegeben. In Frequenzgemischen kann man

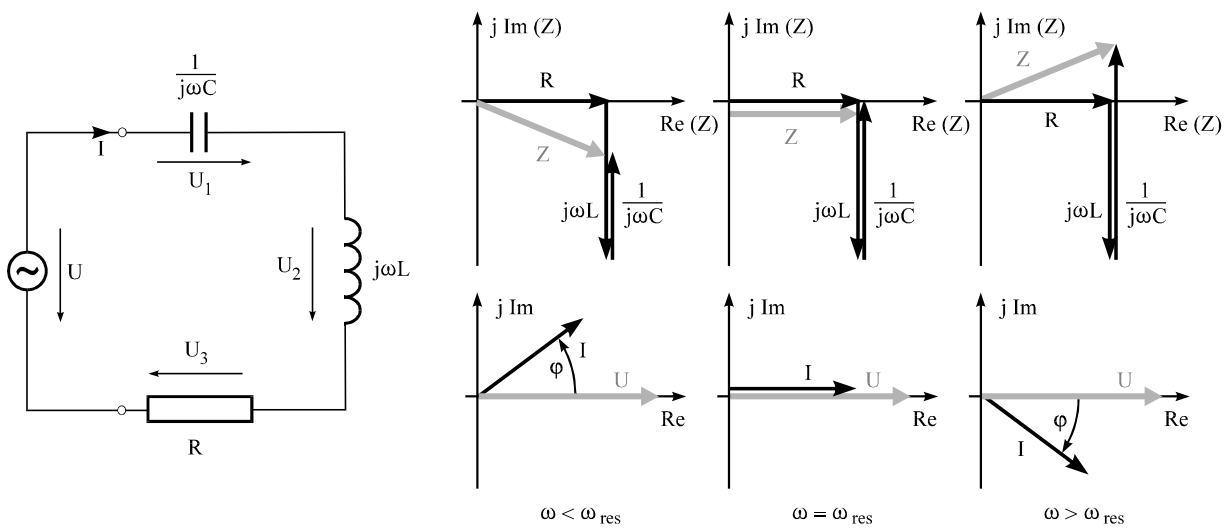


Abbildung 34: Reihen- oder Serien-Schwingkreis



einen Reihenschwingkreis verwenden, um unerwünschte Frequenzen durch teilweisen Kurzschluss zu schwächen und andere hervorzuheben, wenn man den Schwingkreis in Reihe mit dem Verbraucher schaltet.

Beim Parallelschwingkreis werden die Admittanzen addiert, d.h. es gilt

$$\underline{I} = \left( G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \cdot \underline{U}. \quad (65)$$

Hier gelten analoge Überlegungen, wie beim Reihenschwingkreis. Bei niedrigen Kreisfrequenzen  $\omega$  überwiegt die Admittanz der Induktivität, bei hohen Kreisfrequenzen die Admittanz der Kapazität. Dazwischen gibt es wieder eine ausgezeichnete Kreisfrequenz  $\omega_{res}$ , bei der sich die beiden Zeiger der imaginären Anteile kompensieren.

$$j\omega_{res} C = -\frac{1}{j\omega_{res} L}, \quad (66)$$

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

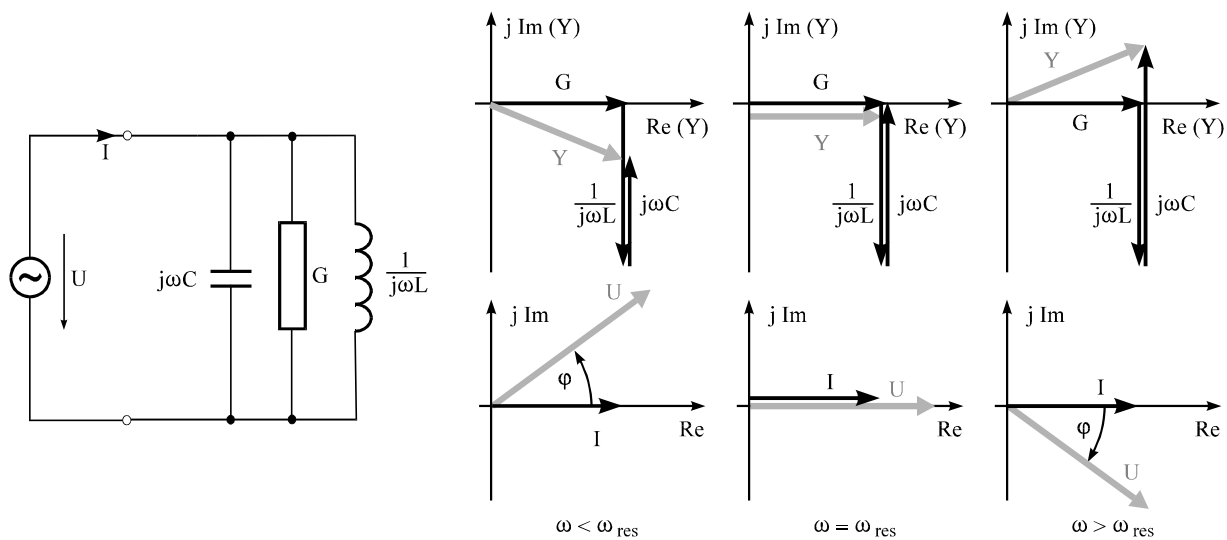


Abbildung 35: Parallel-Schwingkreis

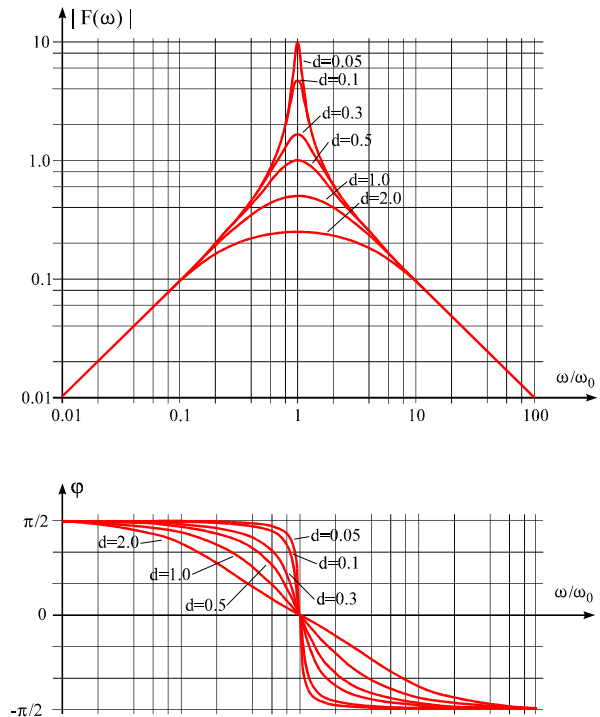
Im Resonanzfall ist die Admittanz minimal und nur durch den ohmschen Leitwert  $G=1/R$  gegeben. Man kann also einen Parallelschwingkreis als Sperrfilter für die Resonanzfrequenz verwenden, wenn er in Serie mit einer Spannungsquelle geschaltet ist und als Durchlaßfilter, wenn er parallel zu einer Spannungsquelle angeordnet wird.

Interessanterweise haben beide Schwingkreistypen mit denselben Bauelementen dieselben Resonanzfrequenzen. Es handelt sich hier um sogenannte *duale Schaltungen*, die gleichwertig sind und sich dadurch in einander umformen lassen, dass man Strom mit Spannung, Impedanz mit Admittanz und Parallelschaltung mit Serienschaltung (sowie Eingang und Ausgang) vertauscht.



### 2.3.6 Bodediagramm

Häufig möchte man das Frequenzverhalten von Wechselstromschaltungen in einem Diagramm mit der Frequenz als Ordinate darstellen. Da die meisten Größen aus der Menge der komplexen Zahlen stammen, muss man zwei Koordinatensysteme wählen. Da in der Regel die polare Darstellung physikalisch interpretierbar ist (Absolutwert = Maximalamplitude, polarer Winkel = Phasenverschiebung zwischen zwei Größen wie Spannung und Strom), die Darstellung von Realteil und Imaginärteil dagegen weniger, wählt man die erste Möglichkeit. Nun hat man es in der Informationstechnik häufig mit großen Bandbreiten, d.h. mit Frequenzbereichen über einige Zehnerpotenzen, zu tun, daher wählt man für die Frequenzachse eine logarithmische Darstellung. Ebenso oft müssen - zumindest in der Analogtechnik - sehr große Amplitudenunterschiede dargestellt werden. Daher werden die Amplituden ebenso wie die Frequenzen logarithmisch dargestellt. Die Phasenwinkel trägt man dagegen linear auf. Eine solche Darstellung wird *Bodediagramm* genannt.



**Abbildung 36:** Bodediagramm eines einfachen Schwingers

Für Schwingkreise lässt sich das Frequenzverhalten durch eine normierte Darstellung beschreiben. Dazu werden zwei Größen eingeführt, der *Kennwiderstand*  $Z_K$ , der die Dimension  $\Omega$  hat und ein *Dämpfungsfaktor*  $d$ , der den ohmschen Widerstand berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 Z_K &= \sqrt{\frac{L}{C}}, \\
 d &= \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}, \\
 &= \frac{1}{2} \frac{R}{Z_K}.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Für einen Reihenschwingkreis lässt sich dann eine normierte Admittanz  $F(\omega)$  angeben:

$$\begin{aligned}
 Y_{Reihe} \cdot Z_K &= \frac{\sqrt{L/C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}, \\
 F(\omega) &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2d\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}.
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Die gleiche, dimensionslose Funktion  $F(\omega)$  erhält man auch für die mit  $Z_K$  normierte Impedanz  $Z_{Parallel}$  eines Parallelschwingkreises, wenn der Dämpfungsfaktor als  $d = \frac{1}{2} G \cdot Z_K$  definiert wird. Abb. 36 zeigt das Bodediagramm der Resonanzkurvenschar von einfachen Schwingern. Wie man sieht, wird mit abnehmender Dämpfung (abnehmendem ohmschen Widerstand beim Reihenschwingkreis, bzw. abnehmendem Leitwert beim Parallelschwingkreis) die Resonanzkurve immer steiler

und die Phasendrehung im Resonanzbereich immer stärker. Bei der Dämpfung  $d=0$  erhält man im Resonanzfall den Wert  $|F|=\infty$  und einen Phasensprung von  $+\pi/2$  auf  $-\pi/2$ .

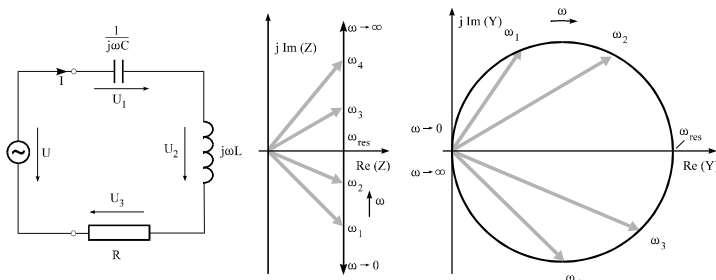
### 2.3.7 Ortskurven

Die Abb. 34 und 35 zeigten auf der rechten Seite drei verschiedene Zeigerdiagramme für drei verschiedene Frequenzen. Trägt man den geometrischen Ort der komplexen Größe - z.B. den der Impedanz in Abb. 34, bzw. der Admittanz in Abb. 35 - für alle Kreisfrequenzen in der komplexen Ebene auf, so spricht man von einer *Ortskurve*. In den beiden obigen Abbildungen sind es senkrechte Geraden. Abb. 37 zeigt diese Darstellung für den Reihen-Schwingkreis genauer. Im Resonanzfall schneidet die Ortskurve die reelle Achse und der Abstand zum Ursprung gibt den reellen Anteil der Größe im Resonanzfall an.

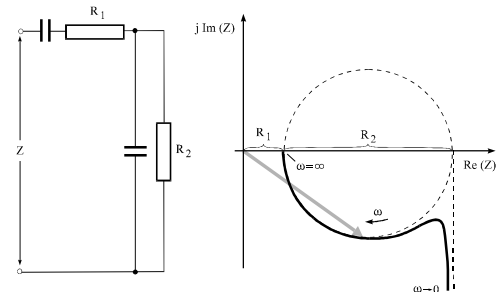
Wie erhält man nun aus einer Impedanz eine Admittanz? Offensichtlich gilt für

$$\underline{Z} = r e^{j\varphi}, \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r} e^{-j\varphi}, \quad (69)$$

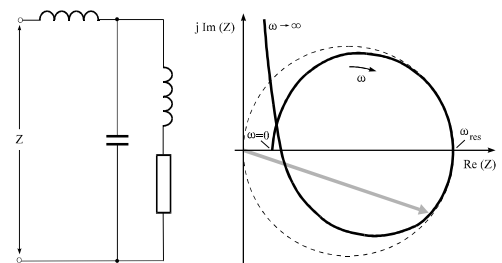
d.h. die Admittanz erhält man aus der Impedanz durch Spiegelung am Einheitskreis. Dabei gilt, dass die Spiegelung eines Kreises am Einheitskreis wieder einen Kreis ergibt. Die Gerade der Impedanz-Ortskurve kann nun als Kreis mit dem Radius  $\infty$  angesehen werden. Daher ist die Ortskurve der Admittanz des Serien-Schwingkreises ein Kreis. (Einen Beweis hierfür findet man z.B. in [Küpfmüller]).



**Abbildung 37:** Ortskurven von Impedanz und Admittanz eines Reihen-Schwingkreises



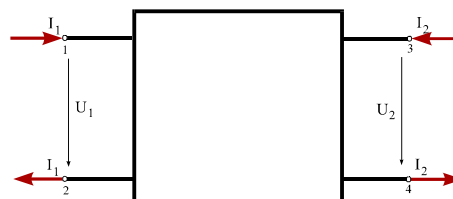
Zwei weitere Beispiele für Ortskurven zeigt Abb. 38. Wie man sieht, können sich durchaus auch andere Kurven als Geraden und Kreise ergeben. Schaltungen, die nur Induktivitäten oder nur Kapazitäten enthalten, sind nicht schwingungsfähig, da ihre Ortskurven die reelle Achse nicht schneiden. Dagegen zeigt das untere Beispiel zwei Resonanzfrequenzen, eine mit der linken Induktivität und der Kapazität als Reihenschwingkreis und eine zweite mit der Parallelschaltung von rechter Induktivität und Kapazität.



**Abbildung 38:** Zwei Beispiele für Ortskurven

## 2.4 Vierpole

Die oben besprochenen Schaltungen werden auch *Zweipole* genannt, da sie nur mit zwei Anschlüssen von außen zugänglich sind. Eine wichtige Gruppe von Schaltkreisen hat zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen, diese Schaltkreise nennt man *Vierpole*. Ein Beispiel dafür ist ein Verstärker mit zwei Eingangsbuchsen für ein Mikrofon und zwei Ausgangsbuchsen für einen Lautsprecher. Auch der Transformator ist ein Vierpol. Abb. 39 zeigt die symbolische Darstellung eines Vierpols.



**Abbildung 39:** Spannungen und Ströme an einem Vierpol

Vierpole dienen häufig der Signalmanipulation, z.B. der Filterung, Verstärkung oder Trennung von Signalgemischen. In der Nachrichtentechnik hat sich die Beschreibung im Spektralbereich mit Frequenzen als sehr nützlich erwiesen. Die Fouriertransformation erlaubt es, unter bestimmten Existenzbedingungen beliebige Signalformen im Zeitbereich als Frequenzgemische im Spektralbereich zu beschreiben. Auf den hierfür notwendigen mathematischen Apparat wollen wir nicht näher eingehen. Man kann dann die bisherigen Betrachtungen aus der Wechselstromtheorie für einzelne Frequenzen anwenden und ein Verhalten über ganze Frequenzbereiche ermitteln. Daher verwenden wir die schon benutzte Wechselstromdarstellung mit komplexen Zeigergrößen.

Das Innenleben der "Black Box" in Abb. 39 ist für lineare Systeme vollständig aus dem Verhalten den in der Abbildung angegebenen Größen  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  beschreibbar. Üblicherweise wird die linke Seite als Eingangsseite und die rechte als Ausgangsseite betrachtet. Dafür verwendet man Parametermatrizen, die z.T. auch physikalisch deutbar sind. Man beachte die symmetrische Darstellung der Pfeilrichtungen.

### 2.4.1 Impedanzmatrix

In allgemeiner Form kann ein Vierpol durch das folgende Gleichungspaar bzw. die darunterstehende Matrixgleichung beschrieben werden.

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (70)$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

Die Matrix  $\underline{Z}$  heißt *Impedanzmatrix*. Ihre Komponenten beschreiben den Zusammenhang zwischen den einzelnen Spannungen und Strömen.  $Z_{11}$  heißt *Eingangsimpedanz*,  $Z_{22}$  *Ausgangsimpedanz*. Die Impedanzen  $Z_{ij}$ ,  $i \neq j$  heißen *Koppelimpedanzen*, da sie

eine Eingangsgröße mit einer Ausgangsgröße verknüpfen. Für passive Vierpole gilt:  $Z_{12}=Z_{21}$ , so dass hier nur drei Koeffizienten zur Beschreibung ausreichen.

## 2.4.2 Admittanzmatrix

Analog zur Impedanzmatrix lässt sich eine *Admittanzmatrix*  $\underline{Y}$  angeben, die dem folgenden Gleichungssystem gehorcht:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \\ \underline{I} &= \underline{Y} \underline{U} \end{aligned} \quad (71)$$

Für die Admittanzen  $Y_{ij}$  gelten die Bemerkungen vom vorherigen Abschnitt entsprechend.

Aus den Gln. (67) und (68) lässt sich mit Hilfe der Matrizenalgebra eine Umrechnung von Admittanz- in Impedanzmatrix und umgekehrt vornehmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\text{adj} \underline{Y}}{|\underline{Y}|}; & \underline{Y} &= \frac{\text{adj} \underline{Z}}{|\underline{Z}|}; \\ \underline{Z} &= \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \end{bmatrix}; & & \\ \underline{Y} &= \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \end{bmatrix}. & & \end{aligned} \quad (72)$$

## 2.4.3 Kettenmatrix

Die Vierpolgleichungen lassen sich auch noch anders schreiben (insgesamt gibt es sechs Möglichkeiten). Häufig wird eine Form gewählt, bei der die Eingangsgrößen  $U_1, I_1$  durch die Ausgangsgrößen  $U_2, I_2$  ausgedrückt werden. Diese Kettenform ist dann nützlich, wenn man mehrere Vierpole hintereinander schalten muss (in Kette geschaltet), wobei die Ausgangsgrößen eines Vierpols die Eingangsgrößen des folgenden sind.

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} U_2 + A_{12} I_2, \\ I_1 &= A_{21} U_2 + A_{22} I_2. \end{aligned} \quad (73)$$

Hierbei sind die  $A_{11}$  und  $A_{22}$  dimensionslos,  $A_{12}$  ist eine Impedanz und  $A_{21}$  ein Admittanz. Für die Systemdeterminante gilt:

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1. \quad (74)$$

### 2.4.4 Superpositionsgesetz

Eine wichtige Eigenschaft linearer Systeme ist ihre Unabhängigkeit von der Amplitudenhöhe der betrachteten Größe, etwa der elektrischen Spannung. In der praktischen Anwendung sind durch Übersteuerungseffekte dem natürliche Grenzen gesetzt. Für die Theorie ist sie jedoch von sehr hohem Wert. Diese Eigenschaft wird mit dem *Superpositionsgesetz* beschrieben. Betrachten wir eine Ausgangsgröße  $y(t)$ , die sich infolge von zwei oder mehr überlagerten Eingangsgrößen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t) \dots u_n(t)$  ergibt. Das betrachtete System ist genau dann linear, wenn folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_n y_n(t) \\
 &= F [a_1 u_1(t)] + F [a_2 u_2(t)] + \dots + F [a_n u_n(t)] \quad (75) \\
 &= F [a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t)],
 \end{aligned}$$

wobei  $F$  ein linearer Operator ist, z.B. ein Verstärkungsfaktor oder ein spektrales Filter und die  $a_i$  konstante Koeffizienten. Die Operationen der Summation und der Anwendung des

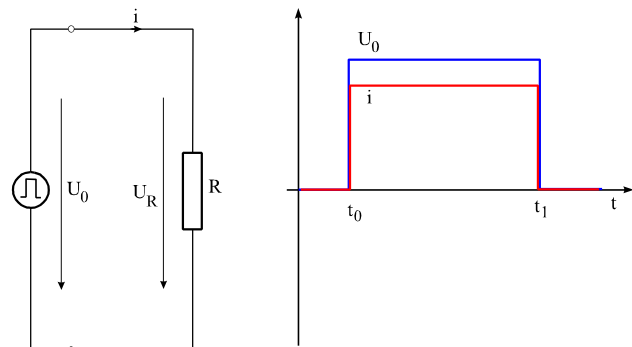
Operators  $F$  auf mehrere mit  $a_i$  gewichtete Eingangsgrößen  $u_i(t)$  können also vertauscht werden.

## 2.5 Schaltvorgänge

Haben wir bisher den stationären Wechselstromkreis betrachtet, so wollen wir uns nun *instationären* Vorgängen zuwenden, wie sie in digitalen Schaltungen vorkommen. Die Bauelemente in diesen Schaltungen werden von (im Idealfall) rechteckförmigen Spannungen oder Strömen angesteuert, die man *Impulse* nennt. Hat die Impulsfolge einen regelmäßigen Takt, spricht man auch von einem *Puls*.

### 2.5.1 Schaltverhalten eines ohmschen Widerstandes

Das Ohmsche Gesetz beschreibt das Verhalten von Strom und Spannung am ohmschen Widerstand  $R$ , wie es in Abb. 40 illustriert wird. Schalten wir zur Zeit  $t_0$  eine sprunghörmige Spannung auf einen ohmschen Widerstand  $R$  auf, so folgt der Strom dem Spannungsverlauf direkt, da  $R$  lediglich als Proportionalitätsfaktor im Ohmschen Gesetz nach Gl. (17) wirkt.



**Abbildung 40:** Schaltverhalten eines ohmschen Widerstandes

## 2.5.2 Schaltverhalten einer Kapazität

Wegen des Innenwiderstandes von Spannungsquellen lässt sich eine Kapazität  $C$  nur in Zusammenhang mit einem ohmschen Widerstand  $R$  betrachten, wie es Abb. 41 zeigt.

Die Maschengleichung ergibt dann

$$U_0 = u_R + u_C \quad (76)$$

und mit den Gln. (15) und (16)

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} i dt, \quad (77) \quad \text{d.h. wir erhalten}$$

$$\frac{U_0}{R} = i + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} i dt \quad (78)$$

oder als Differentialgleichung  $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC} i,$

bzw.  $\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt.$

Die Lösung dieser Dgl. erhalten wir durch Integration beider Seiten:

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \text{const.} \quad (79)$$

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \ln i_0 \quad \text{oder} \quad (80)$$

$$i = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$= \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$U_0/e$  aufgeladen ist.

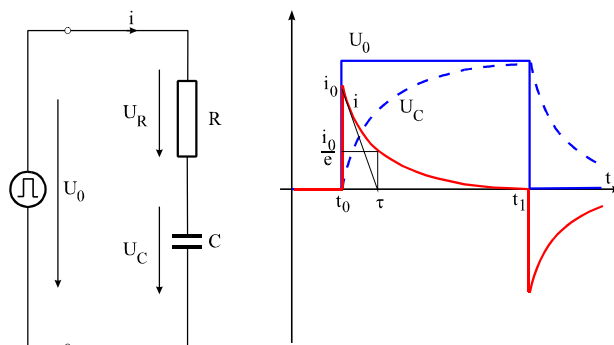


Abbildung 41: Schaltverhalten einer Kapazität

Die Konstante muss aus einer Anfangsbedingung bestimmt werden: Im Schaltzeitpunkt  $t_0$  fließt der Strom  $i_0 = U_0 / R$ , da der Kondensator dann wie ein Kurzschluss wirkt. Wir erhalten somit

Die Größe  $\tau = R \cdot C$  hat die Dimension einer Zeit und heißt *Lade- oder Entlade-Zeitkonstante*. Sie gibt nach Gl. (76) die Zeit an, in der der Ladestrom auf den  $e$ -ten Teil abgefallen ist. bzw. in Gl. (77) die Zeit, bis der leere Kondensator auf die Spannung

Der Spannungsverlauf ergibt sich aus der Maschenregel, d.h.

$$\begin{aligned} U_C &= U_0 - i \cdot R, \\ &= U_0 - i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R, \\ &= U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \end{aligned} \quad (81)$$

Diese Verläufe zeigt Abb. 41.

Springt die äußere Spannung auf null (dabei ist der Innenwiderstand der Spannungsquelle im Idealfall null), so ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} 0 &= i \cdot R + U_C. \\ \text{Mit } i &= \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad \text{folgt:} \\ 0 &= C \frac{dU_C}{dt} R + U_C; \end{aligned} \quad (82)$$

$$\text{oder } \frac{dU_C}{U_C} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Die Lösung dieser Dgl. ergibt wiederum eine e-Funktion:

$$U_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (83)$$

wobei sich daraus für den Strom der folgende Verlauf ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= iR + U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \\ \text{oder } i &= -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \\ i &= -i_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \quad (84)$$

Der Strom fließt nun bei der Entladung in entgegengesetzter Richtung, wie es auch das negative Vorzeichen aussagt.

### 2.5.3 Schaltverhalten einer Induktivität

Wegen des Innenwiderstandes von Spannungsquellen lässt sich eine Induktivität  $L$  ebenfalls nur in Zusammenhang mit einem ohmschen Widerstand  $R$  betrachten, wie es Abb. 42 zeigt.

Die Maschengleichung ergibt dann

$$U_0 = u_R + u_L \quad (85)$$

und mit Gl. (43)

$$\begin{aligned} u_L &= -L \frac{di}{dt}, \\ i &= -\frac{1}{L} \int u_L dt. \end{aligned} \quad (86)$$

Da die Selbstinduktionsspannung der äußeren Spannung  $U_0$  entgegen gerichtet ist, entfällt hier das negative Vorzeichen. Mit Gl. (84) erhalten wir dann:



$$u_L = U_0 - \frac{R}{L} \int_{t_0}^{t_1} u_L dt$$

oder als Differentialgleichung  $\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L} u_L,$  (87)

bzw.  $\frac{du_L}{u_L} = -\frac{R}{L} dt.$

Die Lösung dieser Dgl. erhalten wir durch Integration beider Seiten, wie in Gl. (78):

$$\ln u_L = -\frac{R}{L} t + \text{const.} \quad (88)$$

Die Konstante muss aus einer Anfangsbedingung bestimmt werden: Im Schaltzeitpunkt  $t_0$  liegt die Spannung  $U_0$  an der Induktivität, da kein Strom fließt und folglich kein Spannungsabfall an  $R$  erfolgt. Wir erhalten somit analog zum Kondensator

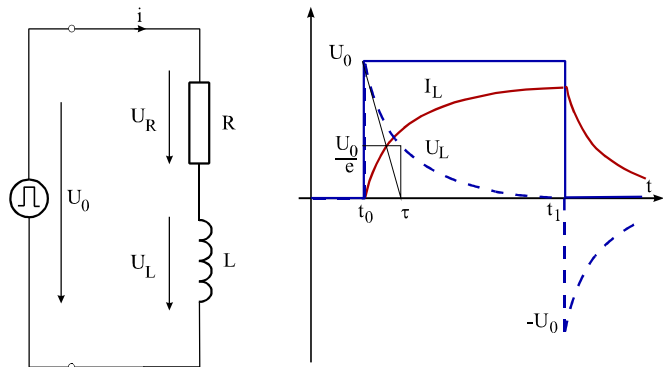


Abbildung 42: Schaltverhalten einer Induktivität

$$\ln u_L = -\frac{R}{L} t + \ln U_0 \quad \text{oder}$$

$$u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (89)$$

$$i = \frac{U_0}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Die Größe  $\tau = L/R$  hat wieder die Dimension einer Zeit und heißt *Zeitkonstante*. Sie gibt nach Gl. (88) die Zeit an, in der die Spannung an der Induktivität auf den  $e$ -ten Teil abgefallen ist, bzw. die Zeit, bis der Strom durch die Induktivität den Wert  $(U_0/R)/e$  erreicht hat.

Springt die äußere Spannung auf null, so ergibt sich folgendes:

$$0 = i \cdot R + U_L.$$

Mit  $U_L = L \frac{di}{dt}$  folgt:

$$0 = L \frac{di}{dt} + iR; \quad (90)$$

oder  $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$

Die Lösung dieser Dgl. ergibt wiederum eine e-Funktion:

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (91)$$

wobei sich daraus für die Spannung an der Induktivität der folgende Verlauf ergibt:

$$u_L = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (92)$$

Wie Abb. 42 zeigt, baut sich im Augenblick des Abschaltens der äußeren Spannung an der Induktivität wegen ihrer Gegeninduktivität eine *Gegenspannung* auf, die den Strom weiter durch den Kreis zwingen will.

Dieser Effekt an Induktivitäten ist für Halbleiterbauelemente äußerst *gefährlich*, da diese hierdurch zerstört werden können. Man hilft sich in der Praxis damit, parallel zu geschalteten Induktivitäten eine *Schutz-Diode* so zu schalten, dass sie diese Abschalt-Spannungsspitze kurzschließt.

Für das Schaltverhalten von Kapazität und Induktivität lässt sich zusammenfassend sagen, dass ideale Rechteckimpulse durch sie verschliffen werden, wodurch die Schaltzeiten in digitalen Schaltungen vergrößert werden. Für schnelle Anwendungen sind daher die unvermeidlichen parasitären Induktivitäten, die im wesentlichen durch die Leitungslängen bestimmt sind, und die Streukapazitäten, die im wesentlichen durch dicht bei einander liegende Leiterbahnen bestimmt sind, möglichst zu minimieren.

